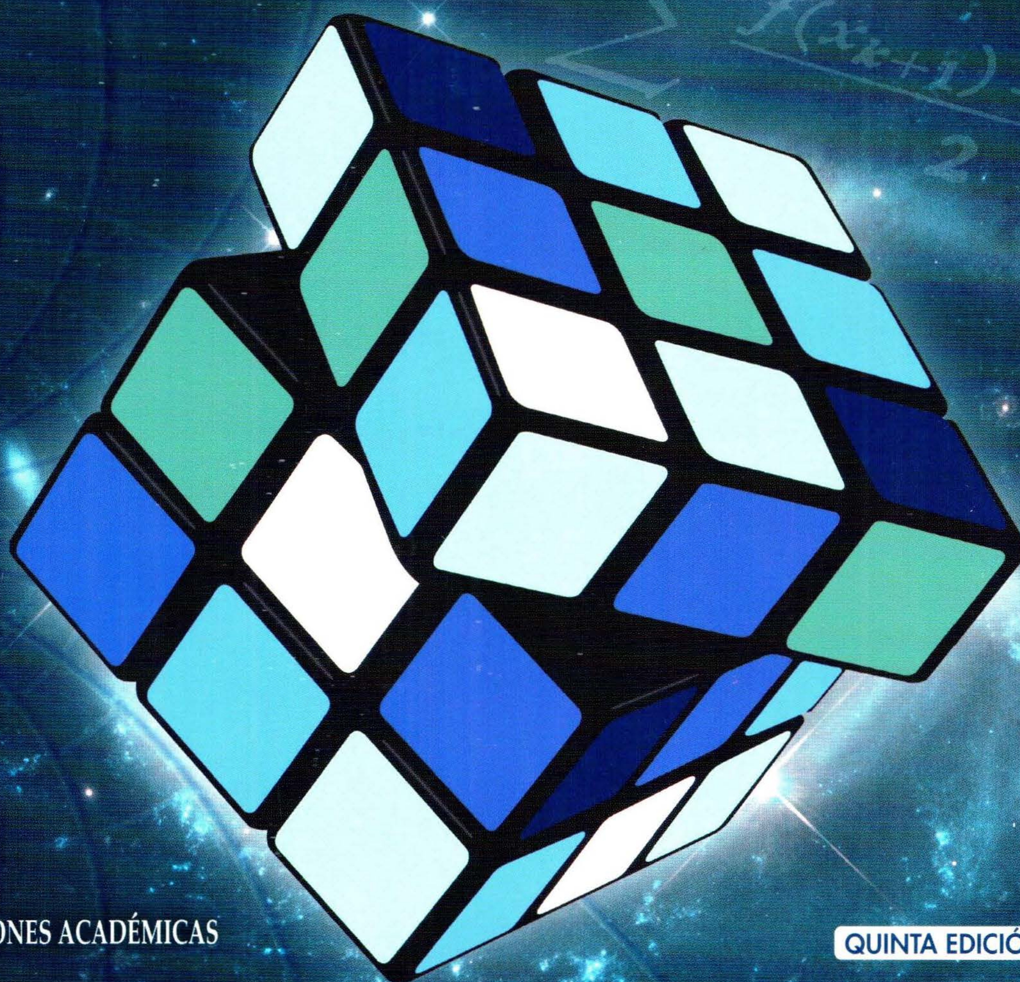
INTRODUCCIÓN A LAS

MATEMÁTICAS

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

· Eduardo Ramos Méndez · Víctor Hernández Morales
· Ricardo Vélez Ibarrola · Ildefonso Yáñez de Diego



EDICIONES ACADÉMICAS

QUINTA EDICIÓN

Foto de portada: NASA,ESA (STScI/AURA).
Diseño de interior y cubiertas: Elena F. Gallardo.

Quinta edición, Septiembre 2014

ISBN: 978-84-16140-04-6
Depósito Legal: M-23097-2014

Impreso por LAVEL, S.A.
Gran Canaria, 12, Humanes de Madrid (Madrid).
Impreso en España / Printed in Spain

INTRODUCCIÓN

A LAS

MATEMÁTICAS

Acceso a la Universidad

Quinta edición

Eduardo Ramos Méndez

Catedrático de Universidad

Víctor Hernández Morales

Profesor Titular de Universidad

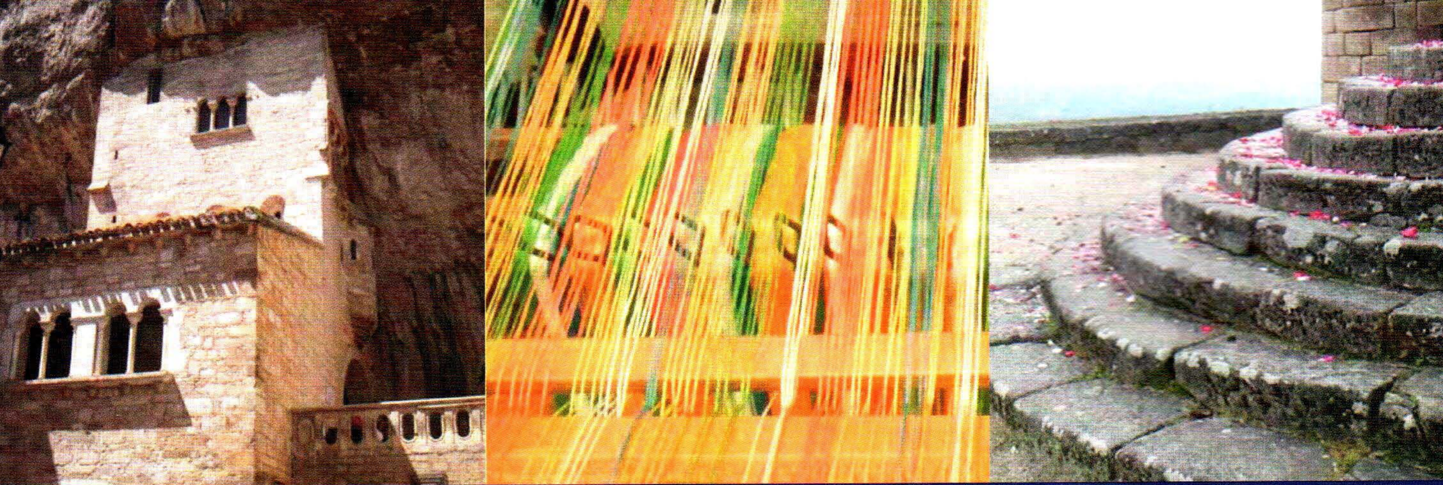
Ricardo Vélez Ibarrola

Catedrático de Universidad

Ildefonso Yáñez de Diego

Catedrático de Universidad


EDICIONES ACADÉMICAS



Í N D





I C E

PRESENTACIÓN

AUDIENCIA

Este libro tiene como objetivo principal servir de texto base para la asignatura *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales* del Curso de acceso directo para mayores de 25 años que se imparte en la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) de España. Está dirigido también al lector interesado en una introducción a los capítulos iniciales de las Matemáticas. Los únicos requisitos que se necesitan para avanzar con seguridad a lo largo del texto son una formación propia de la enseñanza elemental, y una buena disposición para aceptar el desafío que supone enfrentarse con temas de un cierto nivel intelectual como son, sin duda, los que abordan las Matemáticas.

CONTENIDOS

El texto presenta algunos problemas de índole matemática que han preocupado al hombre a lo largo de la historia y configuran el objeto de la disciplina, al tiempo que se hace un bosquejo de sus soluciones. Los capítulos elegidos reúnen características apropiadas para el alumnado al que van dirigidos. En primer lugar, tienen un gran valor formativo, sin duda uno de los principales objetivos a perseguir en un curso de introducción a la universidad. En segundo lugar, permiten un planteamiento riguroso sin precisar de un aparato matemático de alto nivel. Y, en tercer lugar, pasan revista a lo que podemos llamar el equipaje matemático mínimo con que un futuro universitario debe emprender sus estudios de grado superior, especialmente en el área de las Humanidades y las Ciencias sociales.

El texto está estructurado en forma de *unidades didácticas*. Cada una incluye un bloque principal con los contenidos básicos, mínimos para superar el curso y, es por tanto, de lectura obligada. Además, como *temas complementarios*, se añaden algunos apartados, que no integran el programa obligatorio del curso y son de lectura totalmente voluntaria, que pretenden dar al libro un carácter más completo al objeto de que pueda servir como manual de referencia para los futuros universitarios. Cada unidad didáctica se dedica a una de los grandes ramas de las Matemáticas: Fundamentos, Aritmética y Álgebra, Geometría, Análisis y Probabilidad y Estadística.

El nivel matemático se mantiene dentro de unos límites que podemos calificar de elementales. Quiere ello decir que el contenido del texto pretende ser accesible para el lector al cual está dirigido, sin exigir ni una formación

ni unas habilidades matemáticas particulares. Así, se evitan deliberadamente unas notaciones sobrecargadas, haciendo más hincapié en las descripciones verbales de los conceptos que en el abuso de un tipo de escritura que, con frecuencia, se convierte en una barrera infranqueable para muchos. No obstante, hay que ser consciente que la notación matemática no es un capricho de iniciados que quieren mantener los arcanos de su ciencia a salvo de novicios; antes bien, a lo largo de la historia las ciencias, y en particular las Matemáticas, han ido elaborando una terminología y grafía propias que sirven de vehículo adecuado para la expresión de conceptos con un alto grado de abstracción. Por ello, ha de contemplarse el uso de la mínima notación matemática como un ingrediente más del estudio de la disciplina. Por otra parte, el término elemental no se opone a riguroso; estamos convencidos de que sólo cuando un concepto matemático puede explicarse con el debido rigor en un lenguaje elemental merece un lugar de honor en los anaqueles de las Matemáticas.

MÉTODO DE ESTUDIO

Estudiar matemáticas y, en particular, estudiar matemáticas a distancia, es una tarea que exige un método peculiar. Es conocido que la aprehensión de los conceptos matemáticos precisa una lectura activa, con lápiz, papel, calculadora ..., y un cierto período de reflexión o decantación, hasta alcanzar una etapa en que aquéllos se manifiestan de manera evidente, incorporándose, sin mayores problemas, al bagaje de conocimientos propios, en donde vivirán de manera indeleble durante mucho tiempo. Personas poco familiarizadas con esta secuencia de acontecimientos suelen sentirse incapaces de comprender la más sencilla de las ideas matemáticas y, por consiguiente, calificarse automáticamente de nulos para las matemáticas. Pero no es así. Todas las ideas desarrolladas en el texto están al alcance de cualquier persona con un desarrollo intelectual normal, pero precisan un método de estudio adecuado. En concreto, es preciso leer, con cierto detenimiento, las explicaciones que paulatinamente conducen a la necesidad de definir un concepto o expresar un resultado. En el texto se reconocerán por estar incluidos en recuadros de color. Además, cada idea viene acompañada de un ejemplo que permite comprobar si se ha alcanzado el grado de comprensión adecuado. En caso afirmativo, se puede proseguir confiadamente la lectura del texto; en otro caso, es conveniente releer las explicaciones, intentando descubrir en qué lugar se ha perdido el detalle pertinente. Finalmente, llega el momento de enfrentarse con las *cuestiones de autoevaluación.* Cada capítulo incluye un número suficiente de ellas para comprobar la solidez

de los conocimientos adquiridos. Es mejor idea dedicar unos instantes de reflexión para intentar resolver una cuestión determinada que caer en la tentación de ir a buscar inmediatamente la solución; el tiempo empleado en ello nunca será tiempo perdido.

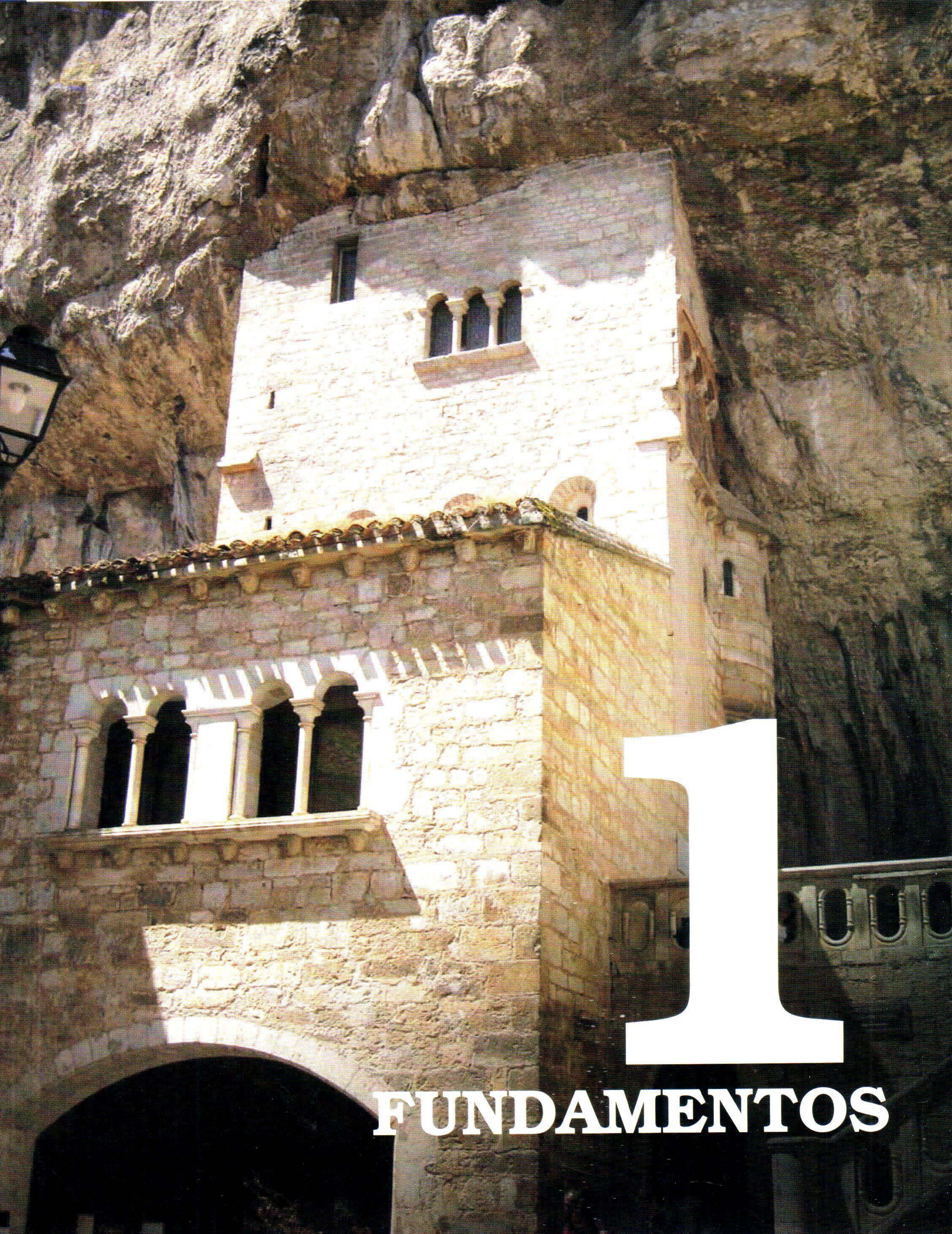
Finalmente, el texto incluye un capítulo que lleva por título *Desarrollo de la competencia matemática.* Como es conocido, el término "competencia" está muy de actualidad en la planificación del currículum, motivado no sólo por la influencia del pensamiento pedagógico, sino también por la normativa que, desde la introducción del Espacio Europeo de Educación Superior, exige que los modelos de enseñanza-aprendizaje esten orientados a la adquisición de competencias. Aunque no es éste el lugar para plantear una discusión detenida sobre el significado de dicho concepto, la idea que subyace consiste en afirmar que los objetivos de formación tienen que ir más allá de la mera adquisición de conocimientos teóricos para llegar a desarrollar la capacidad de aplicarlos en la práctica, en particular, en la vida real. En este último capítulo se presentan diversas situaciones, extraídas en buena parte de la vida cotidiana, a partir de las cuales se plantean varias actividades para cuya resolución hay que poner en juego tanto conocimientos como capacidades matemáticas como, por ejemplo, el razonamiento, la modelización matemática y otras, cuyo desarrollo es el auténtico objetivo de formación que pretende alcanzar el curso.

Estamos convencidos de que, siguiendo estas recomendaciones, el objetivo final de superar el Curso de acceso y alcanzar una formación que permita abordar con éxito el esfuerzo intelectual que supone cursar una carrera universitaria se alcanzará sobradamente.

AGRADECIMIENTOS

El libro es fruto de una síntesis de ideas, opiniones y discusiones, mantenidas no sólo entre los propios autores, sino también entre ellos y otros muchos compañeros de la Universidad, de los ámbitos científico y humanístico. Pretender citarlos a todos es una tarea imposible. Pero hay dos colectivos a los que, como tales, queremos mostrar un reconocimiento especial. Por una parte, a los Profesores tutores de la asignatura en los Centros asociados. Sus comentarios y sugerencias han pulido muchos de los defectos de anteriores ediciones del texto. Por otra parte, a los ex-alumnos que han superado en años pasados el curso. Ellos han sido quienes con sus consultas, críticas y constante contacto con el equipo docente han influido muy especialmente en la orientación que se ha querido dar al texto.

Madrid, agosto de 2014.

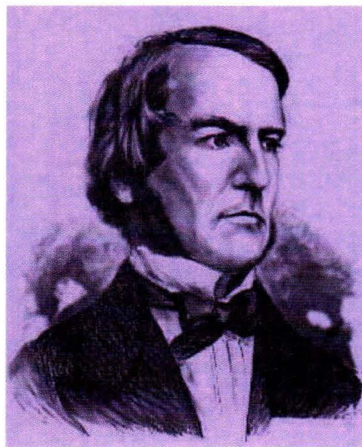


1 FUNDAMENTOS

CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

La Matemática es una ciencia que tiene dos vocaciones bien distintas. Una es proporcionar métodos a otras ciencias; ésta es una aspiración que la lleva hacia fuera, hacia la realidad del hombre en cada tiempo y su manera de organizarse y vivir. Es la Matemática de los números, el cálculo, las figuras geométricas, el azar, ... La otra vocación es resumir la mayor cantidad de conceptos que sea posible en unas pocas ideas muy generales; es el deseo de reducir los métodos particulares a la ordenada servidumbre de una teoría común. Ésta es una exigencia interna, que busca los últimos porqués, la simplificación y la armonía, en suma: la belleza. Así, bien porque buena parte de los problemas que se plantean no pueden ser resueltos en términos estrictamente numéricos o geométricos, bien porque la exigencia de unidad teórica impulsa a buscar conceptos más generales, en el discurrir de la historia se han incorporado al pensamiento matemático muchas ideas que conforman los fundamentos propios de la disciplina. En esta unidad didáctica se examinan algunos de ellos: la lógica de proposiciones, los conjuntos y sus transformaciones, y la noción de cardinal de un conjunto que nos va a conducir más adelante a la idea de número.



George Boole (1815-1864).

Nuestro punto de partida es un hecho incuestionable: el hombre es un ser racional. Ésta es, sin duda, la cualidad esencial que distingue a la especie humana de los demás seres que pueblan la tierra. Las pautas de comportamiento del ser humano están gobernadas por la razón. No es éste el lugar para extendernos sobre el significado del término razón; a lo largo de la historia, ha sido ocupación de la Filosofía analizar las estructuras que rigen la mente humana para generar el conocimiento. De un modo general, podemos admitir que el hombre está dotado de una serie de mecanismos lógicos, universalmente admitidos, que permiten identificar el comportamiento racional. Cuando alguien actúa en contra de los dictados de la lógica solemos decir que se conduce de manera "irracional". Esta conducta puede obedecer a diferentes motivos, desde el simple error inconsciente, hasta la más profunda disfunción mental, pasando por el engaño calculado. La Medicina y la Psicología han estudiado detenidamente todas estas situaciones. Evidentemente, no es tarea de las Matemáticas ocuparse de estos problemas. Nuestro objetivo se limitará a estudiar los aspectos más simples de los citados mecanismos lógicos que dirigen la razón humana. Porque en

ellos están los fundamentos más profundos de las Matemáticas: la verdad o falsedad de los enunciados, los modos de razonamiento, las conclusiones lógicamente válidas, etc.

Este campo se denomina **lógica de proposiciones**. Su estudio no es nuevo; sus raíces pueden remontarse a la filosofía griega y preocupó, sin duda, a la mayor parte de las escuelas de pensamiento filosófico. Fue el inglés George Boole (1815-1864) quien, en su trabajo *Una Investigación de las Leyes del Pensamiento, en las cuales están basadas las Teorías Matemáticas de la Lógica y de la Probabilidad*, publicado en 1854, expresó en su actual forma simbólica las leyes del razonamiento.

La lógica de proposiciones exige precisar, en primer lugar, el significado del término proposición y su valor de verdad. Luego se clasifican las proposiciones en simples y compuestas. Dicha clasificación permite introducir los conectores lógicos: negación, conjunción, disyunción y condicional. Mediante estos conectores pueden construirse proposiciones complejas, cuyos valores de verdad se encuentran fácilmente con ayuda de las tablas de verdad. Un paso más avanzado es la consideración de los razonamientos, distinguiendo entre razonamientos lógicamente válidos y falacias; para simplificar la forma de comprobar la validez de un razonamiento son útiles los esquemas de razonamiento, o reglas de inferencia. Finalmente, se explica en qué consiste un proceso de demostración, crucial para la obtención de conclusiones lógicamente válidas en cualquier disciplina y, en particular, en Matemáticas.

La sección segunda se dedica a la **teoría de conjuntos**, fruto de la privilegiada mente del matemático George Cantor (1845-1918), natural de San Petersburgo (Rusia) y profesor de la universidad alemana de Halle. Los fundamentos básicos de la teoría de conjuntos vieron la luz en una serie de seis artículos publicados en la revista *Mathematische Annalen* entre los años 1879 y 1884 y significaron una profunda revolución en el pensamiento matemático. El estudio comienza reflexionando sobre la noción de conjunto y elemento, junto con la relación de pertenencia, sobre los que se asienta el edificio teórico que se construye a continuación. A partir de ahí se van considerando los diferentes conceptos: inclusión e igualdad de conjuntos, conjuntos universal y vacío, conjunto de las partes, hasta llegar a las operaciones con conjuntos, intersección, unión y complementación, que se estudian junto con sus propiedades. Se considera también la representación de conjuntos en forma de diagramas de Venn que, que por su fuerza gráfica, resultan útiles para resolver muchas cuestiones que se plantean en la teoría.



George Cantor (1845-1918).

A continuación se estudian las transformaciones entre conjuntos. Éste

es uno de los problemas principales de cualquier disciplina científica. Por ejemplo, los físicos estudian las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos, entendido como una transformación de la posición, es decir, un cambio del lugar que ocupa el cuerpo. Los biólogos estudian el desarrollo de los embriones en seres completos; también estudian la evolución de los ecosistemas. Los historiadores y sociólogos estudian las transformaciones de las sociedades. Los psicólogos la modificación de la conducta de las personas. Los economistas estudian la influencia de los tipos de interés en la actividad económica. Como se ve, los ejemplos son innumerables.

En Matemáticas, hay un concepto que significa transformación o cambio. Es el concepto de **aplicación**, que se estudia en esta unidad didáctica. Las aplicaciones pretenden ser un modelo, un patrón, que sintetice lo que tienen en común muchas transformaciones de otras ciencias. El estudio consiste esencialmente en exponer la noción de aplicación, junto con los principales conceptos básicos: imagen, imagen inversa, tipos de aplicaciones y composición de aplicaciones.

Se introduce finalmente la noción de **cardinal** de un conjunto, estrechamente ligada a la idea de número natural que estudiaremos en la siguiente unidad didáctica. También se proporcionan algunas expresiones que permiten calcular el cardinal de la unión de conjuntos a partir de los cardinales de los conjuntos que intervienen en la unión.

La unidad didáctica se complementa con los siguientes temas: relaciones lógicas entre proposiciones, las relaciones entre la lógica de proposiciones y la teoría de conjuntos, algunas aplicaciones del cálculo de cardinales con dos y tres conjuntos y algunos resultados relativos a la acotación de cardinales.

1.1 LÓGICA DE PROPOSICIONES

1.1.1 PROPOSICIONES

Los hombres expresamos nuestros pensamientos, sentimientos, emociones, etc., mediante palabras. La palabra es uno de los indicadores más evidentes de la racionalidad del hombre. Las ideas simples se expresan con una sola palabra: "*árbol*", "*luna*"; los pensamientos más elaborados se manifiestan mediante una serie de palabras que forman oraciones. Por ejemplo, los postulados básicos de una determinada corriente ideológica, las tesis de un científico, las conclusiones de un investigador, los artículos de una normativa, se expresan mediante frases construidas con oraciones.

El lenguaje humano es extraordinariamente rico y variado por lo que la estructura de las oraciones puede ser muy compleja. Su estudio en profundidad corresponde a la Lingüística. La lógica de proposiciones tiene unos objetivos más modestos. Su interés se centra en el análisis de un tipo de oraciones que presentan una estructura muy concreta: enuncian algo sobre lo cual siempre se puede decidir acerca de si es verdadero o es falso. Por ejemplo, todo el mundo en su sano juicio admite que oraciones como "*todos los hombres son mortales*" o "*la suma de uno más uno es igual a dos*" se tienen siempre por verdaderas; asimismo, oraciones como '*Quevedo escribió El Quijote*" o "*Marte es un satélite de la Tierra*" se tienen siempre por falsas; por otra parte, oraciones como "*hoy está lloviendo en Madrid*" o "*en la sesión de hoy la Bolsa ha subido*" se tienen por verdaderas o falsas, según el día del que estemos hablando, o la sesión de Bolsa que se trate. Es decir, de frases como las anteriores siempre puede juzgarse si son verdaderas o falsas; además, éstas, verdadero o falso, son las dos únicas situaciones que pueden darse, sin que pueda admitirse ninguna otra.

Las consideraciones anteriores pueden parecer inútiles. Quizás, a primera vista, podemos pensar que siempre es posible opinar acerca de la verdad o falsedad de cualquier oración. Esta impresión es incorrecta; no parece fácil decidir si oraciones como "*bésame mucho*", "*¡cuidado con el perro!*", "*no me olvides nunca*", "*¿estás seguro?*", ... son verdaderas o falsas. Incluso oraciones que parecen afirmar un hecho opinable como verdadero o falso pueden ponernos en un compromiso. Por ejemplo, si queremos decidir si la oración "*esta oración es falsa*" es verdadera o falsa nos veríamos en un callejón sin salida, porque si pensamos que es verdadera entonces resultaría ser falsa, mientras que si decidimos que es falsa entonces sería verdadera.

Tenemos entonces que exigir que la oración tenga cierta *estructura lingüística* para que enuncie algo que pueda ser juzgado como verdadero o



falso. Además, para poder decidir si una oración es verdadera o falsa, es preciso que tenga también cierta *estructura lógica*. Designamos a este tipo de oraciones con un término particular.

PROPOSICIÓN

1.1 *Las oraciones de las que siempre se puede asegurar que son verdaderas o falsas se llaman* ***proposiciones*** *o* ***enunciados****. Una proposición sólo puede tomar dos* ***posibilidades lógicas****:*

- *Ser* ***verdadera****, que denotamos con V.*
- *Ser* ***falsa****, que denotamos con F.*

A la verdad o falsedad de una proposición se le denomina su ***valor de verdad****.*

EJEMPLO 1.1 Las oraciones *"la ciudad de Burgos tiene más de cien mil habitantes"*, *"la Alcarria es una tierra hermosa"* enuncian algo que puede ser juzgado como verdadero o falso; por lo tanto, son proposiciones.

Las oraciones *"¡ojalá que llueva!"*, *"ponte el vestido rojo"* no enuncian ningún hecho; expresan un deseo o una orden; no son proposiciones.

Conviene insistir en que el valor de verdad de un enunciado no tiene, necesariamente, que coincidir con lo que habitualmente se entiende por "verdad". Desde este punto de vista, el valor de verdad es una valoración, un juicio, que puede atribuirse a determinadas oraciones. El interés de la lógica de proposiciones se centra en que, una vez atribuido ese valor a ciertas proposiciones, el valor de verdad de otras se deduce, de manera *obligatoria*, merced a ciertas reglas.

EJEMPLO 1.2 Las proposiciones que siguen están perfectamente construidas. El lector juzgará a su antojo sobre su valor de verdad: *"la cabeza es la pecera de las ideas"*, *"el oso blanco está envuelto en su albornoz de baño"*, *"el agua se suelta el pelo en las cascadas"*, *"los celos son el picor del amor"*.

Las proposiciones más sencillas que podemos encontrarnos se limitan a enunciar una cualidad de un ser, o una cosa, o poner de manifiesto un hecho. Por ejemplo, la proposición *"hoy llueve"*. Este tipo de proposiciones pueden denominarse **proposiciones simples** y es habitual representarlas con una letra como p, q, r, . . .

Por otra parte, hay proposiciones que enuncian varias cualidades de un ser, o una cosa, de forma que su verdad o falsedad se desprende del valor de verdad de otros enunciados más sencillos. Por ejemplo, la proposición *"hoy hace frío y llueve"* afirma dos circunstancias del tiempo que hace el día de

hoy: que *"hoy hace frío"* y que *"hoy llueve"*. El enunciado combina dos proposiciones simples, —*"hoy hace frío"*— y —*"hoy llueve"*—, mediante la conjunción *y*, que añade el sentido de afirmar que, simultáneamente, se dan ambas circunstancias. Este tipo de proposiciones pueden denominarse **proposiciones compuestas**.

Los enunciados simples pueden relacionarse entre sí de distintas maneras, modificando el sentido del enunciado. Por lo tanto, el valor de verdad de un enunciado compuesto no solo depende de los valores de verdad de sus componentes, sino también de la relación que les liga. Por ejemplo, con las mismas proposiciones simples, —*"hoy hace frío"*— y —*"hoy llueve"*—, sin más que variar la relación que las liga, se pueden formar otros enunciados distintos, como las proposiciones: *"hoy hace frío* o *llueve"*, *"hoy hace frío* y no *llueve"*, *"hoy* no *hace frío* pero *llueve"*, *"hoy* no *hace frío* ni *llueve"*. En cada idioma hay una gran variedad de términos, o unidades, que expresan esas relaciones entre los enunciados simples. Afortunadamente, para la lógica de proposiciones, esas unidades pueden reducirse a unas pocas que se denominan **conectores lógicos** y se estudiarán en los apartados siguientes.

PROPOSICIONES SIMPLES Y COMPUESTAS

1.2

*Una proposición que se limita a enunciar una cualidad de un ser o una cosa se denomina **simple**.*
*Una proposición que se obtiene combinando una o varias proposiciones simples mediante **conectores lógicos** se denomina **compuesta**.*

EJEMPLO 1.3 La proposición *"la lógica es fácil y divertida"* es una proposición compuesta que se obtiene al combinar las proposiciones simples *"la lógica es fácil"*, *"la lógica es divertida"* mediante el conector lógico *"y"*.

EJEMPLO 1.4 La proposición *"el acusado es inocente del primer cargo y culpable del segundo"* es una proposición compuesta que se puede obtener combinando las proposiciones simples *"el acusado es inocente del primer cargo"*, *"el acusado es inocente del segundo cargo"* mediante los dos conectores lógicos *"y"*, *"no"*.

1.1.2 CONECTORES LÓGICOS

Como acabamos de ver, las proposiciones simples pueden combinarse mediante diferentes conectores lógicos para dar lugar a proposiciones compuestas. Es natural, entonces, plantearse las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son los distintos modos de componer proposiciones?



2. ¿Cómo se determina el valor de verdad de una proposición compuesta a partir de la verdad o falsedad de las proposiciones simples que la forman?

Comenzaremos estudiando los casos más sencillos en que se contemplan enunciados compuestos formados solamente por dos proposiciones simples y un sólo conector. Más adelante aprenderemos a calcular el valor de verdad de enunciados más complicados a partir de dichos casos elementales. En este análisis es útil ayudarse de las llamadas **tablas de verdad**.

TABLA DE VERDAD

1.3 *La **tabla de verdad** de una proposición compuesta es una representación de las distintas posibilidades lógicas que pueden tomar las proposiciones simples que la integran incluyendo, para cada una de ellas, el valor de verdad de dicha proposición compuesta.*

EJEMPLO 1.5 Si en una proposición compuesta interviene una única proposición simple p la tabla de verdad tendrá dos filas, una por cada una de las posibilidades lógicas que puede tomar p, tabla 1.1 (a); si intervienen dos proposiciones p y q la tabla de verdad tendrá cuatro filas, correspondientes a cada una de las posibilidades lógicas que pueden tomar p y q, tabla 1.1 (b); de forma similar, si intervienen tres proposiciones p, q y r la tabla tendrá ocho filas, tabla 1.1 (c). La tabla puede construirse para un número cualquiera de proposiciones; como se advierte fácilmente, cada proposición adicional duplica el número de filas de la tabla: cuatro proposiciones originan dieciséis filas, cinco, treinta y dos, etc.

p	p	q	p	q	r
V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F
	F	V	V	F	V
	F	F	V	F	F
			F	V	V
			F	V	F
			F	F	V
			F	F	F
(a)	(b)		(c)		

Tabla 1.1: Posibilidades lógicas de una, dos y tres proposiciones.

LA NEGACIÓN

Cada observador puede juzgar lo que crea conveniente acerca de la verdad o falsedad de los enunciados *"la lógica es divertida"* y *"la lógica no es divertida"*. Pero si se juzga que *"la lógica es divertida"* es verdadera, parece razonable considerar que *"la lógica no es divertida"* es falsa y, al revés, si se juzga falsa *"la lógica es divertida"* debe aceptarse como verdadera *"la lógica no es divertida"*.

Las dos proposiciones anteriores están relacionadas de forma que si la primera es verdadera, la segunda es falsa y, si la primera es falsa, la segunda es verdadera. Se dice entonces que *"la lógica no es divertida"* es la **negación** de *"la lógica es divertida"*. Esta relación es *simétrica*, también puede decirse que *"la lógica es divertida"* es la negación de *"la lógica no es divertida"*.

- *La **negación** de una proposición p se representa por $\neg p$ y se lee **"no** p". También se suele decir que $\neg p$ es la proposición **contraria** de p.*

- ***Valor de verdad:** La negación $\neg p$ de una proposición p es verdadera cuando p es falsa, y es falsa cuando p es verdadera.*

- ***Tabla de verdad:***

p	$\neg p$
V	F
F	V

EJEMPLO 1.6 En todos los idiomas hay otras fórmulas para expresar la negación de un enunciado que conviene conocer. Por ejemplo, los enunciados "*es falso que la lógica sea divertida*" y "*no es cierto que la lógica sea divertida*" son también negaciones de "*la lógica es divertida*".

EJEMPLO 1.7 También es frecuente utilizar palabras antónimas para expresar la negación de una proposición. Por ejemplo, la negación del enunciado "*la lógica es fácil*" puede expresarse mediante el enunciado "*la lógica es difícil*".

LA CONJUNCIÓN

Si se consideran dos proposiciones simples como "*el mar está en calma*" y "*sopla una ligera brisa*" podemos utilizar la conjunción copulativa "y" para combinar ambos enunciados y formar la proposición compuesta "*el mar está en calma y sopla una ligera brisa*". Este enunciado afirma que ambos fenómenos, "*el mar está en calma*" y "*sopla una ligera brisa*", se dan a un tiempo. Por tanto, el enunciado compuesto es verdadero cuando lo son, simultáneamente, cada uno de los enunciados que lo componen y es falso en otro caso, es decir, cuando alguno de los enunciados que lo componen es falso. Si se representa por p el enunciado "*el mar está en calma*" y por q el enunciado "*sopla una ligera brisa*", el enunciado compuesto "*el mar está en calma y sopla una ligera brisa*" se denomina **conjunción** de p y q.

1.5

- *La* ***conjunción*** *de las proposiciones p y q se simboliza por $p \wedge q$ y se lee "p y q".*
- ***Valor de verdad:*** *La conjunción $p \wedge q$ de las proposiciones p y q es verdadera cuando lo son, simultáneamente, p y q, y es falsa en otro caso.*
- ***Tabla de verdad:***

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EJEMPLO 1.8 El conector "y" es el identificador de la conjunción de proposiciones. Hay que saber reconocer su presencia aun cuando, a veces, no aparezca de manera explícita. Por ejemplo, si se hace la conjunción de más de dos enunciados solo se expresa, generalmente, antes del último: *"El mucho dormir quita el vigor al cuerpo, embota los sentidos y debilita las facultades intelectuales"*. También se omite a veces por asíndeton: *"Ella es alegre, altiva, enamorada"*. Otras, en cambio, se reitera por polisíndeton: *"Él es muy ladino, y sabe de todo, y tiene mucha labia"*.

LA DISYUNCIÓN

A menudo se emplean expresiones como *"tiene un lápiz o una pluma"*, *"viene de Cuenca o de Albacete"*, *"este verano iré a Málaga o a Gandía"*. En ellas aparece la conjunción disyuntiva "o" combinando enunciados simples. Resulta fácil aceptar que esta clase de enunciados son falsos si lo son cada uno de los enunciados simples que lo componen: si *"tiene un lápiz"* es falso y *"tiene una pluma"* es también falso, entonces se comprende que es falso *"tiene un lápiz o una pluma"*. Por otra parte, si uno de los enunciados simples es verdadero y el otro falso, el enunciado compuesto se acepta también fácilmente como verdadero: si *"tiene un lápiz"* es verdadero entonces *"tiene un lápiz o una pluma"* es verdadero, y también si *"tiene una pluma"* es verdadero entonces *"tiene un lápiz o una pluma"* es verdadero. Pero queda una duda, ¿qué ocurre cuando los dos enunciados son verdaderos? Aquí, el uso coloquial confunde puesto que, habitualmente, la conjunción disyuntiva "o" conecta dos enunciados contrapuestos que no pueden ser ciertos si-

multáneamente. Así ocurre con la oración: *"iremos de vacaciones a la playa o a la montaña"* que parece descartar la posibilidad de veranear en ambos lugares. Sin embargo, no siempre es así; la oración: *"es trabajador o tiene suerte"* debe considerarse cierta cuando las proposiciones *"es trabajador"* y *"tiene suerte"* lo son. Si se representa por p la proposición *"es trabajador"* y por q la proposición *"tiene suerte"* entonces la proposición *"es trabajador o tiene suerte"* se denomina **disyunción** de p y q.

DISYUNCIÓN

1.6

- *La **disyunción** de las proposiciones p y q se simboliza por $p \vee q$ y se lee "p ó q".*
- ***Valor de verdad:** La disyunción $p \vee q$ es verdadera cuando alguna de las proposiciones p o q es verdadera, y es falsa cuando ambas proposiciones son falsas.*
- ***Tabla de verdad:***

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLO 1.9 Hay que insistir en el hecho de que las dos proposiciones que forman una disyunción pueden ser simultáneamente verdaderas; en el lenguaje corriente damos muchas veces cuenta explícita de ello: por ejemplo, *"Él es muy distraído o muy confiado, (o ambas cosas)"*.

EL CONDICIONAL

Otra clase de enunciados compuestos que se emplean con frecuencia en lenguaje ordinario tienen naturaleza condicional; por ejemplo, *"si el domingo hace bueno, entonces iremos al campo"*, o también *"si el bebé me sonríe, entonces soy feliz"*. Estos enunciados compuestos expresan una condición; su formulación tiene la siguiente forma: *si ..., entonces ...*, donde los puntos suspensivos corresponden a proposiciones simples.

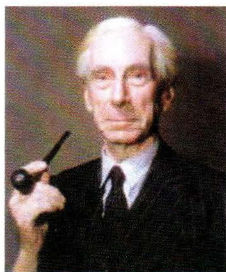
Si p y q son dos proposiciones, el enunciado **condicional** *"si p, entonces q"* se representa por $p \rightarrow q$. El sentido habitual del condicional indica que si p y q son verdaderas, entonces $p \rightarrow q$ es verdadero y que si p es verdadera

y q es falsa, entonces $p \rightarrow q$ es falso. Por ejemplo, si *"el domingo hace bueno"* es verdadero y también *"vamos al campo"*, la promesa realizada por el condicional ha resultado cierta; por otra parte, si *"el domingo hace bueno"* es verdadero pero *"no vamos al campo"*, o sea *"vamos al campo"* es falsa, entonces la promesa ha resultado ser una falsedad. Pero, ¿qué hacer cuando p es falsa? Se acepta que el condicional $p \rightarrow q$ es verdadero cuando p es falsa, con independencia del valor de verdad de q. La decisión anterior puede justificarse diciendo que si p es falsa no puede calificarse de falsedad al condicional y se le considera verdadero. Así, si *"el domingo hace bueno"* no es verdadero entonces *"vamos al campo"* o *"no vamos al campo"* sin que la promesa realizada por el condicional resulte falsa en ninguno de los dos casos, es decir, el condicional puede considerarse verdadero.

Debe considerarse también que en el lenguaje cotidiano sólo se condicionan los enunciados simples si están relacionados de alguna manera. En el estudio de la lógica, no se exige que las proposiciones guarden entre sí algún tipo de relación. Esta libertad produce algunos resultados chocantes; por ejemplo, la proposición *"si* $2 \times 2 = 5$*, entonces los elefantes vuelan"* resulta verdadera, mientras que *"si* $1 + 1 = 2$*, entonces las sardinas son tiburones"* resulta falsa.

CONDICIONAL

1.7



Bertrand Russell (1872-1970).

Se cuenta del gran matemático Bertrand Russell que un día le preguntaron:
—¿Entonces usted cree que si p es falsa $p \rightarrow q$ es verdadera?
—Sí, —respondió Russell—.
—Entonces, —insistió su interlocutor— ¿podría demostrarme que *"Si 1 + 2 = 2 entonces yo soy el Papa?"*.
—Si 1+ 2 = 2, —argumentó Russell—, entonces 2 = 1, el Papa y usted son dos y como 2 = 1, el Papa y usted son uno, luego usted es el Papa.

- *Si p y q son proposiciones, los enunciados de la forma*

  "si p, entonces q",

  se llaman proposiciones **condicionales** *y se simbolizan por $p \rightarrow q$. A la proposición p se le suele llamar* **antecedente** *y a la proposición q* **consecuente**.

- ***Valor de verdad:*** *El condicional $p \rightarrow q$ es falso cuando p es verdadero y q falso; en los demás casos $p \rightarrow q$ es verdadero.*

- ***Tabla de verdad:***

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Expresión coloquial	Forma condicional
• Si llueve llevaré el paraguas.	• Si llueve, entonces llevaré el paraguas.
• Mi perro mueve la cola cuando está contento.	• Si mi perro está contento, entonces mueve la cola.
• Para tener éxito es necesario ser disciplinado.	• Si tiene éxito, entonces es disciplinado.
• Siempre que sopla el viento del sur, me invade la desesperanza.	• Si sopla el viento del sur, entonces me invade la desesperanza.
• Cuando sonríes soy feliz.	• Si sonríes, entonces soy feliz.

Tabla 1.2: Formas comunes de expresar proposiciones condicionales.

EJEMPLO 1.10 Por cuestiones de estilo, en todos los idiomas se utilizan diversas fórmulas para expresar un condicional. En la tabla 1.2 se señalan algunos enunciados frecuentes en el lenguaje coloquial y su traducción a la expresión condicional.

1.1.3 CÁLCULO DE VALORES DE VERDAD

A partir de proposiciones simples, y mediante el empleo repetido de los conectores estudiados, pueden formarse proposiciones mucho más complejas. Sin embargo, su sentido podría resultar confuso sin unas normas de prioridad en el cálculo o el empleo de paréntesis. Por ejemplo, cabe la duda de pensar si la expresión $\neg p \wedge q$ niega la conjunción $p \wedge q$ o bien es la conjunción de la negación $\neg p$ y de q. Aunque podrían darse unas normas de preferencia de unos signos frente a otros, para no recargar la memoria innecesariamente es más cómodo recurrir a la utilización de paréntesis, que permiten definir con precisión la proposición compuesta de que se trate. Así, se escribirá $\neg(p \wedge q)$ para indicar la negación de la conjunción $p \wedge q$, mientras que $(\neg p) \wedge q$ indicará la conjunción de la negación de p y q.

Sentado este principio, nos planteamos ahora cómo calcular los valores de verdad de proposiciones compuestas en las que intervienen varias proposiciones simples, combinadas con diversos conectores lógicos. La solución es sencilla: consiste en aplicar repetidamente los criterios conocidos para combinar dos proposiciones simples, siguiendo el orden marcado por los paréntesis que aparezcan en la expresión compuesta.

Por ejemplo, supongamos que la proposición simple p es falsa y la proposición simple q es verdadera. Si queremos calcular el valor de verdad



de la proposición $((\neg p) \wedge q) \vee p$ podemos razonar del modo siguiente: dado que p es falsa, su negación $\neg p$ es verdadera y, por tanto, la conjunción $((\neg p) \wedge q)$ es verdadera, por ser verdaderas las dos proposiciones que la forman; finalmente, la disyunción $((\neg p) \wedge q) \vee p$ es verdadera, por ser verdadera una de las dos proposiciones que forman la disyunción. Algunos ejemplos adicionales nos harán más familiar el método.

EJEMPLO 1.11 Supongamos que p es falsa y q es verdadera; si queremos hallar el valor de verdad de la proposición $(p \vee ((\neg p) \wedge q)) \wedge q$ podemos razonar del modo siguiente: puesto que p es falsa resulta que $\neg p$ es verdadera; como q también es verdadera, la proposición $(\neg p) \wedge q$ es verdadera y, por tanto, su disyunción con p, $p \vee ((\neg p) \wedge q)$ es verdadera; además, como q es verdadera, resulta que la proposición $(p \vee ((\neg p) \wedge q)) \wedge q$ es verdadera, por ser conjunción de dos proposiciones verdaderas.

EJEMPLO 1.12 Supongamos que p es falsa, q verdadera y que queremos calcular el valor de verdad de la proposición $(p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \vee q)$.

Conviene escribir los cálculos parciales de manera ordenada. Si p es falsa y q verdadera, se tiene

$\neg p$	es verdadera
$\neg q$	es falsa
$(\neg p) \vee q$	es verdadera
$p \vee (\neg q)$	es falsa

luego $(p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \vee q)$ es falsa.

EJEMPLO 1.13 Supongamos que p y q son verdaderas, r es falsa y que queremos hallar el valor de verdad de la proposición $((p \vee (\neg r)) \wedge q) \wedge p$.

El razonamiento puede ser: si p y q son verdaderas y r es falsa, se tiene

$\neg r$	es verdadera
$p \vee (\neg r)$	es verdadera
$(p \vee (\neg r)) \wedge q$	es verdadera

luego $((p \vee (\neg r)) \wedge q) \wedge p$ es verdadera.

CONSTRUCCIÓN DE TABLAS DE VERDAD

En ocasiones interesa calcular el valor de verdad de una proposición en función de todos los valores posibles de las proposiciones que la componen, es decir, para cada una de las posibilidades lógicas de las proposiciones que intervienen en la expresión compuesta. Para ello, lo más sencillo es construir la tabla de verdad de la proposición en cuestión. Este método

ahorra mucho esfuerzo y hace automático el cálculo. Veamos cómo se hace en la práctica.

Vamos a calcular la tabla de verdad de la proposición

$$p \vee ((\neg p) \wedge q)$$

Para ello, se parte de las dos columnas que representan las posibilidades lógicas de las dos proposiciones p y q que la componen. El orden en que se ponen las columnas es irrevalente. Por lo que se refiere a las filas, hay que incluir todas las posibilidades lógicas que pueden darse, como se indica en la tabla 1.1.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

A continuación, se añaden tantas columnas como sea necesario para calcular los paréntesis interiores. Así, para calcular el valor de $(\neg p) \wedge q$ se precisa conocer los valores de $\neg p$. Por ello se añade la columna de valores de $\neg p$. El cálculo es bien simple; basta cambiar el valor correspondiente de la columna de los valores de p por su contrario:

p	q	$\neg p$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Después se añade una columna para los valores de $(\neg p) \wedge q$. Para ello, basta mirar las columnas de $\neg p$ y q:

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

Por último, se calculan los valores de la proposición $p \vee ((\neg p) \wedge q)$. Para ello, basta mirar las columnas de las proposiciones p y $(\neg p) \wedge q$:

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \wedge q$	$p \vee ((\neg p) \wedge q)$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

La última tabla de verdad proporciona los valores de verdad de $p \vee ((\neg p) \wedge q)$, para cada posible pareja de posibles valores de verdad de p y q. Por ejemplo, si p es verdadera y q es falsa, en la segunda línea de la tabla se lee que la proposición $p \vee ((\neg p) \wedge q)$ es verdadera.

EJEMPLO 1.14 La tabla de verdad de la proposición $p \to (q \wedge r)$ viene dada en la tabla 1.3.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Tabla 1.3: Tabla de verdad de la proposición $p \to (q \wedge r)$.

EJEMPLO 1.15 La tabla de verdad de la proposición $(p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \vee q)$ viene dada en la tabla 1.4.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee (\neg q)$	$(\neg p) \vee q$	$(p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \vee q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V

Tabla 1.4: Tabla de verdad de la proposición $(p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \vee q)$.

1.1.4 RAZONAMIENTOS

En las páginas anteriores hemos utilizado varias veces expresiones como *"es razonable"*, *"podemos razonar del modo siguiente"*, es decir, hemos realizado diversos **razonamientos**. En la lógica del proposiciones este término tiene un significado preciso.

RAZONAMIENTO

1.8 *Se denomina **razonamiento** a la afirmación de que cierta proposición, que se dice **conclusión**, se sigue (se deduce o se infiere) de otras proposiciones previas denominadas **premisas**.*

La lógica de proposiciones distingue entre razonamientos lógicamente válidos y razonamientos lógicamente inválidos. Los primeros son los auténticos razonamientos formales, pues obedecen a las leyes de la lógica y conducen a conclusiones lógicamente correctas; en cambio no se admite que los razonamientos lógicamente inválidos configuren formas correctas de razonar.

RAZONAMIENTO LÓGICAMENTE VÁLIDO

1.9 *Un razonamiento es **lógicamente válido** si siempre que las premisas son verdaderas lo es también la conclusión.*

FALACIA

1.10 *Un razonamiento que no es lógicamente válido se llama **falacia**.*

La lógica de proposiciones nos enseña a analizar la verdad o falsedad de un razonamiento. Para ello, es útil hacer una representación esquemática del razonamiento.

EJEMPLO 1.16 Consideremos el siguiente razonamiento:

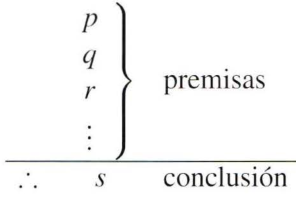
> *"Si llueve entonces hay nubes en el cielo. Llueve, luego hay nubes en el cielo"*

Llamamos p a la proposición *"llueve"* y q a la proposición *"hay nubes el cielo"*. El siguiente esquema nos presenta el razonamiento:

Premisa 1	*"Si llueve, entonces hay nubes en el cielo"*	$p \to q$
Premisa 2	*"Llueve"*	p
Conclusión	*"Luego hay nubes en el cielo"*	$\therefore q$

El símbolo $\therefore$ se lee *"luego"* y sirve para enlazar las premisas con la conclusión.

Como hemos visto en el ejemplo anterior, los razonamientos suelen ordenarse del siguiente modo:



donde, como se ha indicado anteriormente, el símbolo $\therefore$ acompaña a la conclusión y se lee *"luego"*.

Con la ayuda de las tablas de verdad no es muy complicado probar que un razonamiento es lógicamente válido.

FORMA DE PROBAR LA VALIDEZ DE UN RAZONAMIENTO

1.11

Para probar la validez de un razonamiento se forma la tabla de verdad de las premisas y la conclusión, y se comprueba que siempre que las premisas toman el valor de verdad V también la conclusión toma el valor V.

EJEMPLO 1.17 Para analizar la validez del razonamiento:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

se forma su tabla de verdad (tabla 1.5). En primer lugar, se escriben las columnas correspondientes a las proposiciones simples, p y q, que intervienen en el razonamiento. Luego se añade una columna para cada premisa. Esto exige calcular la

	Premisas		*Conclusión*
q	p	$p \to q$	q
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Tabla 1.5: Tabla de verdad del razonamiento del ejemplo 1.17.



columna correspondiente a la proposición $p \rightarrow q$, que es la primera premisa. La columna de la segunda premisa ya figura en la tabla, pues es la proposición p. Finalmente, hay que escribir la columna correspondiente a la conclusión; en este caso, se trata simplemente de copiar la columna de la proposición simple q que ya figuraba en la tabla. Como se indica en la fila resaltada de la tabla 1.5, podemos observar que siempre que las premisas p y $p \rightarrow q$ son verdaderas, también lo es la conclusión q. Por lo tanto, el razonamiento es lógicamente válido.

Es importante entender que la validez de un razonamiento no guarda relación directa con la *verdad de la conclusión*, sino que depende exclusivamente de su coherencia interna. Los ejemplos que siguen aclararán esta idea.

EJEMPLO 1.18 Consideremos el razonamiento:

Si la tortuga pone huevos entonces es un ave
La tortuga pone huevos
$\therefore$ La tortuga es un ave

Si designamos por p la proposición "*la tortuga pone huevos*" y por q la proposición "*la tortuga es un ave*" entonces el razonamiento puede representarse por:

	$p \rightarrow q$	"*Si la tortuga pone huevos entonces es un ave*"
	p	"*La tortuga pone huevos*"
$\therefore$	q	"*La tortuga es un ave*"

Como vemos el razonamiento es el mismo que el realizado en el ejemplo anterior. Sabemos que es lógicamente válido, aun cuando se tiene evidencia empírica de que el hecho que expone la conclusión, "*la tortuga es un ave*", es falso. La explicación hay que buscarla en que la premisa "*si la tortuga pone huevos entonces es un ave*" se tiene también empíricamente por falsa. Pero estas circunstancias de los valores de verdad de las premisas no tienen nada que ver con la coherencia del razonamiento, es decir, con que el razonamiento sea lógicamente válido.

Premisas			Conclusión
p	q	$p \rightarrow q$	p
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

Tabla 1.6: Tabla de verdad del razonamiento del ejemplo 1.19.

EJEMPLO 1.19 Consideremos el razonamiento:

"*Si la tierra gira alrededor del sol entonces es un planeta*"
"*La tierra es un planeta*"
$\therefore$ "*La tierra gira alrededor del sol*"

Si llamamos p a la proposición "*la tierra gira alrededor del sol*" y q es la proposición "*la tierra es un planeta*", el razonamiento se simboliza por:

	$p \rightarrow q$	"*Si la tierra gira alrededor del sol entonces es un planeta*"
	q	"*La tierra es un planeta*"
$\therefore$	p	"*La tierra gira alrededor del sol*"

Si construimos su tabla de verdad, tabla 1.6, observamos que hay un caso en el que las premisas son ciertas y la conclusión falsa; el razonamiento es una falacia. Entonces aunque la conclusión sea verdadera, el razonamiento puede no ser lógicamente válido.

Una consecuencia interesante que podemos extraer del ejemplo anterior es el procedimiento para probar que un razonamiento no es lógicamente válido.

FORMA DE PROBAR QUE UN RAZONAMIENTO NO ES VÁLIDO

Para mostrar que un razonamiento no es lógicamente válido basta encontrar un caso en el que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. 1.12

REGLAS DE INFERENCIA

Cualquier razonamiento puede analizarse siempre mediante la tabla de verdad correspondiente, pero si intervienen muchas proposiciones simples este método puede resultar muy trabajoso. Por ello, es recomendable utilizar las **reglas de inferencia** que aseguran la validez de ciertos **esquemas de razonamiento**.

A continuación se analizan algunas de las reglas más usadas. No está de más insistir en su carácter de *esquemas de razonamiento*: lo que afirma cada regla es que una estructura lógica produce siempre razonamientos válidos, cualesquiera que sean las proposiciones particulares que se sustituyan.

	Premisas		*Conclusión*
q	p	$p \to q$	q
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Tabla 1.7: Tabla de verdad de la regla *modus ponendo ponens*.

Regla 1: Modus ponendo ponens

Se llama así a la regla de inferencia, —*modus*—, que asegura que al afirmar, —*ponendo*—, el antecedente del condicional, se afirma, —*ponens*—, el consecuente.

MODUS PONENDO PONENS

La formulación simbólica de la regla de inferencia **modus ponendo ponens** *es:* 1.13

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

La validez de la regla se demuestra mediante la tabla de verdad (tabla 1.7).

EJEMPLO 1.20 El siguiente razonamiento es lógicamente válido por ser una caso



particular del *modus ponendo ponens.*

	$p \to q$	*"Si pienso, entonces existo"*
	p	*"Pienso"*
$\therefore$	q	*"Existo"*

Regla 2: Modus tollendo tollens

MODUS TOLLENDO TOLLENS

Se llama así a la regla de inferencia que asegura que si se niega, —*tollendo*—, el consecuente del condicional, se niega, —*tollens*—, el antecedente.

1.14 ***La formulación simbólica de la regla de inferencia* modus tollendo tollens *es:***

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \neg q \\ \hline \therefore & \neg p \end{array}$$

		Premisas		*Conclusión*
p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Tabla 1.8: Tabla de verdad de la regla *modus tollendo tollens.*

La validez de la regla se demuestra mediante la tabla de verdad (tabla 1.8).

EJEMPLO 1.21 El siguiente razonamiento lógicamente es válido por ser un caso particular del *modus tollendo tollens.*

	"Si el pueblo está lejos, entonces tardamos más de una hora en llegar"
	"No tardamos más de una hora en llegar"
$\therefore$	*"El pueblo no está lejos"*

Regla 3: Modus tollendo ponens

MODUS TOLLENDO PONENS

Se llama así a la regla de inferencia que asegura que si se afirma la disyunción de dos proposiciones y se niega, —*tollendo*—, una de ellas, se afirma, —*ponens*— la otra.

1.15 ***La formulación simbólica de la regla de inferencia* modus tollendo ponens *es:***

$$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

La validez de la regla se demuestra mediante la tabla de verdad (tabla 1.9).

		Premisas		Conclusión
p	q	$p \vee q$	$\neg p$	q
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Tabla 1.9: Tabla de verdad de la regla *modus tollendo ponens.*

EJEMPLO 1.22 El siguiente razonamiento es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus tollendo ponens.*

"Es muy trabajador o tiene mucha suerte"
"No es muy trabajador"
∴ *"Tiene mucha suerte"*

Regla 4: Ley del silogismo hipotético

Se llama así a la regla de inferencia que asegura que si se afirman dos proposiciones condicionales tales que el consecuente de la primera sea el antecedente de la segunda, entonces puede afirmarse la proposición condicional que se obtiene a partir del antecedente de la primera y el consecuente de la segunda.

LEY DEL SILOGISMO HIPOTÉTICO

1.16 *La formulación simbólica de la regla de inferencia* **ley del silogismo hipotético** *es:*

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow q \\ & q \rightarrow r \\ \hline \therefore & p \rightarrow r \end{array}$$

La validez de la regla se demuestra mediante la tabla de verdad (tabla 1.10).

			Premisas		Conclusión
p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Tabla 1.10: Tabla de verdad de la regla *ley del silogismo hipotético.*



EJEMPLO 1.23 El siguiente razonamiento es lógicamente válido por ser un caso particular de la *ley del silogismo hipotético.*

"Si el próximo domingo hace buen tiempo entonces iré al campo"
"Si el próximo domingo voy al campo entonces podaré los rosales"

$\therefore$ *"Si el próximo domingo hace buen tiempo entonces podaré los rosales"*

DEMOSTRACIONES

Las cuatro reglas de inferencia estudiadas en el apartado anterior tienen dos premisas. Sin embargo, puede presentarse el problema de analizar la validez lógica de una conclusión obtenida de más de dos premisas. El criterio de validez es siempre el mismo: la conclusión es lógicamente válida si es cierta siempre que lo sean todas las premisas. Si las proposiciones simples que intervienen son más de tres, formar la tabla de verdad puede exigir mucho esfuerzo. Entonces, resulta conveniente aplicar sucesivamente las reglas de inferencia ya estudiadas. Este proceso se suele llamar **demostrar** la conclusión a partir de las premisas.

DEMOSTRACIÓN

1.17 *Al proceso que, partiendo de las premisas, lleva a la conclusión a través de una serie de proposiciones intermedias obtenidas sucesivamente mediante la aplicación de las reglas de inferencia se le llama* ***deducción*** *o* ***demostración*** *de la conclusión en varios* ***pasos****.*

REGLAS QUE PUEDEN USARSE EN UNA DEMOSTRACIÓN

El proceso de demostración puede facilitarse aplicando, si es necesario, alguna de las normas que se indican a continuación.

1.18

1. *Una premisa se puede introducir en cualquier paso de una deducción.*

2. *Cada vez que se obtiene una conclusión lógicamente válida de varias premisas, puede ser usada a continuación junto con otras premisas o conclusiones válidas para obtener una nueva conclusión.*

3. *Una premisa o conclusión válida obtenida puede ser sustituida por otra proposición lógicamente equivalente, es decir, por otra proposición con la cual coincida en sus valores de verdad.*

EJEMPLO 1.24 Se trata de analizar el siguiente razonamiento:

"Si José ganó la carrera entonces Pedro fue el segundo o Ramón fue el segundo. Si Pedro fue el segundo, entonces José no ganó la carrera. Si Carlos fue el segundo entonces Ramón no fue el segundo. José ganó la carrera. Luego Carlos no fue el segundo."

Comenzamos considerando las proposiciones siguientes:

p: *"José ganó la carrera"* q: *"Pedro fue el segundo"*
r: *"Ramón fue el segundo"* s: *"Carlos fue el segundo"*

El razonamiento dado puede escribirse, en forma esquemática, de la manera siguiente:

	$p \to (q \vee r)$	*"Si José ganó la carrera entonces Pedro fue el segundo o Ramón fue el segundo"*
	$q \to \neg p$	*"Si Pedro fue el segundo, entonces José no ganó la carrera"*
	$s \to \neg r$	*"Si Carlos fue el segundo entonces Ramón no fue el segundo"*
	p	*"José ganó la carrera"*
$\therefore$	$\neg s$	*"Carlos no fue el segundo"*

Se pretende saber si la conclusión se deduce lógicamente de las premisas. Para ello, mediante la aplicación de las reglas de inferencia junto con las normas que expresamos anteriormente, trataremos de encontrar una serie de premisas (o conclusiones) intermedias que constituyan un camino lógico que nos conduzca a la conclusión. Este camino será la demostración de que el razonamiento es lógicamente válido. Como norma práctica, es conveniente numerar las proposiciones y anotar, cuando son conclusiones, de qué proposiciones proceden y en virtud de qué reglas.

(1)	$p \to (q \vee r)$	Premisa 1.
(2)	$q \to \neg p$	Premisa 2.
(3)	$s \to \neg r$	Premisa 3.
(4)	p	Premisa 4.
(5)	$\neg\neg p$	Aplicación de la regla 3, ya que es lógicamente equivalente a la proposición (4).
(6)	$\neg q$	Se sigue de las proposiciones (2) y (5) por aplicación de *Modus tollendo tollens* y de la regla 2.
(7)	$q \vee r$	Se sigue de las proposiciones (1) y (4) por aplicación del *Modus ponendo ponens*.
(8)	r	Se sigue de las proposiciones (6) y (7) por aplicación del *Modus tollendo ponens* y de la regla 2.
(9)	$\neg s$	Se sigue de las proposiciones (3) y (8) por aplicación del *Modus tollendo tollens* y de la regla 2.

Por lo tanto, el razonamiento es válido. Como puede apreciarse, una deducción consiste en una cadena de proposiciones que se siguen de las premisas por el hecho

de ser equivalentes o por la aplicación de alguna regla de inferencia. Cada proposición intermedia es un "paso" de la demostración. En ocasiones, no es sencillo averiguar cuál es el mejor camino desde las premisas a la conclusión. Una demostración con pocos pasos puede ser calificada de ocurrente o brillante, mientras que una demostración con muchos pasos puede ser tachada de farragosa. Pero, si son correctas desde el punto de vista lógico, ambas son demostraciones y prueban la validez del razonamiento.

EJEMPLO 1.25 Para analizar la validez o no del razonamiento:

> "*Si Juan es más alto que Pedro, entonces María es más baja que Alicia; María no es más baja que Alicia; si Juan y Luis tienen la misma estatura, entonces Juan es más alto que Pedro; luego Juan y Luis no tienen la misma estatura*".

se consideran las proposiciones p, q y r dadas por:

p	*"Juan es más alto que Pedro"*
q	*"María es más baja que Alicia"*
r	*"Juan y Luis tienen la misma estatura"*

Ahora, con símbolos, el razonamiento se escribe:

	$p \to q$	*"Si Juan es más alto que Pedro" entonces María es más baja que Alicia"*
	$\neg q$	*"María no es más baja que Alicia"*
	$r \to p$	*"Si Juan y Luis tienen la misma estatura entonces Juan es más alto que Pedro"*
$\therefore$	$\neg r$	*"Juan y Luis no tienen la misma estatura"*

Una deducción que muestra su validez es la siguiente:

(1)	$p \to q$	
(2)	$\neg q$	
(3)	$r \to p$	
(4)	$\neg p$	se sigue de (1) y (2), *Modus tollendo tollens*
(5)	$\neg r$	se sigue de (3) y (4), *Modus tollendo tollens*

1.2 CONJUNTOS

1.2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Una de las exigencias de una teoría bien fundamentada es la necesidad de definir los conceptos que utiliza. Pronto se cae en la cuenta de que no es posible definir absolutamente todos los conceptos empleados, debido a la propia naturaleza de las definiciones; éstas han de basarse en conceptos previamente definidos, por lo que es preciso contar con un mínimo de nociones *primitivas*, es decir, no definidas, a partir de las cuales desarrollar todas las definiciones posteriores.

En la teoría de conjuntos dichas nociones primitivas son **conjunto** y **elemento**, junto con la relación que las liga: la **relación de pertenencia**. Cualquier intento de definir estos conceptos pasa por emplear forzosamente algún término que puede considerarse equiparable a los efectos de la teoría. Por ejemplo, puede intentarse definir un conjunto como una *colección de objetos*, pero inmediatamente se plantea la pregunta de qué se entiende por *colección* y qué se entiende por *objeto*, volviendo a caer inevitablemente en la obligación de buscar otro término, equiparable a conjunto o colección y a elemento u objeto, para intentar una nueva definición. La teoría de conjuntos renuncia a seguir ese camino sin fin y supone que conjunto y elemento son conceptos acerca de los que todo el mundo tiene una idea intuitiva y no necesitan ser definidos. Al igual ocurre con la relación que los liga: dado un conjunto y un elemento siempre es posible decidir si el elemento pertenece o no pertenece al conjunto, no siendo posible una tercera eventualidad. Para expresar esta idea suele decirse que los conjuntos tienen que estar *bien definidos*, entendiendo aquí el término "definido" como sinónimo de "especificado" o "determinado".

Los conjuntos suelen representarse por letras mayúsculas $A, B, C, X, Y, Z \ldots$ y los elementos por letras minúsculas $a, b, c, x, y, z \ldots$ La relación de pertenencia se simboliza por $\in$ y su negación, la relación de no pertenencia, se simboliza por $\notin$.

CONJUNTO Y ELEMENTO

Conjunto *y* **elemento** *son conceptos primitivos de la teoría de conjuntos, es decir, son términos que no se definen.*

1.19

RELACIÓN DE PERTENENCIA

1.20 *La **relación de pertenencia** es la relación que se establece entre un conjunto y un elemento. Esta relación está bien definida, es decir, dado un conjunto A y un elemento a siempre es posible decidir si el elemento a pertenece al conjunto A, que se simboliza por $a \in A$, o bien si el elemento a no pertenece al conjunto A, que se simboliza por $a \notin A$.*

EJEMPLO 1.26

a) El conjunto de las letras del alfabeto español está bien definido. Si denotamos con A a dicho conjunto entonces a $\in A$, b $\in A$, ñ $\in A$, mientras que $\alpha \notin A$, $\gamma \notin A$, ç $\notin A$, ß $\notin A$.

b) Si denotamos con B al conjunto formado por los meses del año entonces B es un conjunto bien definido. Por ejemplo, *marzo* $\in B$ pero *viernes* $\notin B$.

c) El conjunto de los resultados numéricos que pueden obtenerse al lanzar un dado es un conjunto bien definido que podemos denotar con la letra D. Tenemos $3 \in D$, $6 \in D$, $7 \notin D$.

Para definir un conjunto tenemos dos alternativas: enumerar todos sus elementos o enunciar una propiedad que cumplan todos los elementos del conjunto y que no cumplan los elementos que no pertenezcan al conjunto.

FORMAS DE DEFINIR UN CONJUNTO

1.21 *Un conjunto puede definirse de dos maneras:*

- *Por **enumeración** de todos y cada uno de sus elementos.*
- *Por **descripción** de alguna propiedad o característica que identifique inequívocamente a sus elementos.*

En el primer caso, para representar al conjunto se incluyen todos sus elementos, separados con una coma, dentro de sendos signos de apertura { y cierre } de llave. En el segundo caso, lo que se encierra dentro de la llave es alguna expresión simbólica que refleje la propiedad que verifican los elementos del conjunto.

EJEMPLO 1.27

a) Los siguientes conjuntos están definidos por enumeración:

$$S = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}\}$$
$$V = \{\text{a, e, i, o, u}\}$$

b) Los siguientes conjuntos están definidos por descripción:

$$S = \{\textit{días de la semana}\}$$
$$V = \{\textit{vocales del español}\}$$

Cuando se definen los conjuntos por descripción, es frecuente emplear una simbología que no sólo sirve para abreviar la escritura, sino también permite precisar con nitidez el lenguaje. Por ejemplo, si denotamos con A al conjunto de las letras del alfabeto español, podemos definir al conjunto V anterior como:

$$V = \{x \in A \mid x \text{ es vocal}\}$$

y se lee: "*V es el conjunto de los elementos x que pertenecen al conjunto de las letras del alfabeto español A, tales que x es una vocal*". En esta escritura la raya vertical | se lee "tales que".

INCLUSIÓN DE CONJUNTOS

A partir de la relación de pertenencia entre elementos y conjuntos, entre dos conjuntos A y B se puede establecer la relación de **inclusión**.

INCLUSIÓN DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, se dice que A está **contenido** *o está* **incluido** *en B, y se escribe $A \subset B$, cuando todos los elementos de A pertenecen a B.* 1.22

La relación de inclusión nos conduce a la definición de subconjunto.

SUBCONJUNTO

Si A está contenido en B se dice que A es un **subconjunto** *de B o que A es una* **parte** *de B.* 1.23

EJEMPLO 1.28

a) Todos los elementos del conjunto $A = \{2, 4, 6\}$ pertenecen también al conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; luego, A está contenido en B. También se dice que A es un subconjunto de B. Con símbolos se escribe, $A \subset B$ y se lee "*A está contenido en B*" o "*A es subconjunto de B*".

b) Si $V = \{\text{vocales del alfabeto español}\}$ y $A = \{\text{letras del alfabeto español}\}$, se tiene $V \subset A$.

c) Llamemos P al conjunto de las palabras incluidas en el diccionario de la lengua española de la Real Academia Española. Sea $E = \{p \in P \mid p \text{ es esdrújula}\}$ y $T = \{p \in P \mid p \text{ es trisílaba}\}$. Entonces E no es subconjunto de T; por ejemplo, *matemático* $\in E$ pero *matemático* $\notin T$. Tampoco T es subconjunto de E; por ejemplo, *figura* $\in T$ pero *figura* $\notin E$. Podemos observar que hay elementos que pertenecen a ambos conjuntos: *número* $\in E$ y *número* $\in T$.



PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN DE CONJUNTOS

De la definición de inclusión de conjuntos se deducen inmediatamente las siguientes propiedades:

1.24

- ***Reflexiva***: *Todo conjunto A está contenido en sí mismo:*

$$A \subset A$$

- ***Transitiva***: *Si un conjunto A está contenido en otro B, y B está contenido en otro conjunto C, entonces A está contenido en C:*

$$\text{Si } A \subset B \text{ y } B \subset C, \text{ entonces } A \subset C$$

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Parece natural decir que dos conjuntos A y B son iguales cuando tienen los mismos elementos. Esto exige que todos los elementos de A sean también elementos de B y que todos los elementos de B lo sean a su vez de A, es decir, A tiene que ser un subconjunto de B y B tiene que ser un subconjunto de A. Así, la noción de subconjunto nos lleva de forma coherente a la definición de igualdad de conjuntos.

IGUALDAD DE DOS CONJUNTOS

1.25

Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset A$ se dice que son ***iguales*** *y se denota $A = B$.*

EJEMPLO 1.29 Si S es el conjunto de los días de la semana y

$$A = \{s \in S \mid s \text{ empieza por la letra “m”}\} \qquad B = \{\textit{martes, miércoles}\}$$

entonces claramente $A \subset B$ y $B \subset A$, por lo que A y B son iguales.

CONJUNTOS UNIVERSAL Y VACÍO

Los razonamientos sobre conjuntos suelen estar referidos a un conjunto mayor que contiene a todos los sometidos a consideración. Por ejemplo, si los conjuntos son colecciones de letras, estarán contenidos en las letras de algún alfabeto, si son colecciones de palabras, en algún diccionario. Este conjunto de referencia, propio de cada contexto particular, recibe un nombre especial.

CONJUNTO UNIVERSAL

El conjunto que contiene a todos los conjuntos que se analizan en un determinado contexto se le denomina **conjunto universal** *y se representa por la letra* $\mathscr{U}$. 1.26

Aceptamos la existencia de un conjunto que no tiene elementos. Para concebirlo basta considerar cualquier condición imposible y definir un conjunto como el formado por los elementos que cumplen tal condición; por ejemplo, el conjunto formado por *"las palabras esdrújulas de una sílaba"* no tiene, obviamente, ningún elemento, es decir, es un **conjunto vacío**.

CONJUNTO VACÍO

Se llama **conjunto vacío** *a un conjunto que no tiene elementos. El conjunto vacío se representa por el símbolo* $\emptyset$. 1.27

Puesto que el conjunto vacío no tiene elementos está contenido en cualquier conjunto.

Cualquiera que sea el conjunto A *se cumple* $\emptyset \subset A$. 1.28

EL CONJUNTO DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO

La colección de los subconjuntos de un conjunto dado A está bien definida ya que siempre es posible saber si un conjunto B es o no subconjunto de A. Dicha colección forma el conjunto de las partes de A.

PARTES DE UN CONJUNTO

El **conjunto de las partes** *de un conjunto* A *es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de* A. *Se denota por* $\mathscr{P}(A)$. 1.29

EJEMPLO 1.30 $A_1 = \{a\}$ y $A_2 = \{b\}$ son subconjuntos de $A = \{a,b\}$, pero no son los únicos: A tiene también como subconjuntos al mismo A ($A \subset A$) y al conjunto vacío ($\emptyset \subset A$). Por lo tanto, el conjunto de las partes de A será:

$$\mathscr{P}(A) = \left\{ \{a\}, \{b\}, \emptyset, A \right\}$$

Obsérvese que los elementos del conjunto de las partes son, a su vez, conjuntos. No sería correcto escribir $a \in \mathscr{P}(A)$, lo correcto es $\{a\} \in \mathscr{P}(A)$, puesto que los elementos de $\mathscr{P}(A)$ son conjuntos.

EJEMPLO 1.31 El conjunto $A = \{a,b,c\}$ tiene ocho subconjuntos que son:

un subconjunto de 0 elementos	$\emptyset$
tres subconjuntos de 1 elemento	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$
tres subconjuntos de 2 elementos	$\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$
un subconjunto de 3 elementos	$\{a,b,c\}$



Su conjunto de las partes, $\mathscr{P}(A)$, es:

$$\mathscr{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\Big\}$$

Si el conjunto A tiene n elementos, podemos preguntarnos cuántos elementos tendrá $\mathscr{P}(A)$. Para contarlos, imaginemos que, para formar un subconjunto, ponemos en fila los elementos de A y, elemento a elemento, decidimos si se elige como elemento del subconjunto o no. El primer elemento puede pertenecer a él o no, el segundo puede pertenecer a él o no, etc. Hay,

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ veces}} \quad \text{elecciones posibles}$$

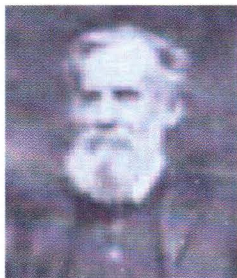
y cada una de las elecciones define un único subconjunto, luego hay 2^n subconjuntos. Cuando no se elige ningún elemento, se forma el subconjunto vacío $\emptyset$, mientras que, cuando se toman todos, se forma el subconjunto A.

NÚMERO DE ELEMENTOS DE $\mathscr{P}(A)$

1.30 ***Si el conjunto A tiene n elementos, el conjunto de las partes de A, $\mathscr{P}(A)$, tiene 2^n elementos.***

EJEMPLO 1.32 Consideremos el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Entonces el conjunto $\mathscr{P}(A)$ tiene $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ elementos.

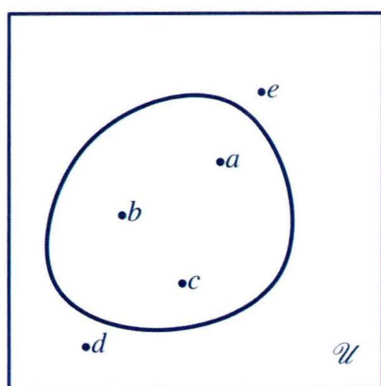
DIAGRAMAS DE VENN

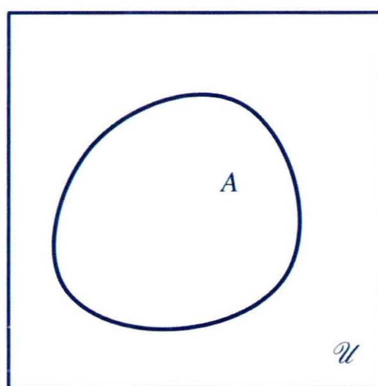


John Venn (1834-1923).

Los conjuntos suelen representarse por medio de unos dibujos denominados **diagramas de Venn**, en honor al lógico inglés John Venn. Se conviene en representar el conjunto universal mediante un rectángulo o un cuadrado; cada conjunto se simboliza por una región de ese cuadrado, limitada por una curva cerrada; la forma y tamaño de la curva es intrascendente. Por ejemplo, si el conjunto universal $\mathscr{U}$ tiene como elementos a, b, c, d y e, esto es $\mathscr{U} = \{a,b,c,d,e\}$ y A es el conjunto $A = \{a,b,c\}$, un diagrama de Venn para representarlo puede ser el que aparece en la figura 1.1(a).

Si se observa bien la figura, se entenderá rápidamente el simbolismo de la representación. La línea marca los límites del conjunto. Cada elemento se representa por un punto. Si el punto es interior debe entenderse que pertenece al conjunto; si es exterior, se entenderá que no pertenece. La línea que delimita al conjunto divide al cuadrado —conjunto universal— en dos regiones: la interior, que representa al conjunto A y la exterior que incluye





(a) (b)

Figura 1.1: La convención de los diagramas de Venn.

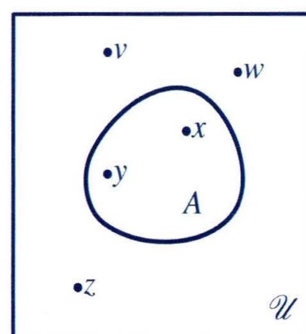


Figura 1.2: Diagrama de Venn del conjunto $A = \{x, y\}$.

los demás elementos que no pertenecen al conjunto A. En la figura 1.1(b) se muestra esa convención general.

EJEMPLO 1.33 Un diagrama de Venn como el de la figura 1.2 informa de que el conjunto A está formado por los elementos x e y, $A = \{x, y\}$, y que no pertenecen a A los elementos v, w y z.

1.2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

De modo similar a como se combinan las proposiciones simples para obtener proposiciones compuestas, los conjuntos pueden ser combinados mediante operaciones que dan lugar a nuevos conjuntos. Estudiamos a continuación las principales operaciones que pueden realizarse con conjuntos.

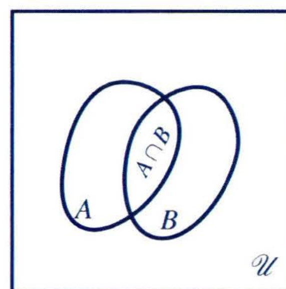


Figura 1.3: Intersección de conjuntos $A \cap B$.

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

*La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto que tiene como elementos los comunes a ambos conjuntos. La intersección de A y B se indica con el símbolo $A \cap B$.* 1.31

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

EJEMPLO 1.34 Si $A = \{a, b, e\}$ y $B = \{a, c, e\}$, el elemento a es común a A y B, pertenece a los dos conjuntos, luego a es un elemento de la intersección. El elemento b no es común puesto que pertenece a A, pero no a B. Del mismo modo se observa

que e es común y que c no lo es. Así, sólo hay dos elementos comunes a A y B que son a y e y el conjunto intersección es $A \cap B = \{a, e\}$

EJEMPLO 1.35 Si E es el conjunto de las palabras *esdrújulas* y T es el conjunto de las palabras *trisílabas* entonces $E \cap T$ es el conjunto de las palabras que son *esdrújulas y trisílabas* a la vez; por ejemplo, *número, máximo, álgebra* $\in E \cap T$.

Cuando dos conjuntos no tienen elementos comunes, su intersección es el conjunto vacío y se denominan **disjuntos**.

CONJUNTOS DISJUNTOS

1.32 *Dos conjuntos A y B son* **disjuntos** *si no tienen elementos comunes, lo que equivale a:*

$$A \cap B = \emptyset.$$

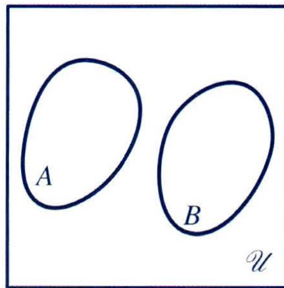


Figura 1.4: Conjuntos disjuntos $A \cap B = \emptyset$.

EJEMPLO 1.36 Los conjuntos $A = \{a, b, e\}$ y $B = \{c, d, f, g\}$ son disjuntos. No hay ningún elemento que pertenezca a A y a B a la vez; entonces $A \cap B = \emptyset$.

EJEMPLO 1.37 Si A es el conjunto de las letras del alfabeto español, los conjuntos $V = \{x \in A \mid x \text{ es vocal}\}$ y $C = \{x \in A \mid x \text{ es consonante}\}$ son disjuntos, es decir, $V \cap C = \emptyset$, puesto que no hay ninguna letra que sea vocal y consonante al mismo tiempo.

UNIÓN DE CONJUNTOS

UNIÓN DE CONJUNTOS

1.33 *La* **unión** *de dos conjuntos A y B es el conjunto que tiene como elementos los que pertenecen a alguno de los conjuntos. La unión de A y B se indica con el símbolo $A \cup B$.*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

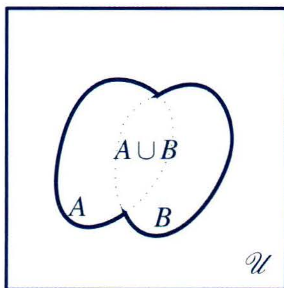


Figura 1.5: Unión de conjuntos $A \cup B$.

EJEMPLO 1.38 Si $A = \{a, b, e\}$ y $B = \{a, c, e\}$, el elemento a pertenece a A y a B, luego a es un elemento de la unión. El elemento b pertenece a A, pero no a B, luego también pertenece a la unión. Del mismo modo, se observa que c y e pertenecen a la unión, por lo tanto $A \cup B = \{a, b, c, e\}$.

EJEMPLO 1.39 Si $A = \{1, 2, 5\}$ y $B = \{1, 5, 6\}$, se tiene $A \cup B = \{1, 2, 5, 6\}$.

COMPLEMENTARIO DE UN CONJUNTO

Como ya se ha señalado, los conjuntos se suelen considerar incluidos en uno mayor $\mathscr{U}$ que se denomina universal. Con referencia a este conjunto universal, para cada conjunto A se define el formado por los elementos que no pertenecen a A.

COMPLEMENTARIO DE UN CONJUNTO

1.34

El **conjunto complementario** *de A está formado por los elementos del conjunto universal que no pertenecen a A. El conjunto complementario de A se representa por A^c.*

$$A^c = \{x \in \mathscr{U} \mid x \notin A\}$$

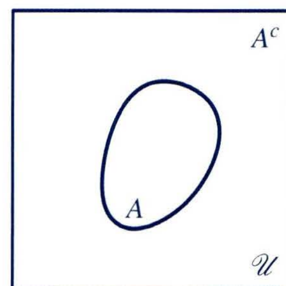


Figura 1.6: Complementario de un conjunto: A^c.

EJEMPLO 1.40 Si se considera el conjunto $A = \{a,b,c\}$ dentro del conjunto universal $\mathscr{U} = \{a,b,c,d,e\}$, el elemento d no pertenece a A, luego pertenece a su complementario A^c. De manera análoga e también pertenece a A^c, mientras que los elementos a, b y c pertenecen a A luego no pertenecen a A^c. Se tiene así: $A^c = \{d,e\}$

EJEMPLO 1.41 Si el conjunto $A = \{a,b,c\}$ se considerase dentro de otro conjunto universal, el complementario respecto del nuevo universal será distinto. Por ejemplo, si el nuevo conjunto universal es $\mathscr{U} = \{a,b,c,d\}$, el conjunto complementario será $A^c = \{d\}$.

EJEMPLO 1.42 Si se considera como conjunto universal el conjunto A de las letras del alfabeto español, el complementario del conjunto $V = \{x \in A \mid x \text{ es vocal}\}$ es el conjunto $C = \{x \in A \mid x \text{ es consonante}\}$, es decir, $V^c = C$.

DIFERENCIA DE DOS CONJUNTOS

DIFERENCIA DE CONJUNTOS

1.35

La **diferencia** *de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B. La diferencia de A y B se representa con el símbolo $A - B$.*

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

EJEMPLO 1.43 Si $A = \{a,b,c,d,e\}$ y $B = \{d,e,f,g\}$ la diferencia de A y B es igual a $A - B = \{a,b,c\}$. Los elementos a, b y c pertenecen a la diferencia porque pertenecen a A y no pertenecen a B.

Notemos que, conforme a la definición de la diferencia, no es lo mismo la diferencia de A y B, que la diferencia de B y A; es decir, en general, se tiene que $A-B \neq B-A$. En realidad, la diferencia no es una operación nueva ya que puede expresarse en términos de la intersección y la complementación. En efecto: los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B son los mismos que pertenecen a A y pertenecen a B^c, es decir, los que pertenecen a la intersección de A con el complementario de B.

1.36 ***La diferencia de dos conjuntos A y B es igual a la intersección de A con el complementario de B.***

$$A-B=A\cap B^c$$

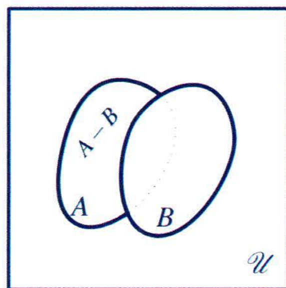


Figura 1.7: Diferencia de conjuntos $A-B$.

EJEMPLO 1.44 Sea el conjunto universal $\mathscr{U}=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ y los conjuntos $A=\{a,b,c,d,e\}$ y $B=\{d,e,f,g\}$. Como hemos visto en el ejemplo anterior $A-B=\{a,b,c\}$. Por otra parte $B^c=\{a,b,c,h,i,j\}$ y por tanto $A\cap B^c=\{a,b,c\}$. Comprobamos entonces que $A-B=A\cap B^c$.

1.2.3 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON CONJUNTOS

Las operaciones con conjuntos cumplen una serie de propiedades generales que son válidas con independencia de los conjuntos que se consideren. Por ejemplo, si $A=\{a,b\}$ y $B=\{b,c\}$ entonces $A\cap B=\{b\}=B\cap A$, es decir, da el mismo resultado hacer la intersección de A con B que la intersección de B con A. Pero esta propiedad se cumple no sólo para los dos conjuntos anteriores sino que es válida para dos conjuntos cualquiera, como podemos comprobar sin más que utilizar la definición de intersección de conjuntos. Vamos a enumerar a continuación algunas de dichas propiedades; en los enunciados A, B C designan de manera genérica a conjuntos referidos a un conjunto universal $\mathscr{U}$, mientras que los paréntesis indican el orden en que hay que efectuar las operaciones.

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN

PROPIEDAD I1

1.37 ***La intersección de cualquier conjunto con el conjunto vacío es igual al conjunto vacío.***

$$A\cap\emptyset=\emptyset$$

Ningún conjunto puede tener elementos en común con el vacío ya que éste no tiene elementos.

PROPIEDAD I2

La intersección de cualquier conjunto con el universal es el mismo conjunto. 1.38

$$A \cap \mathscr{U} = A$$

Todos los elementos de A son elementos del universal, luego son comunes, y sólo los elementos de A pueden ser comunes.

PROPIEDAD I3 (IDEMPOTENCIA)

La intersección de cualquier conjunto consigo mismo es igual al mismo conjunto. 1.39

$$A \cap A = A$$

Es bien simple razonar que así debe ser: el conjunto A tiene en común consigo mismo todos sus elementos y no puede haber otros elementos comunes.

PROPIEDAD I4 (CONMUTATIVA)

La intersección de un conjunto A con otro B es igual a la intersección de B con A. 1.40

$$A \cap B = B \cap A$$

Para demostrar la propiedad conmutativa basta observar que los mismos elementos tendrán A y B en común que B y A.

PROPIEDAD I5 (ASOCIATIVA)

Si se hace la intersección de un conjunto A con un conjunto B y luego se hace la intersección del conjunto resultante con un conjunto C, se obtiene el mismo resultado que si se hace la intersección del conjunto A con el conjunto que resulta de hacer la intersección de B y C. 1.41

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

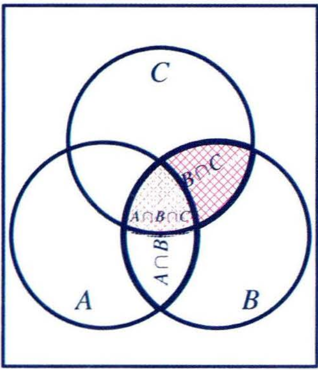


Figura 1.8: Propiedad asociativa de la intersección de conjuntos $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Esta propiedad se demuestra al observar que si se seleccionan primero los elementos comunes de A y B y luego, entre éstos, se seleccionan los elementos comunes con el conjunto C, se obtiene el mismo conjunto que si en primer lugar se seleccionan los elementos comunes de B y C y luego, entre éstos, se seleccionan los elementos comunes con A (figura 1.8).

Si hacemos uso de esta propiedad podemos calcular la intersección de más de dos conjuntos. Así, la intersección $A \cap B \cap C$ puede calcularse asociando los conjuntos que se intersecan: primero se calcula $A \cap B$ y luego se calcula $(A \cap B) \cap C$; o bien, primero se calcula $B \cap C$ y luego se calcula $A \cap (B \cap C)$. En virtud de la propiedad asociativa, se pueden suprimir los

paréntesis:

$$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

Además, en virtud de la propiedad commutativa, el orden en que se hacen las operaciones no es relevante y se tiene:

$$A\cap B\cap C=A\cap C\cap B=B\cap A\cap C=B\cap C\cap A=C\cap A\cap B=C\cap B\cap A$$

EJEMPLO 1.45 Sean $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{b,c,d,e\}$ y $C=\{c,d,e,f\}$; los únicos elementos que pertenecen a los tres conjuntos son c y d; entonces la intersección de los tres conjuntos es $A\cap B\cap C=\{c,d\}$.

PROPIEDAD I6

1.42 *La intersección de dos conjuntos está contenida en cualquiera de los conjuntos que se intersecan.*

$$A\cap B\subset A \;\; y \;\; A\cap B\subset B$$

La razón de esta propiedad es simple: todos los elementos de $A\cap B$ son elementos de A, luego $A\cap B\subset A$. Por igual motivo se tiene $A\cap B\subset B$ (ver figura 1.3).

PROPIEDAD I7

1.43 *Si B está contenido en A, entonces la intersección de A y B es igual a B.*

$$\text{Si } B\subset A, \text{ entonces } A\cap B=B$$

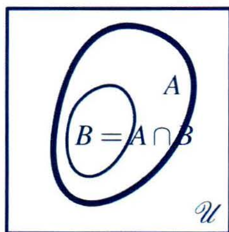


Figura 1.9: Si $B\subset A$ entonces $A\cap B=B$.

La demostración es elemental: si B es un subconjunto de A todos los elementos de B y sólo estos son los comunes a A y B (ver figura 1.9).

PROPIEDADES DE LA UNIÓN

PROPIEDAD U1

1.44 *La unión de cualquier conjunto con el conjunto vacío es igual al conjunto.*

$$A\cup\emptyset=A$$

Puesto que el conjunto vacío no tiene elementos, los únicos elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos que unimos son todos los de A y sólo éstos.

PROPIEDAD U2

La unión de cualquier conjunto con el conjunto universal es igual al conjunto universal. 1.45

$$A \cup \mathscr{U} = \mathscr{U}$$

Todos los elementos pertenecen a alguno de los dos conjuntos ya que, al menos, pertenecen al universal.

PROPIEDAD U3 (IDEMPOTENCIA)

La unión de cualquier conjunto consigo mismo es igual al mismo conjunto. 1.46

$$A \cup A = A$$

Es bien simple razonar que así debe ser: los elementos comunes y los no comunes del conjunto A consigo mismo son todos sus elementos y no puede haber otros.

PROPIEDAD U4 (CONMUTATIVA)

La unión de un conjunto A con otro B es igual a la unión de B con A. 1.47

$$A \cup B = B \cup A$$

Para demostrar la propiedad conmutativa basta observar que los mismos elementos que pertenecen a A o a B son los que pertenecen a B o a A.

PROPIEDAD U5 (ASOCIATIVA)

Si se hace la unión de un conjunto A con un conjunto B y luego se hace la unión del conjunto resultante con un conjunto C, se obtiene el mismo resultado que si se hace la unión del conjunto A con el conjunto que resulta de unir B y C. 1.48

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

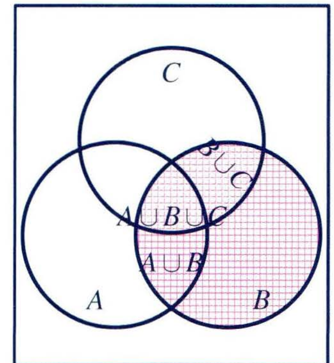


Figura 1.10: Propiedad asociativa de la unión de conjuntos $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Esta propiedad se demuestra al observar que si se seleccionan primero los elementos que están en A o en B y luego se seleccionan los elementos que están en C, se obtiene el mismo conjunto que si en primer lugar se seleccionan los elementos que están en B o en C y luego se seleccionan los elementos que están en A (ver figura 1.10).

Si hacemos uso de esta propiedad podemos calcular la unión de más de dos conjuntos. Así, la unión $A \cup B \cup C$ puede calcularse asociando los conjuntos que se unen: primero se calcula $A \cup B$ y luego se calcula $(A \cup B) \cup C$; o bien, primero se calcula $B \cup C$ y luego $A \cup (B \cup C)$. En virtud de la propiedad asociativa, se pueden suprimir los paréntesis:

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Además, en virtud de la propiedad conmutativa, el orden en que se hacen las operaciones no es relevante y se tiene:

$$A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = B \cup A \cup C = B \cup C \cup A = C \cup A \cup B = C \cup B \cup A$$

EJEMPLO 1.46 Si $A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,c,d\}$ y $C = \{c,d,e\}$, la unión de los tres conjuntos será: $A \cup B \cup C = \{a,b,c,d,e\}$.

PROPIEDAD U6

1.49 *La unión de dos conjuntos contiene a cualquiera de los conjuntos que se unen*

$$A \subset A \cup B, \quad y \quad B \subset A \cup B$$

La razón de esta propiedad es que todos los elementos de A son elementos de $A \cup B$, luego $A \subset A \cup B$. Por igual motivo se tiene $B \subset A \cup B$ (ver figura 1.5).

PROPIEDAD U7

1.50 *Si B está contenido en A, entonces la unión de A y B es igual a A.*

$$\text{Si } B \subset A \text{ entonces } A \cup B = A$$

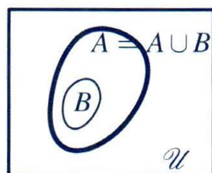


Figura 1.11: Si $B \subset A$ entonces $A \cup B = A$.

La demostración es clara: si B es un subconjunto de A todos los elementos de B están A, por lo que la unión de los dos sólo es A (ver figura 1.11).

PROPIEDADES DE LA COMPLEMENTACIÓN

PROPIEDAD C1

1.51 *El complementario del conjunto vacío es el conjunto universal.*

$$\emptyset^c = \mathscr{U}$$

Como el conjunto vacío no tiene elementos, ningún elemento del conjunto universal puede pertenecer al conjunto vacío.

PROPIEDAD C2

1.52 *El complementario del conjunto universal es el conjunto vacío.*

$$\mathscr{U}^c = \emptyset$$

Como todos los elementos pertenecen al conjunto universal, ningún elemento no pertenece al universal.

PROPIEDAD C3

El complementario del complementario de un conjunto es el mismo conjunto. 1.53

$$(A^c)^c = A$$

Puesto que el complementario de A está formado por los elementos que no pertenecen a A, los elementos que no pertenecen a A^c serán los que pertenecen a A, esto es $(A^c)^c = A$ (ver figura 1.6).

PROPIEDADES QUE RELACIONAN VARIAS OPERACIONES

PROPIEDAD R1

La intersección de un conjunto y su complementario es igual al conjunto vacío. 1.54

$$A \cap A^c = \emptyset$$

No puede haber elementos que pertenezcan a A y a su complementario simultáneamente, puesto que si pertenecen a A^c no pueden pertenecer a A (ver figura 1.6).

PROPIEDAD R2

La unión de un conjunto con su complementario es igual al conjunto universal. 1.55

$$A \cup A^c = \mathcal{U}$$

Puesto que cualquier elemento pertenece a A o pertenece a A^c, todos los elementos pertenecen a alguno de los dos (ver figura 1.6).

PROPIEDAD R3 (PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS)

1.56

- Propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

La demostración de estas propiedades puede razonarse del modo siguiente: los elementos de $A \cap (B \cup C)$ son los comunes de A con todos los que están en B o en C, que son los mismos que los comunes de A y B o bien los comunes de B y C; de modo similar, los elementos de $A \cup (B \cap C)$ son los

elementos de A o los elementos comunes de B y C, que son los mismos que los comunes a los que están en A o B y están en A o C (ver figura 1.12).

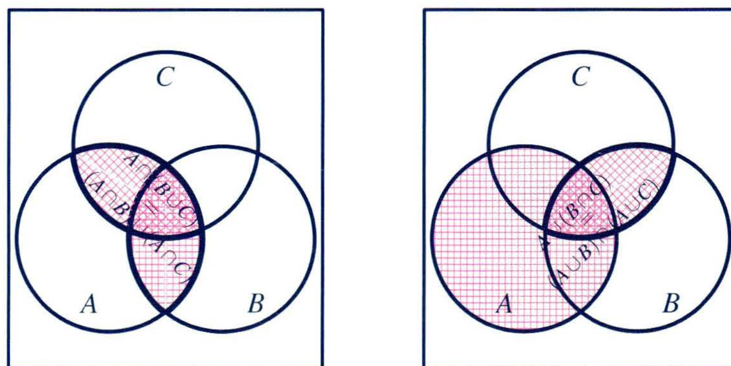


Figura 1.12: Propiedades distributivas.

PROPIEDAD R4
(LEYES DE MORGAN)

1.57

- Primera ley de Morgan: *El complementario de una unión de conjuntos es igual a la intersección de los complementarios de los conjuntos.*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

- Segunda ley de Morgan: *El complementario de una intersección de conjuntos es igual a la unión de los complementarios.*

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

La demostración de esta propiedad es también clara. En el caso de la primera ley, puesto que en $A \cup B$ están los elementos que pertenecen a alguno de los dos conjuntos, los elementos del conjunto $(A \cup B)^c$ son los elementos que no pertenecen a ninguno de los dos conjuntos, es decir, ni pertenecen a A ni pertenecen a B, por tanto pertenecen a A^c y pertenecen a B^c y, por tanto, pertenecen a $A^c \cap B^c$. En el caso de la segunda ley, puesto que en $A \cap B$ están los elementos que pertenecen simultáneamente a los dos conjuntos, los elementos de $(A \cap B)^c$ son los que no pertenecen simultáneamente a los dos, es decir, o bien no pertenecen a A o bien no pertenecen a B y, por tanto, o bien pertenecen a A^c o bien pertenecen a B^c, por lo que pertenecen a $A^c \cup B^c$ (ver figura 1.13).

Todas las propiedades anteriores, especialmente las propiedades distri-

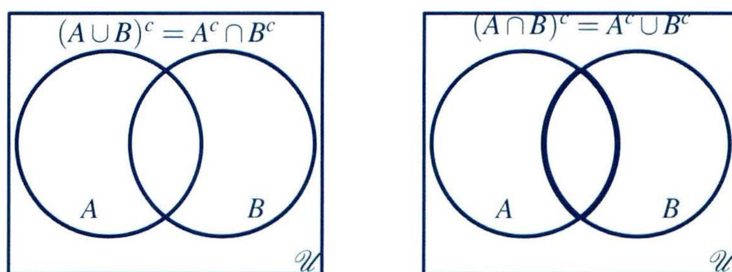


Figura 1.13: Leyes de Morgan

butivas y las leyes de Morgan, son muy útiles para efectuar cálculos con conjuntos y simplificar expresiones en las que intervienen diversas operaciones de conjuntos. A continuación se muestran algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.47 La expresión $(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ puede simplificarse. Por la primera propiedad distributiva, se tiene

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap (B \cup B^c)$$

pero $B \cup B^c = \mathscr{U}$, por lo tanto

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap (B \cup B^c) = A \cap \mathscr{U} = A$$

EJEMPLO 1.48 La expresión $\Big((A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\Big)^c$ puede simplificarse. Por la primera ley de Morgan, se tiene

$$\Big((A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\Big)^c = (A \cap B)^c \cap (A^c \cap B^c)^c$$

y, por la segunda ley de Morgan, se tienen

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c = A \cup B$$

luego

$$\Big((A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\Big)^c = (A^c \cup B^c) \cap (A \cup B)$$

Ahora bien, por la propiedad distributiva

$$\begin{aligned}(A^c \cup B^c) \cap (A \cup B) &= \Big(A^c \cap (A \cup B)\Big) \cup \Big(B^c \cap (A \cup B)\Big)\\ &= (A^c \cap A) \cup (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A) \cup (B^c \cap B)\end{aligned}$$

Puesto que $A^c \cap A = \emptyset$ y $B^c \cap B = \emptyset$ resulta

$$\begin{aligned}(A^c \cup B^c) \cap (A \cup B) &= \emptyset \cup (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A) \cup \emptyset \\ &= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A) \\ &= (B - A) \cup (A - B)\end{aligned}$$

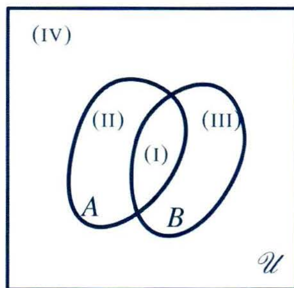
DESCOMPOSICIÓN DE LA UNIÓN DE DOS CONJUNTOS

Vemos a continuación una expresión particularmente interesante, que permite descomponer la unión de dos conjuntos A y B como unión de subconjuntos disjuntos.

1.58

Dados dos conjuntos cualesquiera A y B se cumple

$$\begin{aligned}A \cup B &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \\ &= (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)\end{aligned}$$



REGIÓN	CONJUNTO
(I)	$A \cap B$
(II)	$A \cap B^c$
(III)	$A^c \cap B$
(IV)	$(A \cup B)^c$

Figura 1.14: Descomposición de la unión de dos conjuntos.

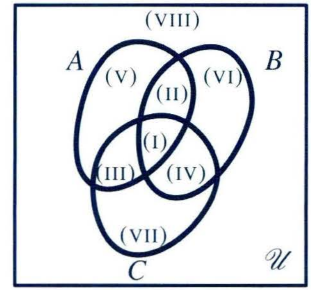
La figura 1.14 ilustra el resultado. La segunda igualdad es inmediata porque $(A \cap B^c) = A - B$ y $(A^c \cap B) = B - A$. La primera igualdad se demuestra a partir de las propiedades de las operaciones con conjuntos.

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) &= [(A \cap B) \cup (A \cap B^c)] \cup (A^c \cap B) \\ &= [A \cap (B \cup B^c)] \cup (A^c \cap B) && \text{(Prop. R3)} \\ &= (A \cap \mathscr{U}) \cup (A^c \cap B) && \text{(Prop. R2)} \\ &= A \cup (A^c \cap B) && \text{(Prop. I3)} \\ &= (A \cup A^c) \cap (A \cup B) && \text{(Prop. R3)} \\ &= \mathscr{U} \cap (A \cup B) && \text{(Prop. R2)} \\ &= (A \cup B) && \text{(Prop. I3)}\end{aligned}$$

También es sencillo comprobar que los conjuntos que forman la expresión

son disjuntos. En efecto:

$$
\begin{aligned}
(A\cap B)\cap(A\cap B^c) &= A\cap(B\cap A)\cap B^c && \text{(Prop. I5)}\\
&= A\cap(A\cap B)\cap B^c && \text{(Prop. I4)}\\
&= (A\cap A)\cap(B\cap B^c) && \text{(Prop. I5)}\\
&= A\cap\emptyset && \text{(Prop. I3, R1)}\\
&= \emptyset && \text{(Prop. I1)}\\
(A\cap B)\cap(A^c\cap B) &= A\cap(B\cap A^c)\cap B && \text{(Prop. I5)}\\
&= A\cap(A^c\cap B)\cap B && \text{(Prop. I4)}\\
&= (A\cap A^c)\cap(B\cap B) && \text{(Prop. I5)}\\
&= \emptyset\cap B && \text{(Prop. R1, I3)}\\
&= \emptyset && \text{(Prop. I1)}\\
(A\cap B^c)\cap(A^c\cap B) &= A\cap(B^c\cap A^c)\cap B && \text{(Prop. I5)}\\
&= A\cap(A^c\cap B^c)\cap B && \text{(Prop. I4)}\\
&= (A\cap A^c)\cap(B^c\cap B) && \text{(Prop. I5)}\\
&= \emptyset\cap\emptyset && \text{(Prop. I1)}\\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$



REGIÓN	CONJUNTO
(I)	$A\cap B\cap C$
(II)	$A\cap B\cap C^c$
(III)	$A\cap B^c\cap C$
(IV)	$A^c\cap B\cap C$
(V)	$A\cap B^c\cap C^c$
(VI)	$A^c\cap B\cap C^c$
(VII)	$A^c\cap B^c\cap C$
(VIII)	$(A\cup B\cup C)^c$

Figura 1.15: Descomposición de la unión de tres conjuntos.

Se puede obtener una expresión similar para descomponer la unión de tres conjuntos en subconjuntos disjuntos. La configuración más general que pueden presentar tres conjuntos A, B y C tiene ocho regiones, ya que un elemento cualquiera del espacio universal puede pertenecer o no a A, pertenecer o no a B y pertenecer o no a C. En total $2\times2\times2=8$ posibilidades que aparecen representadas en la figura 1.15. Puede observarse que la unión de todas las regiones menos la (VIII) es igual a la unión $A\cup B\cup C$, lo que permite descomponer dicha unión en conjuntos disjuntos.

DESCOMPOSICIÓN DE LA UNIÓN DE TRES CONJUNTOS

Dados tres conjuntos cualesquiera A, B y C se cumple (1.59)

$$
\begin{aligned}
A\cup B\cup C = &(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)\\
&\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)
\end{aligned}
$$

1.3 APLICACIONES

1.3.1 EL CONCEPTO DE APLICACIÓN

Las aplicaciones son el patrón que utilizan las Matemáticas para sintetizar aquello que tienen en común muchas transformaciones que se pueden observar en diferentes disciplinas científicas. Una transformación es un proceso que convierte objetos de una clase en objetos de otra clase. Por ejemplo, supongamos que se exponen al sol una tez blanca y un muñeco de nieve. Al cabo de un cierto tiempo observamos que la tez se ha bronceado y en el lugar del muñeco se encuentra una masa informe de nieve. Este simple experimento muestra la esencia del concepto de transformación: la exposición al sol cambia la tez blanca en tez bronceada y el muñeco de nieve en un montón de nieve amorfo. Si se pretende explicar cómo actúa la transformación *"exposición al sol"* sobre estos objetos, se tiene la tentación de decir que convierte el conjunto $A = \{\text{blanco}, \text{muñeco}\}$ en el conjunto $B = \{\text{bronceado}, \text{montón}\}$ Pero inmediatamente se comprende que no basta esa descripción para determinar completamente la transformación. No basta con saber cuál es el conjunto de objetos sobre el que actúa la transformación y el conjunto que resulta. Si se procede así, sólo se sabrá qué objetos había antes y qué objetos hay después, pero resultará imposible averiguar en qué se transforma cada uno de los objetos originales. La esencia de una transformación, lo que permite describirla sin ambigüedad, es una conjunción de dos informaciones: la composición de los estados inicial y final, dos conjuntos, y una descripción que permita saber en qué objetos se convierte cada uno de los objetos del estado inicial. Todo eso puede hacerse, de manera muy expresiva, mediante una gráfica. Por ejemplo, para describir la transformación *"exposición al sol"*, puede dibujarse el esquema:

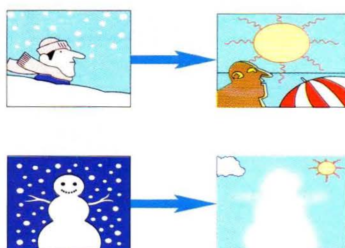


Figura 1.16: La esencia de la transformación *"exposición al sol"*.

EXPOSICIÓN AL SOL		
Blanco	$\longrightarrow$	Bronceado
Muñeco	$\longrightarrow$	Montón

que describe el cambio de cada uno de los objetos que se tenían. Así pues, una transformación es un cambio de estados u objetos en otros, de suerte que cada estado u objeto inicial se convierte en otro estado u objeto por la acción de la transformación. Para definir una transformación es preciso indicar los estados u objetos iniciales, que hay antes de la transformación, los estados u objetos finales, que hay después de la transformación, e indicar a dónde conduce la transformación, cuando se aplica a cada uno de los estados u objetos iniciales.

En Matemáticas, se reserva el nombre de **aplicaciones** a una clase especial de transformaciones.

APLICACIÓN

*Una **aplicación** entre dos conjuntos A y B es una trasformación que convierte cada elemento del conjunto A en un único elemento del conjunto B.* 1.60

- *El conjunto A se llama **conjunto inicial** o **dominio** de la aplicación.*
- *El conjunto B se llama **conjunto final** o **rango** de la aplicación.*
- *Las aplicaciones se suelen designar por las letras f, g, h, o sus mayúsculas y se acostumbran a representar por:*

$$f\colon A \mapsto B \qquad \text{o bien por} \qquad A \xrightarrow{f} B$$

- *Si el elemento $x \in A$ se transforma en el elemento $y \in B$ se escribe*

$$y = f(x)$$

*y se dice que y es la **imagen** de x mediante la aplicación f o también que a x le **corresponde** y; también se dice que x es una **preimagen** de y.*

$$\begin{array}{ccccc} & A & 1 & 2 & 3 & 4 \\ f & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & B & 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}$$

Figura 1.17: Representación de una aplicación $f\colon A \mapsto B$.

Para que la aplicación esté plenamente definida es preciso indicar en qué elemento del conjunto final se convierte cada elemento del conjunto inicial. Esto se puede conseguir mediante diagramas o gráficos. Por ejemplo, si A y B son los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y la transformación consiste en multiplicar por 2 cada número del conjunto inicial, se tendrá la aplicación $f\colon A \mapsto B$, definida por el diagrama de la figura 1.17. En este diagrama, la fila superior indica los elementos del conjunto inicial, la fila inferior los elementos del conjunto final y las flechas señalan el transformado de cada elemento del conjunto inicial. Por ejemplo, en la aplicación anterior, el elemento 1 se aplica o se transforma en 2, el elemento 3 se transforma en 6, etc.; decimos que 2 es la *imagen* de 1 por la aplicación, que 1 es una *preimagen* de 2, o que a 4 le *corresponde* 8.

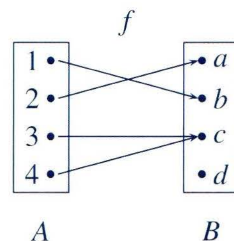


Figura 1.18: Representación de una aplicación $f\colon A \mapsto B$ como diagrama de flechas.

Otro método gráfico para definir aplicaciones consiste en emplear diagramas como el que aparece en la figura 1.18. La representación es fácilmente comprensible. Los conjuntos inicial y final se han representado mediante recuadros, cuya forma es intrascendente, y las flechas señalan el

transformado de cada uno de los elementos del conjunto original. Por ejemplo, la aplicación de la figura 1.18 transforma 1 en b, 2 en a, 3 en c y 4 en c. El elemento d del conjunto final no tiene ninguna preimagen —no es el transformado de ningún elemento de A—, a pesar de lo cual la transformación es aplicación puesto que todos los elementos de A tienen imagen y solamente una imagen.

No cuesta mucho comprender que este tipo de diagramas sólo son útiles cuando el número de elementos de los conjuntos que intervienen es pequeño, en otro caso, la figura puede convertirse en una maraña de flechas. Por ello, es preciso disponer de una definición exclusivamente simbólica. La convención que se adopta es dar una lista con las imágenes de cada elemento del conjunto inicial. Como hemos visto, se acostumbra a representar la imagen de un elemento, por ejemplo 1, con el símbolo $f(1)$. Así, para la aplicación f de la figura 1.18, se tienen:

$$f(1) = b,\ f(2) = a,\ f(3) = c,\ f(4) = c$$

Esta serie de igualdades constituye otro modo de definir la aplicación sin recurrir a diagramas.

EJEMPLO 1.49 La transformación que aparece en la figura 1.19 es aplicación, puesto que cada uno de los elementos del conjunto inicial A tiene una única imagen. Con símbolos, la aplicación $f\colon A \mapsto B$ se define mediante la lista:

$$f(1) = b \qquad f(2) = a \qquad f(3) = b \qquad f(4) = c$$

es decir, b es la imagen de 1 y de 3, a es la imagen de 2 y c es la imagen de 4.

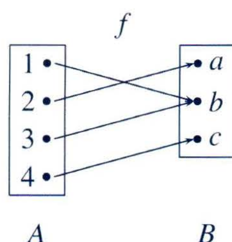


Figura 1.19: Una aplicación $f\colon A \mapsto B$ definida mediante un diagrama de flechas.

EJEMPLO 1.50

a) La transformación descrita por el diagrama de la figura 1.20 (a) no es aplicación, puesto que el elemento c del conjunto inicial tiene dos imágenes.

b) La transformación descrita por el diagrama de la figura 1.20 (b) no es aplicación, puesto que el elemento 3 del conjunto inicial no tiene imagen.

Si el número de elementos del conjunto inicial de una aplicación es muy grande, ninguno de los procedimientos anteriores es útil para definirla. En esta situación es necesario encontrar una fórmula verbal, o regla, que permita determinar sin ambigüedad cómo se encuentra la imagen de cada elemento del conjunto inicial.

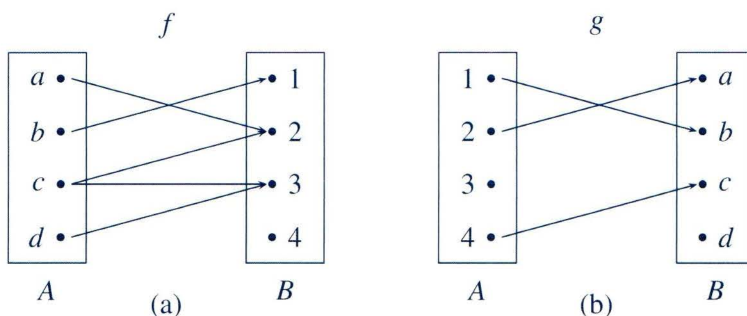


Figura 1.20: Transformaciones que no son aplicaciones.

EJEMPLO 1.51 Si A es el conjunto de los municipios españoles y B es el conjunto de las provincias españolas, entonces la expresión *"hacer corresponder a cada municipio $a \in A$ la provincia $f(a) \in B$ a la cual pertenece´´* define una aplicación $f : A \mapsto B$, puesto que todos los elementos de A tienen una, y una sola, imagen en B y dicha imagen puede encontrarse sin ambigüedad; por ejemplo f('Gijón') = 'Asturias' y f('Ponferrada') = 'León'.

1.3.2 IMAGEN E IMAGEN INVERSA DE UN SUBCONJUNTO

La noción de imagen de un elemento, establecida en el apartado anterior, se extiende a los subconjuntos del conjunto inicial.

IMAGEN DE UN SUBCONJUNTO

1.61

Sea f: $A \mapsto B$ una aplicación y $C \subset A$. Se denomina **imagen del subconjunto** *C al conjunto de las imágenes de los elementos de C. La imagen de C se representa por $f(C)$.*

$$f(C) = \{f(x) \in B \mid x \in C\} \subset B$$

Conviene tener presente que la imagen de un elemento a del conjunto inicial es un elemento, $f(a)$, del conjunto final, mientras que la imagen de un subconjunto C del conjunto inicial es un subconjunto, $f(C)$, del conjunto final.

EJEMPLO 1.52 En la aplicación definida por el diagrama de la figura 1.19, la imagen del subconjunto $C = \{1,2,3\} \subset A$ es igual a $f(C) = \{a,b\} \subset B$ puesto que la imagen de 1 y de 3 es b y la imagen de 2 es a. De manera semejante, la imagen del subconjunto $D = \{3,4\}$ es igual al subconjunto $\{b,c\}$ del conjunto final.

Como se ha señalado, si $f(x) = y$, se dice que x es una preimagen de y. Obsérvese que se dice *una* preimagen, ya que no se puede descartar

que haya otros elementos de A que se transformen en y. Este concepto se extiende a subconjuntos.

IMAGEN INVERSA

1.62

Sea $f\colon A \mapsto B$ una aplicación y $D \subset B$. Se denomina **imagen inversa** *o* **imagen recíproca** *del subconjunto D, al subconjunto de A formado por las preimágenes de los elementos de D, es decir, el conjunto de los elementos de A que se transforman en elementos de D. La imagen inversa de D se representa por $f^{-1}(D)$.*

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\} \subset A$$

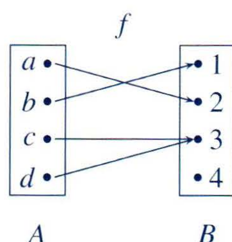


Figura 1.21: Una aplicación $f\colon A \mapsto B$.

EJEMPLO 1.53 Si $f\colon A \mapsto B$ es la aplicación definida por el diagrama de la figura 1.21, se tendrá que la imagen inversa del subconjunto $C = \{1,3\} \subset B$ es igual a $f^{-1}(C) = \{b,c,d\} \subset A$ puesto que b se transforma en $1 \in C$, c se transforma en $3 \in C$, d se transforma en $3 \in C$, y el elemento restante de A se transforma en un elemento que no pertenece a C. De manera análoga, si $D = \{3\}$ y $E = \{2,4\}$, se cumplen: $f^{-1}(D) = \{c,d\}$, $f^{-1}(E) = \{a\}$.

Puede ocurrir que algún elemento del conjunto final no tenga preimágenes en A. Por consiguiente, la imagen inversa de algún subconjunto de B puede ser el conjunto vacío.

EJEMPLO 1.54 En la aplicación definida por el diagrama de la figura 1.21, la imagen inversa del subconjunto $S = \{4\}$ es el conjunto vacío. Como 4 no tiene ninguna preimagen en A, se tiene $f^{-1}(S) = \emptyset$.

Naturalmente, la imagen inversa del conjunto final siempre es el conjunto inicial, puesto que en una aplicación todos los elementos del conjunto inicial tienen una imagen.

1.63

Sea $f\colon A \mapsto B$ una aplicación; la imagen inversa del conjunto final B es el conjunto inicial A:

$$f^{-1}(B) = A$$

1.3.3 TIPOS DE APLICACIONES

Algunas aplicaciones presentan características particulares que permiten darles un nombre especial.

APLICACIÓN
INYECTIVA

Una aplicación $f\colon A \mapsto B$ es **inyectiva** *si cada par de elementos x, y, $x \neq y$, del conjunto inicial A tienen imágenes $f(x)$ y $f(y)$ distintas, $f(x) \neq f(y)$.* 1.64

Dicho de otra manera, una aplicación es inyectiva si ningún elemento de B es imagen de dos elementos diferentes de A. Cuando la aplicación es inyectiva, un elemento de B puede ser o no ser imagen de uno de A, pero en caso de serlo, lo es a lo sumo de un único elemento de A. En los diagramas de flechas es sencillo reconocer si una aplicación es inyectiva: basta comprobar que a ningún elemento de B le llegan dos flechas.

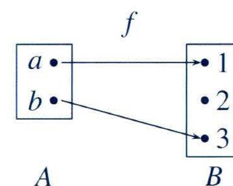


Figura 1.22: Una aplicación inyectiva.

EJEMPLO 1.55 La aplicación definida por el diagrama de la figura 1.22 es inyectiva, puesto que todos los elementos del dominio de la aplicación tienen imágenes diferentes. Hay que resaltar que para que una aplicación sea inyectiva no es necesario que todos los elementos del rango de la aplicación sean imágenes de algún elemento del conjunto origen.

EJEMPLO 1.56 La aplicación definida en el diagrama de la figura 1.21 no es inyectiva porque hay dos elementos diferentes de A, c y d, que tienen la misma imagen en B: el elemento 3.

APLICACIÓN
SOBREYECTIVA

Una aplicación $f\colon A \mapsto B$ es **sobreyectiva** *si para cada elemento y del conjunto final B hay algún elemento x del conjunto inicial, tal que $f(x) = y$.* 1.65

Para saber si una aplicación es sobreyectiva basta comprobar que todos los elementos del conjunto final son imagen de algún elemento del conjunto inicial. En un diagrama de flechas se reconoce fácilmente, pues no hay más que mirar si a todos los elemento del conjunto final llega por lo menos una flecha, si bien no importa que llegue más de una.

EJEMPLO 1.57 La aplicación $f\colon \{1,2,3\} \mapsto \{a,b\}$, definida por: $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = b$ es sobreyectiva ya que a tiene dos preimágenes, 1 y 2 y b tiene una preimagen, 3.

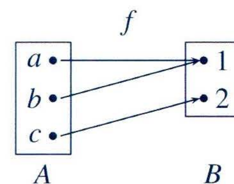


Figura 1.23: Una aplicación sobreyectiva.

EJEMPLO 1.58 La aplicación definida en el diagrama de la figura 1.23 es sobreyectiva ya que todos los elementos de $B = \{1,2\}$ son imagen de alguno de A. Sin embargo, no es inyectiva, ya que el elemento $1 \in B$ es imagen de dos elementos diferentes a,b pertenecientes a A.

EJEMPLO 1.59 La aplicación definida por el diagrama de la figura 1.22 no es sobreyectiva porque el elemento $2 \in B$ no es imagen de ningún elemento de A.

Como hemos visto en los ejemplos anteriores una aplicación puede ser inyectiva y no ser sobreyectiva y recíprocamente, puede ser sobreyectiva pero no ser inyectiva. Cuando una aplicación es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva recibe un nombre especial.

APLICACIÓN BIYECTIVA

1.66 *Una aplicación $f\colon A \mapsto B$ es* **biyectiva** *si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.*

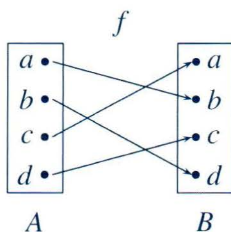


Figura 1.24: Una aplicación biyectiva.

EJEMPLO 1.60 La aplicación $f\colon A \mapsto B$ definida por el diagrama de la figura 1.24, es inyectiva puesto que no hay dos elementos del conjunto inicial que tengan la misma imagen. También es sobreyectiva, porque todos los elementos del conjunto final son imagen de algún elemento del inicial. Por tanto la aplicación es biyectiva.

EJEMPLO 1.61 La aplicación $f\colon \{0,1\} \mapsto \{0,1\}$, definida por:

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0$$

es inyectiva puesto que $f(0) \neq f(1)$; también es sobreyectiva, puesto que cada elemento del conjunto final tiene alguna preimagen. Por lo tanto, es biyectiva.

Como se ha dicho anteriormente, no debe pensarse que las aplicaciones que no son inyectivas serán sobreyectivas y, al revés, que las aplicaciones que no son sobreyectivas serán inyectivas. Todavía más, hay aplicaciones que no son ni inyectivas ni sobreyectivas. En la figura 1.25 se muestran varias de las posibilidades que pueden presentarse. Así, la aplicación f es sobreyectiva pero no inyectiva, la aplicación g es inyectiva pero no sobreyectiva, la aplicación h es inyectiva y sobreyectiva, y por tanto biyectiva, y la aplicación i no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

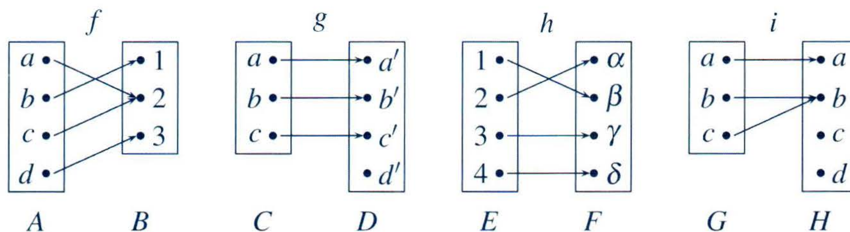


Figura 1.25: Diferentes tipos de aplicaciones.

1.3.4 COMPOSICIÓN DE APLICACIONES

En ciertas condiciones, las transformaciones pueden aplicarse de manera sucesiva. El proceso que transforma el grano de trigo en pan puede ser descompuesto en diversas transformaciones: molienda, tamizado, moldeado, cocción, etc. Resulta así, que ciertas transformaciones pueden entenderse como el resultado de la aplicación sucesiva de otras, de modo que el resultado de una transformación pasa a ser el objeto inicial sobre el que actúa otra. Esta idea de encadenamiento de transformaciones da lugar a la operación matemática característica de las aplicaciones: la **composición**.

Si se consideran dos aplicaciones, $f\colon A \mapsto B$ y $g\colon B \mapsto C$, tales que el conjunto final de f es igual al conjunto inicial de g, tiene sentido preguntarse que pasará si f y g operan de manera sucesiva: primero opera f que convierte los elementos de A en elementos de B y, luego, opera g sobre los elementos de B que produjo f convirtiéndolos en elementos de C.

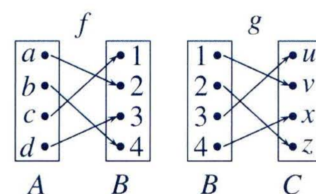


Figura 1.26: Dos aplicaciones que pueden componerse.

Para fijar ideas, consideremos las aplicaciones f y g definidas en el diagrama de la figura 1.26; la aplicación f opera sobre el elemento a del conjunto A y lo transforma en 2; a continuación, opera g sobre 2 y lo convierte en z. Este proceso en dos pasos:

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{f} & 2 & \xrightarrow{g} & z \\ b & \xrightarrow{f} & 4 & \xrightarrow{g} & x \\ c & \xrightarrow{f} & 1 & \xrightarrow{g} & v \\ d & \xrightarrow{f} & 3 & \xrightarrow{g} & u \end{array}$$

puede entenderse como *una* única aplicación que convierte el elemento a de A en el elemento z de C. Esa nueva transformación, que podemos llamar h, tendrá como conjunto inicial A y como conjunto final C, $h\colon A \mapsto C$, y estará definida por las igualdades

$$\begin{array}{ll} h(a) = z, & h(b) = x \\ h(c) = v, & h(d) = u \end{array}$$

El diagrama (a) de la figura 1.27 representa las transformaciones f y g concatenadas, mientras que el diagrama (b) representa la transformación $h\colon A \mapsto C$ que equivale a la concatenación o **composición** de ambas.

COMPOSICIÓN DE APLICACIONES

1.67 *Sean $f\colon A \mapsto B$ y $g\colon B \mapsto C$ dos aplicaciones. La aplicación $h\colon A \mapsto C$ que resume el efecto de aplicar f al conjunto A y, después, aplicar g al conjunto B se llama la* **composición** *de las aplicaciones f y g. Se escribe: $h = g \circ f$ y se lee "h* es igual a f **compuesta con** g".

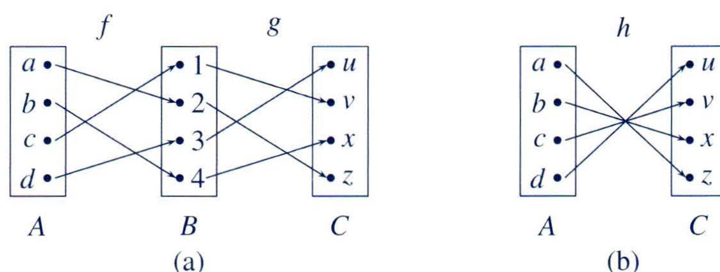


Figura 1.27: Composición de dos aplicaciones.

Notemos que la composición de aplicaciones se escribe $g \circ f$, colocando a la derecha la aplicación que opera primero. Esta convención es muy útil, puesto que si se quiere hallar el transformado de un elemento por la aplicación h se calculará:

$$h(a) = (g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big) = g(2) = z$$

Si se siguen, paso a paso, las igualdades anteriores, se tendrá una buena descripción de las transformaciones sucesivas. Por ejemplo, para calcular el transformado de a por la composición, $h(a) = (g \circ f)(a)$, primero opera f sobre a, transformándolo en 2, $h(a) = g\big(f(a)\big) = g(2)$ y, luego, opera g sobre el resultado de la aplicación f, $h(a) = g(2) = z$ lo que produce el transformado por h del elemento a. De manera análoga, el transformado de b se calcula:

$$h(b) = (g \circ f)(b) = g\big(f(b)\big) = g(4) = x$$

Debe notarse que el orden en que se componen las aplicaciones es crucial. En general, no es lo mismo componer f con g, es decir, operar primero con f y luego con g, lo que origina la composición $g \circ f$, que componer g con f, es decir, operar primero con g y después con f, lo que origina la composición $f \circ g$. En términos matemáticos, se dice que la composición de aplicaciones no es conmutativa. También debe notarse que, para que sea posible calcular la composición $g \circ f$, es preciso que el conjunto final de f coincida con el inicial de g; en otro caso no es posible componerlas.

EJEMPLO 1.62 Si A, B y C son los conjuntos $A = \{0,1\}$, $B = \{3,4\}$, $C = \{5,6\}$ y f y g son las aplicaciones: $f\colon A \mapsto B$, $g\colon B \mapsto C$, definidas por

$$\begin{aligned} f(0) &= 4, \qquad & f(1) &= 3 \\ g(3) &= 5, \qquad & g(4) &= 6 \end{aligned}$$

la aplicación compuesta $h = g \circ f$ está definida, puesto que el conjunto final de f coincide con el inicial de g; además se tienen:

$$h(0) = (g \circ f)(0) = g\big(f(0)\big) = g(4) = 6$$

$$h(1) = (g \circ f)(1) = g\big(f(1)\big) = g(3) = 5$$

Luego h queda definida por $h\colon A \mapsto C$ y $h(0) = 6$, $h(1) = 5$. Notemos que, en este caso, la aplicación $g \circ f$ está definida, pero $f \circ g$ no lo está.

1.4 CARDINAL DE UN CONJUNTO

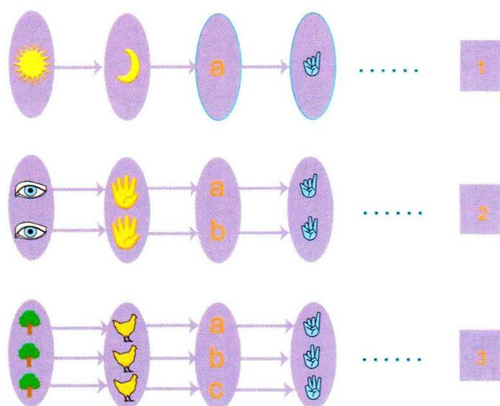


Figura 1.28: Cardinal de un conjunto.

Dados dos conjuntos cualesquiera no siempre es posible establecer entre ellos una aplicación biyectiva. Por ejemplo, entre los conjuntos $A = \{1,2\}$ y $B = \{a\}$, la única aplicación $f : A \mapsto B$ que se puede establecer es la aplicación definida por $f(1) = a$, $f(2) = a$. Evidentemente, esta aplicación no es inyectiva y por tanto no es biyectiva. Sin embargo, entre los conjuntos $A = \{1,2\}$ y $C = \{a,b\}$, es sencillo definir una aplicación que sea biyectiva; por ejemplo, $g(a) = 1$ y $g(b) = 2$.

Como se puede observar en la figura 1.28, para que sea posible establecer una aplicación biyectiva entre dos conjuntos, es necesario que por cada elemento del conjunto original haya uno diferente en el conjunto final que sea su imagen y, recíprocamente, por cada elemento del conjunto final haya uno diferente en el conjunto original que sea su preimagen. Es decir, para que entre dos conjuntos se pueda establecer una aplicación biyectiva, ambos tienen que tener algo en común: el *número* de sus elementos. Esta característica común es compartida por todos aquellos conjuntos entre los cuales se puede establecer una aplicación biyectiva y se denomina **cardinal** del conjunto.

CARDINAL DE UN CONJUNTO

1.68

- *El* **cardinal** *de un conjunto A es su número de elementos y se representa por $\#(A)$.*
- *El cardinal de A, $\#A$, representa una característica propia de todos los conjuntos A tales que puede establecerse una aplicación biyectiva entre ellos y el conjunto $\{1,2,\ldots,\#(A)\}$.*

EJEMPLO 1.63 El conjunto $A = \{a,b,c,d\}$ tiene cuatro elementos, por lo tanto, $\#(A) = 4$.

EJEMPLO 1.64 El conjunto vacío no tiene elementos, por lo tanto, tiene *cero* elementos y $\#(\emptyset) = 0$.

Así pues, el cardinal de un conjunto se halla contando cuántos elementos tiene. Si el conjunto tiene pocos elementos y están ordenados por algún criterio, contarlos es fácil. Cuando tiene muchos o no presentan ninguna

ordenación aparente, el problema puede ser muy difícil. En este capítulo se analizará el comportamiento del cardinal frente a las operaciones de los conjuntos; más adelante se podrán encontrar métodos para contar de manera inteligente los elementos de un conjunto.

1.4.1 CÁLCULO DE CARDINALES CON DOS CONJUNTOS

Sean A y B los conjuntos $A = \{a,b,c\}$, $B = \{y,z\}$ representados en la figura 1.29. Notemos que son disjuntos y que $\#A = 3$, $\#B = 2$. Consideremos la unión, $A \cup B = \{a,b,c,y,z\}$; se tiene $\#(A \cup B) = 5$, de forma que $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) = 3 + 2$; podemos concluir que si los conjuntos A y B no tienen elementos en común, entre A y B juntos tendrán tantos elementos como indique la *suma* del número de elementos de A y de B. Observamos entonces la relación que existe entre la operación con conjuntos que denominamos *unión* y la operación con cardinales que denominamos *suma*.

CARDINAL DE LA UNIÓN DE CONJUNTOS DISJUNTOS

1.69

Si dos conjuntos A y B son disjuntos, el cardinal de la unión es igual a la suma de los cardinales.

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ entonces } \#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$$

En general, cuando A y B son dos conjuntos cualesquiera no se cumple la relación anterior, sino que el cardinal de la unión es inferior a la suma de los cardinales. El motivo es fácil de entender: si los conjuntos tienen elementos en común, cuando sumamos los cardinales de A y de B estamos contando *dos veces* los elementos comunes —una vez como elementos de A y otra como elementos de B—, sin embargo en la unión aparecen una sola vez, por lo que al calcular el cardinal de la unión, estos elementos debemos contarlos sólo una vez. Por ejemplo, si $A = \{a,b,c,d,e\}$ y $B = \{d,e,f\}$, entonces $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\}$. El balance de contar el número de elementos de cada conjunto es:

elementos de A	a	b	c	d	e		$\#(A) = 5$
elementos de B				d	e	f	$\#(B) = 3$
elementos de $A \cup B$	a	b	c	d	e	f	$\#(A \cup B) = 6$

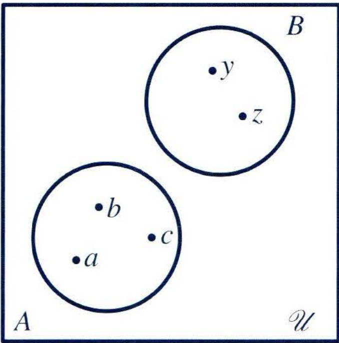


Figura 1.29: Si A y B son disjuntos $\#(A \cup B) = \#A + \#B = 3+2=5$.

Al contar los elementos de A se cuentan una vez los elementos comunes d y e y al contar los elementos de B se cuentan de nuevo. Ahora bien, los elementos comunes forman el conjunto intersección, $A \cap B = \{d,e\}$, y su



número es el cardinal de la intersección $\#(A \cap B) = 2$. Entonces para calcular el cardinal de la unión hay que descontar de la suma de los cardinales de A y B los elementos que se han contado dos veces, es decir, hay que descontar el cardinal de la intersección. Tenemos así la expresión

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

fórmula que tiene validez general y permite calcular el cardinal de la unión.

CARDINAL DE LA UNIÓN DE CONJUNTOS

1.70 *Si A y B son dos conjuntos, siempre se cumple que el cardinal de su unión $A \cup B$ es igual al cardinal de A más el cardinal de B menos el cardinal de la intersección $A \cap B$.*

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

EJEMPLO 1.65 Si $\#(A \cup B) = 15$, $\#(A) = 10$ y $\#(B) = 9$, se tiene:

$$\#(A \cap B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cup B) = 10 + 9 - 15 = 4$$

La fórmula del cardenal de la unión puede razonarse de otra manera. En la página 44 vimos que la unión de dos conjuntos puede expresarse como unión de tres conjuntos disjuntos:

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$$

Esta descomposición significa que los elementos de la unión de A y B o son elementos que pertenecen a A y no a B —elementos de $(A - B)$—, o son elementos que pertenecen a B y no a A —elementos de $(B - A)$—, o son elementos comunes a A y B —elementos de $A \cap B$—. Además, estas categorías son excluyentes porque no puede haber un elemento que pertenezca a dos de ellas al mismo tiempo. Por consiguiente

$$\#(A \cup B) = \#(A - B) + \#(B - A) + \#(A \cap B)$$

Ahora bien $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, siendo los conjuntos $A - B$ y $A \cap B$ disjuntos. Por tanto $\#A = \#(A - B) + \#(A \cap B)$. Análogamente $B = (B - A) \cup (A \cap B)$ con $B - A$ y $A \cap B$ disjuntos. Por tanto $\#B = \#(B - A) + \#(A \cap B)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\#(A \cup B) &= \#(A - B) + \#(B - A) + \#(A \cap B) \\
&= \#A - \#(A \cap B) + \#B - \#(A \cap B) + \#(A \cap B) \\
&= \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)
\end{aligned}$$

EJEMPLO 1.66 Si $\#(A) = 5$ y $\#(A \cap B) = 3$ entonces

$$\#(A - B) = \#(A) - \#(A \cap B) = 5 - 3 = 2$$

EJEMPLO 1.67 Si $B \subset A$, $\#(A) = 7$ y $\#(B) = 3$, entonces se cumple que

$$\#(A \cap B) = \#(B) = 3$$

y también

$$\#(A - B) = 7 - 3 = 4$$

EJEMPLO 1.68 Sean A y B son dos conjuntos tales que $\#(A - B) = 7$, $\#(B - A) = 2$ y $\#(A \cup B) = 14$. Entonces es posible calcular $\#(A)$ y $\#(B)$. En efecto, como

$$\#(A \cup B) = \#(A - B) + \#(B - A) + \#(A \cap B)$$

resulta

$$\#(A \cap B) = \#(A \cup B) - \#(A - B) - \#(B - A) = 14 - 7 - 2 = 5$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \#(A) &= \#(A - B) + \#(A \cap B) = 7 + 5 = 12 \\ \#(B) &= \#(B - A) + \#(A \cap B) = 2 + 5 = 7 \end{aligned}$$

CUESTIONES DE AUTOEVALUACIÓN

1.1 Si $\neg q$ es falsa, entonces $(\neg p) \vee q$ es

a) verdadera.

b) falsa.

c) verdadera o falsa, según el valor de verdad de p.

1.2 Si p es falsa, entonces $(\neg p) \wedge q$ es

a) verdadera .

b) falsa.

c) verdadera o falsa, según el valor de verdad de q.

1.3 Si $\neg q$ es verdadera, entonces $\neg(p \vee \neg q)$ es

a) verdadera.

b) falsa.

c) verdadera o falsa, según el valor de verdad de p.

1.4 Si p es verdadera, entonces $(q \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q)$ es

a) verdadera.

b) falsa.

c) verdadera o falsa, según el valor de verdad de q.

1.5 La proposición $\neg(p \vee \neg p)$ es

a) verdadera.

b) falsa.

c) verdadera o falsa, según el valor de verdad de p.

1.6 $p \vee \neg q$ es falsa cuando

a) p es falsa y q es falsa.

b) p es verdadera y q falsa.

c) p es falsa y q verdadera.

1.7 Si p es verdadera, la proposición $(\neg p) \rightarrow q$ es

a) verdadera.

b) falsa.

c) verdadera o falsa, según el valor de verdad de q.

1.8 Si p es verdadera, la proposición $p \rightarrow (p \vee q)$ es

a) verdadera.

b) falsa.

c) verdadera o falsa, según el valor de verdad de q.

1.9 Si p es falsa, la proposición $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ es

a) verdadera.

b) falsa.

c) verdadera o falsa, según el valor de verdad de q.

1.10 Si p es verdadera, la proposición $(p \vee q) \rightarrow \neg p$ es

a) verdadera.

b) falsa.

c) verdadera o falsa, según el valor de verdad de q.

1.11 La proposición $p \rightarrow \neg p$

a) Es verdadera si p es falsa.

b) Es verdadera si p es verdadera.

c) Es siempre falsa.

1.12 La proposición $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ es verdadera

a) sólo cuando p y q son verdaderas.

b) sólo cuando p y q son falsas.

c) Siempre.

1.13 Si $p \rightarrow (q \vee \neg p)$ es una proposición falsa, es que

a) p y q son verdaderas.

b) p es verdadera y q falsa.

c) p es falsa y q verdadera.

1.14 Si $p \wedge (q \to p)$ es una proposición verdadera, entonces

a) p y q son verdaderas.

b) p es verdadera y q falsa.

c) p es verdadera.

1.15 La proposición $p \to (q \to p)$ es una proposición verdadera

a) sólo si p y q son falsas.

b) sólo si p es falsa y q verdadera.

c) cualquiera que sean p y q.

1.16 El razonamiento:

$$\begin{array}{rr} & p \\ & \neg p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

a) Es una falacia.

b) Es lógicamente válido.

c) Es lógicamente válido o falaz según el valor de verdad de q.

1.17 Si A y B son conjuntos tales que $A \subset B$, es cierto que

a) si $x \in A$, entonces $x \in B$.

b) si $x \in B$, entonces $x \in A$.

c) si $x \notin A$, entonces $x \notin B$.

1.18 Si M y N son conjuntos tales que $N \subset M$, es cierto que

a) si $a \in M$, entonces $a \in N$.

b) si $a \notin M$, entonces $a \notin N$.

c) si $a \notin N$, entonces $a \notin M$.

1.19 Para cualquier conjunto A se verifica

a) $\emptyset \in A$.

b) $\emptyset \subset A$.

c) $A \in A$.

1.20 Si un conjunto A tiene 6 elementos, el número de subconjuntos de A es

a) 6.

b) 16.

c) 64.

1.21 Si A y B son conjuntos disjuntos, no es correcto afirmar que

a) si $a \in A$, entonces $a \notin B$.

b) si $a \in B$, entonces $a \in A^c$.

c) si $a \notin A$, entonces $a \in B$.

1.22 Dados dos conjuntos A y B, no es correcto afirmar que

a) si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A \cap B^c$ o $x \in A^c \cap B$.

b) si $x \notin A \cup B$, entonces $x \notin A$ y $x \notin B$.

c) si $x \in A \cup B$ y $x \notin A$, entonces $x \in B$.

1.23 Si dos conjuntos A y B verifican $A^c \cap B^c = \emptyset$, es que

a) $A \subset B$.

b) $A \cup B = \mathscr{U}$.

c) $(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = \mathscr{U}$.

1.24 Si dos conjuntos A y B cumplen $A \subset B$, entonces

a) $A \cup B^c = \mathscr{U}$.

b) $B - A = \emptyset$.

c) $B^c \subset A^c$.

1.25 Si dos conjuntos A y B cumplen $A \subset B^c$, no es correcto afirmar que

a) $A \cap B = \emptyset$.

b) $A \cup B = \mathscr{U}$.

c) $B \subset A^c$.

1.26 Si A y B son dos conjuntos tales que $A \cup B = B$, se cumple

a) $A \subset B$.

b) $B \cup A = A$.

c) $A^c \cap B^c = \emptyset$.

1.27 Si A y B son dos conjuntos, $(A - B)^c$ es igual a

a) $A^c - B^c$.

b) $A^c \cup B$.

c) $B - A$.

1.28 Si A y B son dos conjuntos tales que $A \cup B^c = B$, se cumple

a) $A = B = \mathscr{U}$.

b) $A \subset B^c$.

c) $B \subset A^c$.

1.29 Si A y B son dos conjuntos tales que $(A - B)^c = B$, se cumple

a) $A \cap B = \emptyset$.

b) $B^c \subset A$.

c) $A = B^c$.

1.30 Si A y B son dos conjuntos tales que $(A \cup B)^c = A$, se cumple

a) $B \subset A$.

b) $A = \mathscr{U}$.

c) $A = \emptyset$ y $B = \mathscr{U}$.

1.31 Si A y B son dos conjuntos tales que $(A \cap B)^c \subset B$, se cumple

a) $A = B = \mathscr{U}$.

b) $B = \mathscr{U}$.

c) $A \cap B = \emptyset$.

1.32 Si A y B son dos conjuntos, el conjunto $(A^c - B^c)^c$ es igual a

a) $A \cup B^c$.

b) $A^c \cup B$.

c) $A - B$.

1.33 Si A y B son dos conjuntos, el conjunto $A \cap (B \cup A^c)$ es igual a

a) $B - A$.

b) $A \cap B$.

c) B.

1.34 Si A y B son dos conjuntos, el conjunto $(A^c \cup B^c) \cap A$ es igual a

a) $A^c \cap B$.

b) A.

c) $A - B$.

1.35 Si A y B son dos conjuntos, el conjunto $A \cup (B^c \cap A)$ es igual a

a) A.

b) $A \cup B^c$.

c) $A - B$.

1.36 Si A y B son dos conjuntos que cumplen $B - A = B$, entonces

a) $A = \emptyset$.

b) $A - B = A$.

c) $A \cup B = B$.

1.37 La propiedad de idempotencia de la intersección de conjuntos significa que, para cualquier conjunto A, es

a) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

b) $A \cap \mathscr{U} = A$.

c) $A \cap A = A$.

1.38 La propiedad asociativa de la intersección de conjuntos afirma que

a) $A \cap B = B \cap A$.

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

c) $A \cap B \subset B$.

1.39 La propiedad conmutativa de la unión de conjuntos garantiza que

a) $A \cup B = B \cup A$.

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

c) $A \cup A = A$.

1.40 La propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección expresa que

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.41 Entre tres conjuntos A, B y C, si se cumple

$$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

es que

a) A y $B \cap C$ son disjuntos.

b) $B \cap C \subset A \subset B \cup C$.

c) $A \subset B \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = \emptyset$.

1.42 Las leyes de Morgan no garantizan que

a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

b) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$.

c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

1.43 Si dos conjuntos A y B verifican $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$, se cumple

a) $A = B$.

b) $A \cup B = \mathscr{U}$.

c) $A = B = \mathscr{U}$.

1.44 Si A y B son dos conjuntos, se verifica

a) $A - (A \cap B)^c = A \cup B$.

b) $A - B = (B - A)^c$.

c) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

1.45 Si dos conjuntos A y B verifican $A - (A \cap B)^c = A \cup B$, se cumple

a) $A^c \cup B = \emptyset$.

b) $B - A = \emptyset$.

c) $A \cap B = \emptyset$.

1.46 Si dos conjuntos A y B verifican $A - B = (B - A)^c$, se cumple

a) $B = A^c$.

b) $B \subset A$.

c) $A \subset B$.

1.47 En el conjunto de palabras

$$A = \{\textit{uno, dos, tres, cuatro, cinco}\}$$

se define la aplicación f que asigna a cada una su número de letras. Entonces

a) $f(\textit{uno}) = 1$.

b) $f(\textit{cinco}) = 5$.

c) $f(\textit{tres}) = 3$.

1.48 Para ordenar por orden alfabético las palabras del conjunto

$$A = \{\textit{uno, dos, tres, cuatro, cinco}\},$$

se asigna a cada una el lugar que ocupa en dicho orden. Entonces

a) la imagen de *tres* es 4 y la preimagen de 2 es *dos*.

b) la imagen de *uno* es 4 y la preimagen de 1 es *cinco*.

c) la imagen de *cuatro* es 2 y la preimagen de 1 es *cinco*.

1.49 Se considera la abreviatura de cada palabra del diccionario, compuesta por sus dos primeras letras seguidas de un punto. Entonces,

a) *que.* es la imagen de *queso*.

b) *fr* es la imagen de *fruta*.

c) *ar.* tiene como preimagen *arma*.

1.50 La abreviatura de las palabras del diccionario, definida por sus dos primeras letras seguidas de un punto, ¿es una aplicación bien definida en el conjunto de palabras del diccionario?

a) sí.

b) no, porque hay palabras distintas con la misma abreviatura.

c) no, porque la palabras de una sola letra no tienen abreviatura.

1.51 La abreviatura de las palabras del diccionario de más de dos letras, definida por sus dos primeras letras seguidas de un punto, ¿es una aplicación inyectiva?

a) sí.

b) no, porque hay palabras distintas con la misma abreviatura.

c) no, porque las abreviaturas *ñr.* o *qt.* no corresponden a ninguna palabra.

1.52 Dado el conjunto $B = \{1,2,3,4,5\}$, si $f : A \mapsto B$ es una aplicación sobreyectiva, el cardinal de A debe cumplir

a) $\#(A) \geq 5$.

b) $\#(A) = 5$.

c) $\#(A) \leq 5$.

1.53 Dado el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, si $f : A \mapsto B$ es una aplicación inyectiva, el cardinal de B debe cumplir

a) $\#(B) \leq 4$.

b) $\#(B) = 4$.

c) $\#(B) \geq 4$.

1.54 Si $f : A \mapsto B$ es una aplicación biyectiva, puede asegurarse

a) $\#(A) \leq \#(B)$.

b) $\#(A) = \#(B)$.

c) $\#(A) \geq \#(B)$.

1.55 Si A y B son dos conjuntos tales que sus cardinales verifican la relación $\#(A) + \#(B) = \#(A \cup B)$, entonces

a) $A \subset B^c$.

b) $A^c \subset B$.

c) $A^c \cap B^c = \emptyset$.

1.56 Si A y B son dos conjuntos tales que $B - A = B$, se cumple

a) $\#(B) - \#(A) = \#(B)$.

b) $\#(B) - \#(A) = \#(A \cap B)$.

c) $\#(A) + \#(B) = \#(A \cup B)$.

1.57 Si $\#(\mathscr{U}) = n$ y A es un subconjunto de $\mathscr{U}$, entonces

a) $\#(A^c) = -\#(A)$.

b) $\#(A^c) = n - \#(A)$.

c) $\#(A^c) - \#(A) = 0$.

1.58 Si A y B son dos conjuntos tales que $\#(A) = 6$ y $\#(A - B) = 2$, entonces $\#(A \cap B)$ es igual a

a) 2.

b) 4.

c) 6.

1.59 Si A y B son dos conjuntos tales que $\#(B) = 14$ y $\#(A \cap B) = 8$, entonces

a) $\#(A \cup B) = 22$.

b) $\#(A - B) = 6$.

c) $\#(B - A) = 6$.

1.60 Si A y B son dos conjuntos tales que $\#(A \cup B) = 16$, $\#(A) = 10$ y $\#(B) = 9$, entonces $\#(A \cap B)$ es igual a

a) 1.

b) 3.

c) 9.

1.61 Si A y B son dos conjuntos, $\#(A \cup B)$ siempre es mayor o igual que

a) $\#(A) + \#(B)$.

b) $\#(A) + \#(A - B)$.

c) $\#(A - B) + \#(B - A)$.

1.62 Si A y B son dos conjuntos, $\#(A \cup B) - \#(A \cap B)$ es igual a

a) $\#(A) + \#(B)$.

b) $\#(A - B) + \#(B - A)$.

c) $\#(A) - \#B$.

1.63 Si A y B son dos conjuntos que verifican $\#(B) = \#(A) + \#(A \cap B)$ y $\#(A \cup B) = 12$, se cumple

a) $\#(A) = 6$.

b) $\#(B) = 9$.

c) $\#(A \cap B) = 3$.

1.64 Si A y B son dos conjuntos tales que $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(A \cap B)$ y $\#(B) = 16$, se verifica

a) $\#(A) = 12$.

b) $\#(A \cup B) = 20$.

c) $\#(A \cap B) = 8$.

1.65 Si A y B son dos conjuntos tales que $\#(A - B) = 9$, $\#(B - A) = 6$ y $\#(A \cup B) = 27$, se verifica

a) $\#(A \cap B) = 9$.

b) $\#(A) = 21$.

c) $\#(B) = 15$.

SOLUCIONES DE LAS CUESTIONES DE AUTOEVALUACIÓN

1.1 *Respuesta correcta: a*

Si $\neg q$ es falsa, es que q es verdadera y $(\neg p) \vee q$ es también verdadera, independientemente del valor de p.

1.2 *Respuesta correcta: c*

Si p es falsa $\neg p$ es verdadera; pero $(\neg p) \wedge q$ sólo es verdadera si lo es también q.

1.3 *Respuesta correcta: b*

Siendo $\neg q$ verdadera, también lo es $p \vee \neg q$; luego su negación $\neg(p \vee \neg q)$ es falsa.

1.4 *Respuesta correcta: c*

Si p es verdadera, $p \vee \neg q$ es verdadera; pero $q \vee \neg p$ es verdadera o falsa, según sea q. Lo mismo ocurre con la conjunción de ambas, que sólo es verdadera cuando lo sean ambas.

1.5 *Respuesta correcta: b*

$p \vee \neg p$ es verdadera independientemente de que p sea verdadera o falsa. Por tanto, su negación será siempre falsa.

1.6 *Respuesta correcta: c*

Para que $p \vee \neg q$ sea falsa tienen que ser p falsa y $\neg q$ falsa; es decir, p falsa y q verdadera.

1.7 *Respuesta correcta: a*

Si p es verdadera, $\neg p$ es falsa y el condicional $(\neg p) \rightarrow q$ es una proposición verdadera.

1.8 *Respuesta correcta: a*

Como p es verdadera, $p \vee q$ es verdadera; así que el condicional $p \rightarrow (p \vee q)$ tiene el antecedente y el consecuente verdaderos y, por tanto, es verdadera.

1.9 *Respuesta correcta: c*

Como p es falsa, el consecuente $p \wedge q$ es falso; así pues, el condicional $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ será verdadero cuando el antecedente $p \vee q$ sea falso, es decir si q es falsa. En caso contrario, $p \vee q$ será verdadera y el condicional falso.

1.10 *Respuesta correcta: b*

Como p es verdadera, $\neg p$ es falsa y $p \vee q$ verdadera. Por tanto, el condicional $(p \vee q) \rightarrow \neg p$ es una proposición falsa.

1.11 *Respuesta correcta: a*

Si p es falsa, el condicional $p \rightarrow \neg p$ es verdadero. Mientras que, si p es verdadera, $\neg p$ es falsa y el condicional es falso.

1.12 *Respuesta correcta: c*

El condicional $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ es verdadero en el caso en que el antecedente $p \wedge q$ sea falso; es decir, cuando p es falsa, cuando lo es q o cuando son ambas falsas. La posibilidad que queda es que p y q sean verdaderas, en cuyo caso el antecedente $p \wedge q$ es verdadero y el consecuente $p \vee q$ también; por tanto, también en eses caso el condicional es verdadero.

1.13 *Respuesta correcta: b*

Para que el condicional $p \rightarrow (q \vee \neg p)$ sea falso, el antecedente p tiene que ser verdadero y el consecuente, $q \vee \neg p$, falso. Esto último obliga a que q sea falsa.

1.14 *Respuesta correcta: c*

Para que $p \wedge (q \rightarrow p)$ sea verdadera tiene que ser p verdadera (si no la conjunción sería falsa). Siendo p verdadera, el condicional $q \rightarrow p$ es verdadero tanto si q es falsa como si q es verdadera.

1.15 *Respuesta correcta: c*

Cuando el antecedente p es falso, el condicional $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ es verdadero. Cuando p es verdadera, el condicional $q \rightarrow p$ es verdadero, tanto si q es falsa como si q es verdadera. Luego, en cualquier caso, $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ es verdadera.

1.16 *Respuesta correcta: b*

Un razonamiento es lógicamente válido si, en todos los casos en que las premisas son verdaderas, es verdadera también la conclusión. Las premisas p y $\neg p$ no son nunca simultáneamente verdaderas, luego la conclusión es

verdadera en todos los casos en que lo son ambas premisas. Visto de otra forma, la proposición $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$ es verdadera, cualquiera que sea q, porque el antecedente $p \wedge \neg p$ es siempre falso.

1.17 *Respuesta correcta: a*

Por ser $A \subset B$, todos los elementos de A pertenecen a B.

1.18 *Respuesta correcta: b*

Como $N \subset M$, si a no pertenece a M, no puede pertenecer a N (porque pertenecería también a M). Sin embargo, puede haber elementos de M que no estén en N o, dicho de otra forma, elementos que no estén en N y sí en M.

1.19 *Respuesta correcta: b*

Todo elemento de $\emptyset$ (o sea, ninguno) pertenece a A, cualquiera que sea A. En cambio, los elementos de $A = \{1,2,3\}$ son 1, 2 y 3, entre los que no está $\emptyset$, ni tampoco A.

1.20 *Respuesta correcta: c*

El conjunto $\mathscr{P}(A)$ de todos los subconjuntos de A tiene $2^6 = 64$ elementos.

1.21 *Respuesta correcta: c*

Si $a \in A$, como $a \notin A \cap B$ (por ser $A \cap B = \emptyset$), tiene que ser $a \notin B$. Análogamente, si $a \in B$ tiene que ser $a \in A^c$. En cambio, saber que $a \notin A$, no indica si $a \in B$ o $a \in B^c$.

1.22 *Respuesta correcta: a*

Si $x \in A \cup B$, puede ser $x \in A \cap B^c$ o $x \in A^c \cap B$ o, también, $x \in A \cap B$.

1.23 *Respuesta correcta: b*

Por la primera ley de Morgan, la condición se expresa $(A \cup B)^c = \emptyset$ o bien $A \cup B = \mathscr{U}$. En el caso en que fuesen $A = \{a,b\}$, $B = \{b,c\}$ y $\mathscr{U} = \{a,b,c\}$, sería $A^c = \{c\}$, $B^c = \{a\}$; de modo que no es $A \subset B$. Además $(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = \{c,a\}$ no coincide con $\mathscr{U}$.

1.24 *Respuesta correcta: c*

Puesto que cualquier $x \in A$ cumple también $x \in B$, en el caso en que $x \notin B$ no puede ser $x \in A$; es decir, $x \notin A$. Supongamos que fuese $\mathscr{U} = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,2\}$ y $B = \{1,2,3\}$; entonces $A \cup B^c = \{1,2,4,5\}$ y $B - A = \{3\}$.

1.25 *Respuesta correcta: b*

Cuando $x \in A$ es $x \notin B$, luego no puede ser $x \in A \cap B$ para ningún elemento x de $\mathscr{U}$; es decir $A \cap B = \emptyset$. También, en el caso de que $x \in B$ puede asegurarse que $x \notin A$. Ahora bien, si $\mathscr{U} = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,2\}$ y $A = \{4\}$, es $A \subset B^c$, pero no es cierto que $A \cup B = \{1,2,4\}$ coincida con $\mathscr{U}$.

1.26 *Respuesta correcta: a*

Siempre es $A \subset A \cup B$ y, como en este caso $A \cup B = B$, resulta $A \subset B$. Por otro lado, siempre es $B \cup A = A \cup B$; luego no es cierto que sea $B \cup A = A$. Con $\mathscr{U} = \{1,2,3\}$, $A = \{1\}$ y $B = \{1,2\}$, es cierto que $A \cup B = B$, pero $A^c \cap B^c = \{3\}$ no es $\emptyset$.

1.27 *Respuesta correcta: b*

$A - B = A \cap B^c$ y la segunda ley de Morgan da $(A - B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$. En el caso $\mathscr{U} = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{3\}$, sería $A^c = \{4\}$ y $B^c = \{1,2,4\}$; luego $A^c - B^c = \emptyset$ y, también, $B - A = \emptyset$; pero $(A - B)^c = \{3,4\}$.

1.28 *Respuesta correcta: a*

Como es $B^c \subset A \cup B^c = B$, tiene que ser $B^c = \emptyset$ o bien $B = \mathscr{U}$. Entonces $A \cup \emptyset = \mathscr{U}$, o sea $A = \mathscr{U}$.

1.29 *Respuesta correcta: b*

Como $(A - B)^c = B$, será $B^c = A - B = A \cap B^c$ y, por consiguiente, $B^c \subset A$.

1.30 *Respuesta correcta: c*

Por la primera ley de Morgan, la condición significa $A = A^c \cap B^c$; entonces $A \subset A^c$ y tiene que ser $A = \emptyset$. La condición se reduce entonces a $B^c = \emptyset$ o bien $B = \mathscr{U}$.

1.31 *Respuesta correcta: b*

La condición es equivalente a $B^c \subset A \cap B$ y, como $A \cap B \subset B$, resulta $B^c \subset B$; luego $B^c = \emptyset$ o bien $B = \mathscr{U}$. La condición se cumple entonces cualquiera que sea A.

1.32 *Respuesta correcta: a*

Por definición es $A^c - B^c = A^c \cap B$; luego, en virtud de la segunda ley de Morgan, su complementario es $(A^c \cap B)^c = A \cup B^c$.

1.33 *Respuesta correcta: b*

Por la propiedad distributiva, $A \cap (B \cup A^c) = (A \cap B) \cup (A \cap A^c) = A \cap B$ puesto que el segundo paréntesis es $\emptyset$.

1.34 *Respuesta correcta: c*

Por la propiedad distributiva,

$$(A^c \cup B^c) \cap A = (A^c \cap A) \cup (B^c \cap A) = B^c \cap A$$

puesto que el primer paréntesis es $\emptyset$. Por la propiedad conmutativa, $B^c \cap A = A \cap B^c = A - B$.

1.35 *Respuesta correcta: a*

Como $B^c \cap A \subset A$, es $A \cup (B^c \cap A) = A$.

1.36 *Respuesta correcta: b*

Siempre es $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$, siendo ambos conjuntos disjuntos; en el caso en que $B - A = B \cap A^c$ coincide con B, es que $B \cap A = \emptyset$. Por tanto los conjuntos son disjuntos y $A - B = A$.

1.37 *Respuesta correcta: c*

Las tres afirmaciones son correctas, pero es $A \cap A = A$ la que se denomina propiedad de idempotencia.

1.38 *Respuesta correcta: b*

Es la propiedad según la cual, en el cálculo de los elementos comunes a A, B y C: $A \cap B \cap C$, los conjuntos se pueden asociar de la forma $(A \cap B) \cap C$ o alternativamente $A \cap (B \cap C)$.

1.39 *Respuesta correcta: a*

Es la propiedad que permite conmutar el orden en que se realiza la unión de dos conjuntos. La segunda expresa la propiedad asociativa de la unión y la tercera la propiedad de idempotencia de la unión.

1.40 *Respuesta correcta: c*

La primera relación es, en general, incorrecta. La segunda es la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión. Y la tercera, la propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección.

1.41 *Respuesta correcta: b*

La relación indica que $A \cap (B \cup C) = A \cup (B \cap C)$. Como $A \cap (B \cup C) \subset A$, resulta $A \cup (B \cap C) \subset A$, luego $B \cap C \subset A$. También, $A \cap (B \cup C) \subset B \cup C$, así que $A \cup (B \cap C) \subset B \cup C$ y, por tanto, $A \subset B \cup C$.

1.42 *Respuesta correcta: b*

La primera y la tercera relaciones son las leyes de Morgan. La segunda relación es falsa salvo en casos excepcionales.

1.43 *Respuesta correcta: a*

La relación indica que $(A \cap B)^c = (A \cup B)^c$ y, por consiguiente, $A \cap B = A \cup B$. Entonces, como $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ es $A = A \cap B$ y, análogamente, $B = A \cap B$.

1.44 *Respuesta correcta: c*

Utilizando la segunda ley de Morgan y la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión, se obtiene

$$\begin{aligned}
(A \cup B) - (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\
&= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\
&= \big(A \cap (A^c \cup B^c)\big) \cup \big(B \cap (A^c \cup B^c)\big) \\
&= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (B \cap B^c) \\
&= (A - B) \cup (B - A)
\end{aligned}$$

puesto que $A \cap A^c = \emptyset = B \cap B^c$, $A \cap B^c = A - B$ y $B \cap A^c = B - A$.

1.45 *Respuesta correcta: b*

Es $A - (A \cap B)^c = A \cap (A \cap B) = A \cap B$. Por tanto, la relación indica que $A \cap B = A \cup B$ y, por consiguiente, $A = B$. Entonces, $B - A = \emptyset$, mientras que $A^c \cup B = \mathscr{U}$ y $A \cap B = A$.

1.46 *Respuesta correcta: a*

Como $A - B = A \cap B^c$ y $(B - A)^c = (B \cap A^c)^c = B^c \cup A$, la igualdad de ambos indica que $A \cap B^c = A \cup B^c$. Entonces, ambos conjuntos A y B^c tienen que coincidir con $A \cap B^c = A \cup B^C$. Luego $A = B^c$ o bien $B = A^c$.

1.47 *Respuesta correcta: b*

Efectivamente *cinco* tiene 5 letras. En cambio $f(\textit{uno}) = 3$ y $f(\textit{tres}) = 4$.

1.48 *Respuesta correcta: c*

El orden alfabético es *cinco* $\to 1$, *cuatro* $\to 2$, *dos* $\to 3$, *tres* $\to 4$ y *uno* $\to 5$.

1.49 *Respuesta correcta: c*

que. son 3 letras antes del punto y a *fr* le falta el punto.

1.50 *Respuesta correcta: c*

Para que lo fuese, habría que añadir a la definición que las palabras de una sola letra (como la conjunción *y* o la preposición *a*) son su propia abreviatura. Tampoco sería útil abreviar las palabras de dos letras (como la preposición *en* o el artículo *la*).

1.51 *Respuesta correcta: b*

Para ser inyectiva, la abreviatura de dos palabras distintas (como *libro* y *litro*) tendría que ser diferente. El que haya parejas de letras que no son abreviaturas, indica que la abreviatura no es sobreyectiva si como rango se considera el conjunto de todas las parejas de letras.

1.52 *Respuesta correcta: a*

Como todos los elementos de B han de ser imagen de alguno de A y los elementos de A tienen una única imagen, debe ser $\#(A) \geq 5$.

1.53 *Respuesta correcta: c*

Como todos los elementos de A tienen una única imagen y, por ser f inyectiva, no hay dos que tengan la misma imagen, deber ser $\#(B) \geq 4$.

1.54 *Respuesta correcta: b*

Por definición, los cardinales de dos conjuntos son iguales cuando existe una aplicación biyectiva entre uno y otro.

1.55 *Respuesta correcta: a*

Como, en general, $\#(A)+\#(B) = \#(A\cup B)+\#(A\cap B)$, la relación indica que $\#(A\cap B) = 0$ o bien $A\cap B = \emptyset$. De ello resulta $A \subset B^c$ y $B \subset A^c$.

1.56 *Respuesta correcta: c*

Si $B - A = B$, los conjuntos A y B son disjuntos y se cumple $\#(A\cup B) = \#(A) + \#(B)$.

1.57 *Respuesta correcta: b*

Como A y A^c son conjuntos disjuntos, cuya unión es $\mathscr{U}$, se verifica $\#(A)+\#(A^c) = \#(\mathscr{U}) = n$.

1.58 *Respuesta correcta: b*

Como $A = (A\cap B)\cup(A-B)$, siendo $A\cap B$ y $A-B$ disjuntos, resulta $\#(A) = \#(A\cap B)+\#(A-B)$; es decir $6 = \#(A\cap B)+2$ o bien $\#(A\cap B) = 4$.

1.59 *Respuesta correcta: c*

Como $B = (B\cap A)\cup(B-A)$, siendo $B\cap A$ y $B-A$ disjuntos, resulta $\#(B) = \#(B\cap A)+\#(B-A)$; es decir $14 = 8+\#(B-A)$ o bien $\#(B-A) = 6$.

1.60 *Respuesta correcta: b*

Es $\#(A\cup B) = \#(A)+\#(B)-\#(A\cap B)$, luego $16 = 10+9-\#(A\cap B)$ y $\#(A\cap B) = 3$.

1.61 *Respuesta correcta: c*

La descomposición de $A\cup B$ en conjuntos disjuntos: $A\cup B = (A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$, prueba que $\#(A\cup B) = \#(A-B)+\#(B-A)+\#(A\cap B) \geq \#(A-B)+\#(B-A)$ por ser $\#(A\cap B) \geq 0$. En cambio, si fuese $B\subset A$ pero $B \neq A$, sería $A\cup B = A$ y $\#(A\cup B) = \#(A) < \#(A)+\#(A-B)$.

1.62 *Respuesta correcta: b*

La descomposición de $A\cup B$ en conjuntos disjuntos: $A\cup B = (A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$, prueba que $\#(A\cup B) = \#(A-B)+\#(B-A)+\#(A\cap B)$ y, por consiguiente, $\#(A\cup B)-\#(A\cap B) = \#(A-B)+\#(B-A)$.

1.63 *Respuesta correcta: a*

Se sabe que $12 = \#(A)+\#(B)-\#(A\cap B) = \#(A)+\#(A)+\#(A\cap B)-\#(A\cap B) = 2\cdot\#(A)$; por tanto $\#(A) = 6$. Pero no se puede saber el valor que tiene $\#(A\cap B)$ (entre 0 y 6) ni el valor de $\#(B)$ (entre 6 y 12).

1.64 *Respuesta correcta: c*

Tiene que ser $\#(A)+\#(A\cap B) = \#(A)+\#(B)-\#(A\cap B)$ y, por consiguiente, $\#(B) = 2\cdot\#(A\cap B)$. Como $\#(B) = 16$ resulta $\#(A\cap B) = 8$. Sin embargo $\#(A)$ puede ser cualquier número entero $n \geq 8$ y, por ende, $\#(A\cup B) = n+8$.

1.65 *Respuesta correcta: b*

Como $\#(A\cup B) = \#(A-B)+\#(B-A)+\#(A\cap B)$, se tiene $27 = 9+6+\#(A\cap B)$. Luego $\#(A\cap B) = 12$ y, por tanto, $\#(A) = \#(A-B)+\#(A\cap B) = 9+12 = 21$ y $\#(B) = \#(B-A)+\#(A\cap B) = 6+12 = 18$.



TEMAS COMPLEMENTARIOS

1.5 RELACIONES LÓGICAS

1.6 PROPOSICIONES Y CONJUNTOS

1.7 APLICACIONES DE LOS CÁLCULOS CON CARDINALES

1.5 RELACIONES LÓGICAS

Dos proposiciones p y q pueden presentar, como máximo, cuatro posibilidades lógicas, tal como se muestra en la tabla 1.11. Ésta es la situación más general que puede presentarse. Por ejemplo, las proposiciones p: *"llueve"* y q: *"hace frío"* pueden, en principio, ser verdaderas o falsas independientemente una de la otra. Cuando esto ocurre se dice que las proposiciones son **independientes**.

PROPOSICIONES INDEPENDIENTES

1.71

Se dice que dos proposiciones p y q son **independientes** *si se dan los cuatro casos posibles en su tabla de verdad.*

Si al menos uno de estos casos no puede darse se dice que son **dependientes** o que guardan entre sí una **relación lógica**. En este apartado vamos a estudiar las diferentes relaciones lógicas que pueden existir entre dos proposiciones.

	p	q
Caso 1	V	V
Caso 2	V	F
Caso 3	F	V
Caso 4	F	F

Tabla 1.11: Posibilidades lógicas de dos proposiciones.

1.5.1 AUSENCIA DE UNO DE LOS CASOS POSIBLES

PROPOSICIONES INCONSISTENTES

Si el caso 1 de la tabla 1.11 está excluido, las dos proposiciones no pueden ser simultáneamente verdaderas, entonces se dice que son **inconsistentes**.

PROPOSICIONES INCONSISTENTES

1.72

Dos proposiciones p y q se dicen **inconsistentes** *si no pueden ser simultáneamente verdaderas.*

EJEMPLO 1.69 Dadas dos proposiciones independientes p y q, se halla la tabla de verdad de las proposiciones $p \wedge q$ y $((\neg p) \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$, tabla 1.12. Se observa

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$((\neg p) \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F

Tabla 1.12: Proposiciones inconsistentes.

que las proposiciones $p \wedge q$ y $((\neg p) \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$ no pueden ser simultáneamente verdaderas: son *inconsistentes*.

IMPLICACIÓN DIRECTA

Si el caso 2 de la tabla 1.11 está excluido no puede darse que p sea verdadera y q falsa. Esto es, siempre que p sea verdadera también lo será q. Entonces se dice que p **implica** q.

IMPLICACIÓN DIRECTA

1.73 *Si dos proposiciones p y q son tales que no puede ser p verdadera y q falsa se dice que p* ***implica*** *q.*

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Tabla 1.13: Implicación directa y recíproca.

EJEMPLO 1.70 Si p y q son dos proposiciones independientes, la tabla de verdad de $p \vee q$ y $p \wedge q$ viene dada en la tabla 1.13. Se observa que no pueden ser $p \wedge q$ verdadera y $p \vee q$ falsa simultáneamente, luego $p \wedge q$ *implica* $p \vee q$.

IMPLICACIÓN RECÍPROCA

Si el caso 3 de la tabla 1.11 está excluido, siempre que q sea verdadera también lo será p. Al igual que antes, se dice que q **implica** p.

IMPLICACIÓN RECÍPROCA

1.74 *Si dos proposiciones p y q son tales que no puede ser q verdadera y p falsa se dice que q* ***implica*** *p.*

EJEMPLO 1.71 El ejemplo anterior nos sirve de nuevo para ilustrar este caso.

PROPOSICIONES SUBCONTRARIAS

Si el caso 4 de la tabla 1.11 está excluido, las dos proposiciones no pueden ser simultáneamente falsas. Entonces se dice que son **subcontrarias**.

PROPOSICIONES SUBCONTRARIAS

1.75 *Si dos proposiciones p y q no pueden ser simultáneamente falsas, se dice que son* ***subcontrarias****.*

q	p	$p \to q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Tabla 1.14: Proposiciones subcontrarias.

EJEMPLO 1.72 Si p y q son dos proposiciones independientes, las proposiciones p y $p \to q$ son *subcontrarias*. En efecto, su tabla de verdad, tabla 1.14, muestra que se dan todas las posibilidades lógicas menos el caso 4: no pueden ser p y $p \to q$ simultáneamente falsas.



p	q	$(\neg p)$	$(\neg p) \vee q$	$p \rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Tabla 1.15: Proposiciones equivalentes.

1.5.2 AUSENCIA DE DOS CASOS

PROPOSICIONES EQUIVALENTES

Si están excluidos los casos 2 y 3 de la tabla 1.11 las dos proposiciones son simultáneamente verdaderas o falsas, entonces se dice que son **equivalentes**. Obsérvese que dos proposiciones equivalentes toman siempre el mismo valor de verdad.

PROPOSICIONES EQUIVALENTES

Dos proposiciones son **equivalentes** *si toman siempre el mismo valor de verdad.* 1.76

EJEMPLO 1.73 Las proposiciones $(\neg p) \vee q$ y $p \rightarrow q$ son equivalentes. En efecto, en la tabla de verdad, tabla 1.15, Se observa que las columnas de los valores de verdad de $(\neg p) \vee q$ y $p \rightarrow q$ son iguales.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabla 1.16: Proposiciones contradictorias.

PROPOSICIONES CONTRADICTORIAS

Si están excluidos los casos 1 y 4 de la tabla 1.11 las dos proposiciones no pueden ser simultáneamente verdaderas, ni simultáneamente falsas, entonces se dice que son **contradictorias**. Obsérvese que si dos proposiciones son contradictorias, cuando una es verdadera la otra es falsa y al revés.

PROPOSICIONES CONTRADICTORIAS

Dos proposiciones se dicen **contradictorias** *si no pueden ser simultáneamente verdaderas ni simultáneamente falsas.* 1.77

EJEMPLO 1.74 El ejemplo más simple de dos proposiciones contradictorias lo proporcionan p y $\neg p$. En efecto, en la tabla de verdad, tabla 1.16, se observa que p y $\neg p$ no pueden ser simultáneamente verdaderas ni simultáneamente falsas, por lo tanto, son contradictorias.

Las restantes posibles ausencias de dos casos suponen que una de las dos proposiciones es siempre verdadera o falsa y se consideran a continuación.

1.5.3 AUSENCIA DE TRES CASOS

Para que falten tres posibilidades lógicas es preciso que una de las proposiciones sea siempre verdadera o siempre falsa. Esta observación introduce dos nuevos conceptos de interés:

TAUTOLOGÍA

1.78 *Una proposición que siempre es verdadera se denomina* **lógicamente verdadera** *o* **tautología***; su valor de verdad siempre es V.*

EJEMPLO 1.75 La proposición $p \vee (\neg p)$ es una tautología. En efecto, en su tabla de verdad, tabla 1.17, muestra que siempre es verdadera.

CONTRADICCIÓN

1.79 *Una proposición que siempre es falsa se denomina* **lógicamente falsa** *o* **contradicción***. Su valor de verdad siempre es F.*

EJEMPLO 1.76 La proposición $p \wedge (\neg p)$ es lógicamente falsa. Su tabla de verdad, tabla 1.18, muestra que siempre es falsa.

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
V	F	V
F	V	V

Tabla 1.17: Tautología.

p	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$
V	F	F
F	V	F

Tabla 1.18: Contradicción.

1.6 PROPOSICIONES Y CONJUNTOS

Las proposiciones de la lógica tienen una estructura matemática semejante a la de los conjuntos. Esta similitud no debe extrañar; se puede considerar que un conjunto A está definido por la proposición p que afirma: *"el elemento x pertenece a A"*. En efecto, el conjunto A está formado por aquellos elementos para los que la proposición p es verdadera. Por ejemplo, el conjunto V de las vocales del alfabeto español puede entenderse como el conjunto de las letras v para los que es verdadera la proposición p : *"v es una vocal"* o cualquier otra proposición equivalente.

Teniendo presente esta idea es muy sencillo traducir el lenguaje de proposiciones al lenguaje de conjuntos y, recíprocamente, el lenguaje de conjuntos al lenguaje de proposiciones. Así, los conectores lógicos entre proposiciones y las operaciones de conjuntos representan dos caras de una misma moneda. La tabla 1.19 sintetiza esta equivalencia.

Conector de proposiciones		Operación de conjuntos	
Negación	$\neg p$	Complementación	A^c
Conjunción	$p \wedge q$	Intersección	$A \cap B$
Disyunción	$p \vee q$	Unión	$A \cup B$

Tabla 1.19: Equivalencia entre conectores lógicos y operaciones de conjuntos.

Esta equivalencia nos permite establecer que los conectores lógicos presentan propiedades idénticas a las de las operaciones con conjuntos. En este contexto, el papel del conjunto vacío lo hace una proposición c que sea una *contradicción*, mientras que el papel del conjunto universal lo hace una proposición t que sea una *tautología*. La relación de igualdad entre conjuntos tiene su parangón en la relación de equivalencia entre proposiciones. La tabla 1.20 incluye un resumen de las propiedades de los conectores y su relación con las propiedades de las operaciones con conjuntos. En dicha tablas, p, q y r representan proposiciones cualesquiera, c es una proposición contradictoria y t una tautología; el símbolo $\equiv$ indica que las proposiciones son equivalentes. Por su parte, A, B y C representan conjuntos cualesquiera. de un conjunto universal $\mathscr{U}$, y $\emptyset$ significa, como es habitual, el conjunto vacío.

	Conjunción	Intersección
	$p \wedge c \equiv c$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
	$p \wedge t \equiv p$	$A \cap \mathscr{U} = A$
Idempotencia	$p \wedge p \equiv p$	$A \cap A = A$
Conmutativa	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

	Disyunción	Unión
	$p \vee c \equiv p$	$A \cup \emptyset = A$
	$p \vee t \equiv t$	$A \cup \mathscr{U} = \mathscr{U}$
Idempotencia	$p \vee p \equiv p$	$A \cup A = A$
Conmutativa	$p \vee q \equiv q \vee p$	$A \cup B = B \cup A$
Asociativa	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Negación	Complementación
$\neg c \equiv t$	$\emptyset^c = \mathscr{U}$
$\neg t \equiv c$	$\mathscr{U}^c = \emptyset$
$\neg(\neg p) \equiv p$	$(A^c)^c = A$

	Conectores	Conjuntos
	$p \wedge \neg(p) \equiv c$	$A \cap A^c = \emptyset$
	$p \vee \neg(p) \equiv t$	$A \cup A^c = \mathscr{U}$
Distributivas	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Leyes de Morgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg(p) \wedge \neg(q)$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg(p) \vee \neg(q)$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Tabla 1.20: Propiedades de los conectores lógicos y su relación con las operaciones de conjuntos.

1.7 APLICACIONES DE LOS CÁLCULOS CON CARDINALES

1.7.1 CÁLCULO DE CARDINALES CON DOS CONJUNTOS

Los cálculos con cardinales de conjuntos permiten resolver muchos problemas prácticos. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.77 Supongamos que una entidad bancaria ha realizado una encuesta acerca de la situación económica de las familias españolas. Según los resultados de la encuesta, el 30 % de las familias pagaban un crédito hipotecario, el 40 % pagaban un crédito para comprar un coche y el 10 % pagaban créditos de ambos tipos. La entidad desea saber qué porcentaje de las familias no pagan ni créditos hipotecarios ni créditos para la compra de un coche. Por proporcionalidad, basta razonar sobre un universo de 100 familias. Llamemos A al conjunto de familias, entre las 100, que están pagando un crédito hipotecario y B al conjunto de familias que pagan un crédito para la compra de un coche. Según los datos, de cada 100 familias 30 pertenecen a A y 40 pertenecen a B, por lo tanto, $\#(A) = 30$ y $\#(B) = 40$. Ahora bien, las familias que pagan ambos créditos a un tiempo constituyen el conjunto intersección $A \cap B$, luego $\#(A \cap B) = 10$. Entonces, las que pagan alguno de los créditos serán

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B) = 30 + 40 - 10 = 60$$

y las que no pagan ninguno de los créditos serán

$$\#((A \cup B)^c) = \#(\mathscr{U}) - \#(A \cup B) = 100 - 60 = 40$$

Por lo tanto, el 40 % de las familias no pagan ni créditos hipotecarios ni créditos para la compra de un coche.

Los diagramas de Venn son muy útiles para resolver problemas de este tipo, ya que, en definitiva, se trata de hallar cuántos elementos hay en cada una de las cuatro regiones en que queda dividido el conjunto universal por medio dos conjuntos.

EJEMPLO 1.78 Vamos a examinar de nuevo el ejemplo anterior con ayuda de los diagramas de Venn. Consideremos un conjunto universal de 100 familias. De ellas habrá 10 que pagan ambos créditos. En la figura 1.30 (*a*) aparecen las cuatro regiones. Puesto que de las 100 familias hay 10 que pagan ambos créditos se anota 10 en la región correspondiente $A \cap B$, ver figura 1.30 (*b*). Ahora, el conjunto A tiene 30 elementos que estarán repartidos entre los subconjuntos $A \cap B$ y $A - B$; como en $A \cap B$ hay 10 elementos en $A - B$ habrá 20. Esto se marca en el diagrama como muestra la figura 1.30 (*c*). De manera semejante, si el conjunto B tiene 40 elementos y de ellos 10 están en $A \cap B$, en $B - A$ habrá 30 elementos. La solución es ahora evidente. En la unión —las familias que pagan algún crédito de estos tipos— hay $20 + 10 + 30 = 60$ elementos y, puesto que en el total hay 100, el complementario de la unión —las familias que no pagan ningún crédito de estos

tipos— tiene $100 - 60 = 40$ elementos. Obtenemos de nuevo la respuesta: 40 de cada 100, es decir, el 40 % de las familias, no pagan ningún crédito de estos tipos, ver figura 1.30 (c).

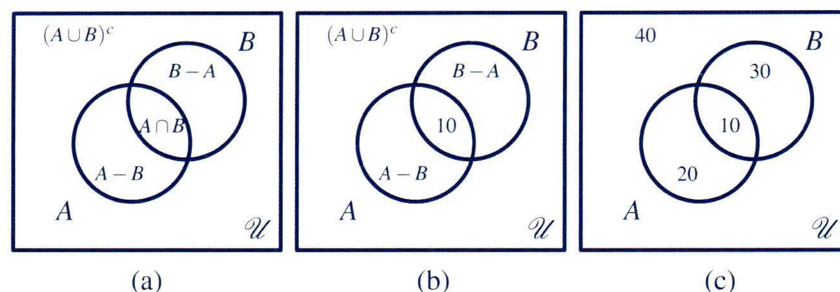
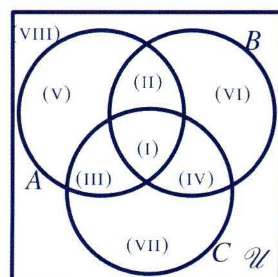


Figura 1.30: Cálculo de cardinales de dos conjuntos mediante diagramas de Venn.



REGIÓN	CONJUNTO
(I)	$A \cap B \cap C$
(II)	$A \cap B \cap C^c$
(III)	$A \cap B^c \cap C$
(IV)	$A^c \cap B \cap C$
(V)	$A \cap B^c \cap C^c$
(VI)	$A^c \cap B \cap C^c$
(VII)	$A^c \cap B^c \cap C$
(VIII)	$A^c \cap B^c \cap C^c$

Figura 1.31: Regiones en que dividen $\mathscr{U}$ tres conjuntos.

1.7.2 CÁLCULO DE CARDINALES CON TRES CONJUNTOS

Cuando se manejan tres conjuntos, los diagramas de Venn son también útiles para calcular cardinales. El procedimiento es semejante al ya visto, con la única complicación adicional de tener que emplear la ocho regiones de la figura 1.31, en lugar de las cuatro de la figura 1.30 (a). Ilustraremos dicho procedimiento con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1.79 Supongamos que en una reunión hay 40 personas que hablan alguno de los idiomas alemán, español o inglés. Se sabe que 22 hablan alemán, 26 no hablan inglés, 30 hablan sólo un idioma, 30 hablan inglés o alemán, 7 hablan inglés pero no hablan español y 17 hablan alemán pero no hablan español. Se desea responder a preguntas como: ¿cuántas personas hablan los tres idiomas? ¿cuántas personas hablan sólo español? ¿cuántas personas hablan español pero no hablan inglés?

Llamemos A, B y C, respectivamente, a los conjuntos de personas que hablan alemán, español e inglés. Las regiones en que se descompone la unión de los tres conjuntos aparecen en la figura 1.31. Se trata de escribir los datos en términos de las ocho regiones. El primer dato del problema es que la unión de los tres conjuntos tiene 40 elementos, esto se traduce en una igualdad que expresa que la suma de los cardinales de las regiones (I) a (VII) es 40, ver figura 1.32 (a).

$$\#(\text{I}) + \#(\text{II}) + \#(\text{III}) + \#(\text{IV}) + \#(\text{V}) + \#(\text{VI}) + \#(\text{VII}) = 40$$

Luego, dice el enunciado, 22 personas hablan alemán, esto se traduce en una igualdad que indica que la suma de los cardinales de las regiones (I), (II), (III) y (V) es igual a 22.

$$\#(\text{I}) + \#(\text{II}) + \#(\text{III}) + \#(\text{V}) = 22$$

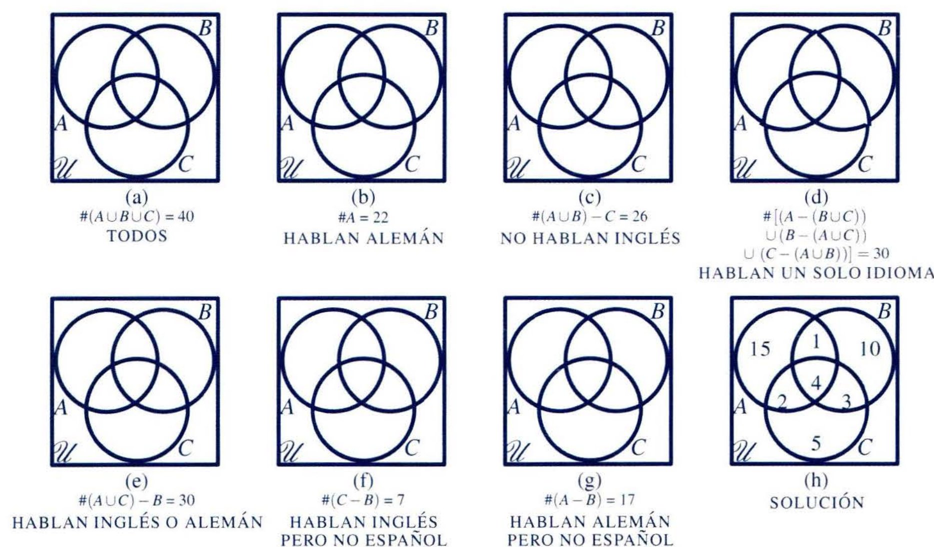


Figura 1.32: Cálculo del cardinal tres conjuntos mediante diagramas de Venn.

De manera análoga se traducen todos los datos del enunciado. El resultado se refleja en la Tabla 1.21, donde cada igualdad está numerada para facilitar la explicación posterior y viene representada en la figura 1.32.

Igualdad	Condición	Regiones		Cantidad
(a)	Personas en total	$\#(\text{I})+\#(\text{II})+\#(\text{III})+\#(\text{IV})+\#(\text{V})+\#(\text{VI})+\#(\text{VII})$	=	40
(b)	Hablan alemán	$\#(\text{I})+\#(\text{II})+\#(\text{III})+\#(\text{V})$	=	22
(c)	No hablan inglés	$\#(\text{II})+\#(\text{V})+\#(\text{VI})$	=	26
(d)	Hablan sólo un idioma	$\#(\text{V})+\#(\text{VI})+\#(\text{VII})$	=	30
(e)	Hablan inglés o alemán	$\#(\text{I})+\#(\text{II})+\#(\text{III})+\#(\text{IV})+\#(\text{V})+\#(\text{VII})$	=	30
(f)	Hablan inglés pero no español	$\#(\text{III})+\#(\text{VII})$	=	7
(g)	Hablan alemán pero no español	$\#(\text{III})+\#(\text{V})$	=	17

Tabla 1.21: Cálculo del cardinal de tres conjuntos.

Al operar así, se convierte un problema de conjuntos en otro algebraico. Para empezar se resta a la igualdad (a) la igualdad (e) y resulta $\#(\text{VI}) = 10$. Luego, se sustituye este valor en cada igualdad:

Igualdad	Regiones		Cantidad
(a')	$\#(\text{I}) + \#(\text{II}) + \#(\text{III}) + \#(\text{IV}) + \#(\text{V}) + \#(\text{VII})$	=	30
(b')	$\#(\text{I}) + \#(\text{II}) + \#(\text{III}) + \#(\text{V})$	=	22
(c')	$\#(\text{II}) + \#(\text{V})$	=	16
(d')	$\#(\text{V}) + \#(\text{VII})$	=	20
(f')	$\#(\text{III}) + \#(\text{VII})$	=	7
(g')	$\#(\text{III}) + \#(\text{V})$	=	17

Si se suman las igualdades (f') y (g') se tiene

$$2 \times \#(\text{III}) + \#(\text{V}) + \#(\text{VII}) = 24$$

pero, de la igualdad (d') se tiene $\#(\text{V}) + \#(\text{VII}) = 20$, luego $2 \times \#(\text{III}) = 4$ por lo cual $\#(\text{III}) = 2$. El resto es simple: si se reemplaza el valor de $\#(\text{III})$ en (f') se tiene $\#(\text{VII}) = 5$, y si se reemplaza en (g'), resulta $\#(\text{V}) = 15$. De (c') se tiene ahora $\#(\text{II}) = 1$. Si se sustituye en (b'), se obtiene $\#(\text{I}) = 4$ y, por último, al sustituir en (a') se obtiene $\#(\text{IV}) = 3$. Así pues, se han calculado los cardinales de cada una de las regiones, tal como aparece en la figura 1.32 (g) y en la tabla 1.22.

Región	Conjunto	Cardinal
(I)	$A \cap B \cap C$	4
(II)	$A \cap B \cap C^c$	1
(III)	$A \cap B^c \cap C$	2
(IV)	$A^c \cap B \cap C$	3
(V)	$A \cap B^c \cap C^c$	15
(VI)	$A^c \cap B \cap C^c$	10
(VII)	$A^c \cap B^c \cap C$	5
(VIII)	$A^c \cap B^c \cap C^c$	0

Tabla 1.22: Solución del problema de los idiomas

Ahora puede responderse a cualquier pregunta referida a un conjunto que se exprese como unión de las regiones, por ejemplo:

Condición	Región		Cardinal
Personas que hablan los tres idiomas	(I)	=	4
Personas que hablan sólo español	(VI)	=	10
Personas que hablan español pero no inglés	(II)+(VI)	=	11

1.7.3 ACOTACIÓN DE CARDINALES

En ocasiones los datos disponibles no son suficientes para calcular con exactitud el cardinal de cada una de las regiones. A pesar de ello, puede

obtenerse alguna información. Por ejemplo, si sólo se conoce el cardinal de A y el cardinal de B, no es posible calcular con exactitud el cardinal de $A \cup B$ y el de $A \cap B$, pero pueden *acotarse*, esto es, puede saberse entre qué valores están comprendidos. En efecto, se sabe que

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

como $\#(A \cap B) \geq 0$ se tiene

$$\#(A \cup B) \leq \#(A) + \#(B)$$

Si la suma de $\#(A)$ y $\#(B)$ es mayor que el número de elementos del conjunto universal $\mathscr{U}$, la desigualdad anterior proporciona una información banal, puesto que es de antemano sabido que el cardinal de $A \cup B$ no puede ser mayor que el número total de elementos. Pero si la suma de $\#A$ y $\#B$ es menor que el número de elementos del conjunto universal, entonces la desigualdad anterior proporciona una información significativa acerca del número de elementos que hay en $A \cup B$.

EJEMPLO 1.80 De una encuesta se desprende que uno de cada cuatro españoles es aficionado al fútbol y que uno de cada diez es aficionado al baloncesto. No se dispone de datos acerca de cuántos españoles comparten ambas aficiones. En estas circunstancias no se puede averiguar con exactitud cuántos españoles tienen alguna de las dos aficiones, pero algo sí puede asegurarse: el número de españoles que tienen alguna de las dos aficiones no será superior a la suma de los aficionados al fútbol y los aficionados al baloncesto. Como, de cada 100 españoles, hay 25 aficionados al fútbol y 10 aficionados al baloncesto, puede asegurarse que el porcentaje de españoles que tienen alguna de esas aficiones no supera el 35 %.

Un razonamiento semejante al anterior permite acotar el cardinal de la intersección. Puesto que

$$\#(A \cap B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cup B)$$

y como $\#(A \cup B) \leq \#(\mathscr{U})$, se tiene

$$\#(A \cap B) \geq \#(A) + \#(B) - \#(\mathscr{U})$$

Si la suma $\#(A) + \#(B)$ es menor que $\#(\mathscr{U})$, la desigualdad anterior produce una información banal puesto que de antemano sabemos que $\#(A \cap B) \geq 0$. Pero si la suma $\#(A) + \#(B)$ es mayor que el número de elementos del conjunto universal, la desigualdad anterior proporciona información significativa sobre $A \cap B$.

EJEMPLO 1.81 Si el 80 % de los alumnos de un curso aprueban la asignatura X y el 70 % aprueba la asignatura Y, de cada 100 alumnos, el conjunto A de aprobados en X tiene cardinal 80 y el conjunto B de aprobados en Y tiene cardinal 70, por lo tanto

$$\#(A \cap B) \geq \#(A) + \#(B) - \#(\mathscr{U}) = 80 + 70 - 100 = 50$$

Por tanto, al menos el 50 % de los alumnos habrán aprobado las dos asignaturas.

2

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

Una de las ocupaciones principales de las Matemáticas es el estudio de los números. Esta unidad didáctica se dedica a presentar las diferentes clases de números que el hombre ha inventado para resolver los problemas de cálculo que se plantean en la vida cotidiana: los números naturales, enteros, fraccionarios y reales.

Los números más sencillos que se pueden considerar son los números **naturales**: uno, dos, tres, etc. Son, sin duda, uno de los grandes inventos del hombre, cuyo origen se remonta, probablemente, a los primeros instantes de la civilización. Los números naturales y sus operaciones, suma, resta, multiplicación y división, han significado para el hombre poderosas herramientas que le han permitido avanzar en la senda de la civilización. Con ellos, aprendió a llevar la contabilidad de miembros y pertenencias, tan necesaria para la supervivencia de los grupos sociales. Asimismo, sabiamente utilizados permitían prever muchos acontecimientos relacionados con las creencias, como los ciclos del sol y la luna, o las cosechas, como la secuencia de las estaciones del año. El hombre cayó también en la cuenta de que, cualquiera que sea el número natural que se considere, siempre es posible concebir otro mayor; este hecho pone de manifiesto que el conjunto de los números naturales es infinito. De ahí la necesidad de idear algún procedimiento que permita representarlos de una manera sistemática, es decir, la necesidad de emplear un sistema de numeración. A lo largo de la historia se han utilizado diversos sistemas de numeración; hoy en día se emplea de manera prácticamente universal el conocido sistema decimal, que es un sistema de tipo posicional que utiliza diez dígitos. La primera parte de la sección se dedica al estudio de los sistemas de numeración. Su objetivo principal es conocer la forma de representar un número natural en un sistema de numeración cualquiera y los métodos para cambiar la representación de un número de un sistema de numeración a otro. El hecho de que la resta y la división de dos números naturales no sea siempre posible sirve de punto de partida para considerar nuevas clases de números pero, previamente, es interesante estudiar la cuestión de la divisibilidad de números naturales, introduciendo los conceptos de múltiplo y divisor, números primos y compuestos, la descomposición en factores primos y las nociones de mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

En la segunda sección de la unidad didáctica se introducen los números



enteros. Se estudian las operaciones con los números enteros, razonando la regla de los signos. A continuación se inicia el estudio del álgebra, poderosa herramienta que nos enseña a calcular con expresiones literales. De esta forma es posible enunciar y demostrar de manera formal diversas propiedades, todas ellas muy familiares, de las operaciones con los números enteros.

En la tercera sección se introduce el conjunto de los números **racionales**. El primer objetivo es justificar la necesidad del nuevo conjunto. La motivación es similar a la que se hizo para ampliar el conjunto de los números naturales a los números enteros. El problema que se plantea ahora es que la división de cualquier par de números enteros no siempre es posible; por tanto, es necesario definir un nuevo conjunto de números en el cual esta operación pueda efectuarse siempre. La forma intuitiva de definir los números racionales es considerar que representan unas cantidades que son fracciones de la unidad. Por eso, a los números racionales se les llama también números fraccionarios. Históricamente se representan mediante una notación particular que se denomina quebrado. El estudio de las fracciones o quebrados consiste, principalmente, en analizar sus formas equivalentes y las operaciones que pueden realizarse con ellos: suma, diferencia, producto y división. Una manera de representar los números racionales, coherente con la representación utilizada para los enteros en el sistema de numeración de base diez, es la llamada expresión decimal de los números racionales. Esta representación es muy corriente en la práctica, por lo que es preciso saber encontrar la equivalencia, en uno y otro sentido, entre esta representación y la expresión en forma de quebrado. En la vida cotidiana, los números racionales se presentan con mucha frecuencia en forma de porcentajes. Esto plantea la cuestión de cómo encontrar un número racional que sea equivalente a un determinado porcentaje, e inversamente. Asimismo, muchas cuestiones de cálculo con porcentajes se resuelven acudiendo a las operaciones con los números racionales. Por otra parte, existen algunas expresiones del lenguaje ordinario cuya traducción al lenguaje de números da origen a un número racional. Es útil, por tanto, estar familiarizados con ellas y saber interpretarlas correctamente. La sección finaliza estudiando el orden de los números racionales.

En la cuarta sección la introducción de los números **reales** completa el estudio de los diferentes conjuntos de números. La existencia de números que no se pueden expresar como fracciones es conocida desde antiguo. Son necesarios para resolver muchos problemas de medida, como puede ser medir la diagonal de un cuadrado con unidad de medida igual a su lado o la longitud de una circunferencia con su diámetro. Problemas de este tipo fue-

ron planteados en la antigüedad y no tienen solución con los números que hemos estudiando previamente: naturales, enteros y fraccionarios. Para resolverlos, se necesita definir un nuevo conjunto de números: el conjunto de los números reales. El esquema del estudio de los reales es similar al seguido en las secciones precedentes. En primer lugar, hay que justificar la necesidad de introducir el concepto de número real. Hecho esto, las operaciones con los números reales son una extensión de las correspondientes operaciones con los números racionales y otro tanto ocurre con el orden de los números reales. De nuevo la consideración de expresiones literales permite enunciar propiedades generales de las desigualdades de números reales. Además de las operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división, hay otras operaciones, extensiones de las básicas, como la potenciación y la radicación, que son imprescindibles para muchos fines y adquieren su plena vigencia en el marco de los números reales.

Con los números y sus operaciones pueden resolverse muchos problemas que se plantean en la vida cotidiana. Sin embargo, existen muchas situaciones reales en las que los problemas de cálculo que se presentan tienen un mayor nivel de complejidad. Son aquéllas en las que, no sólo hay que operar con números, sino que hay que encontrar el número, o los números, desconocidos, que verifican determinadas condiciones o criterios relativos a la situación real que se está analizando. Las Matemáticas nos ofrecen una poderosa herramienta para ayudarnos a resolver estas situaciones: las **ecuaciones**. El objetivo de la sección quinta es el estudio de algunos tipos sencillos de ecuaciones. El punto de partida consiste en dar una idea precisa de qué es una ecuación y qué tipo de problemas pueden resolverse con la ayuda de las ecuaciones. Esto conduce al planteamiento de la ecuación, o ecuaciones, que traducen las condiciones del problema al lenguaje de las matemáticas, con las cuales identificar los números desconocidos, o incógnitas. La comprensión de este aspecto es, fundamentalmente, cuestión de práctica, por lo que son necesarios diversos ejemplos. Planteadas las ecuaciones, el siguiente problema es cómo resolverlas. Para ello es útil una clasificación de los tipos de ecuaciones, atendiendo a dos criterios: el número de incógnitas y el exponente al que están elevadas. También es necesario definir de manera clara el concepto de solución de una ecuación y el concepto de ecuaciones equivalentes. A partir de estas ideas básicas, es posible dar tres reglas generales que son válidas para ayudar a resolver ecuaciones. El resto de la sección se dedica al estudio de diferentes tipos de ecuaciones. Esencialmente, el objetivo es, en cada caso, dar métodos para la resolución de la ecuación considerada. En primer lugar, para las ecuaciones lineales con una incógnita, es sencillo encontrar su solución general.

En segundo lugar se estudian los sistemas de ecuaciones lineales de los dos tipos siguientes: dos ecuaciones con dos incógnitas y tres ecuaciones con tres incógnitas, en cuya solución es posible emplear métodos de solución por sustitución o por eliminación.

La unidad didáctica se complementa son los siguientes temas: exponenciales y logaritmos que son muy útiles para simplificar muchos cálculos; cálculos financieros, donde se razonan las fórmulas para el cálculo del interés simple y compuesto y las expresiones de la cuota para la capitalización de inversión y para la amortización de una deuda; finalmente, se estudia la ecuación de segundo grado con una incógnita, discutiendo la forma de su solución general.

2.1 NÚMEROS NATURALES

2.1.1 EL CONCEPTO DE NÚMERO NATURAL

Posiblemente en la edad de las cavernas los hombres no conocieran los números ni los sistemas de numeración. Sin embargo, eran capaces de contar. Un pastor primitivo podía registrar el número de animales que tenía o el número de pieles que quería cambiar, si tenía la precaución de guardar en una bolsa un guijarro, o hacer una marca en una tabla de madera, por cada res o por cada piel. Cada guijarro o marca representaría un animal o una piel. A fuerza de repetir esta operación muchas veces, el hombre primitivo llegó a comprender que la bolsa con guijarros o la tablilla marcada representaban una cualidad del colectivo: el número de animales u objetos que lo componían.

Con otras palabras: desde sus orígenes, el hombre advirtió que una bolsa con guijarros podía representar un rebaño de ovejas, una serie de puntas de flecha o un montón de pieles de oso. Advirtió que todos los conjuntos de objetos o de seres tienen una cualidad común, con independencia de la naturaleza de los objetos o de los seres que los componen. Esa cualidad se denomina **número**.

El número es un concepto que no tiene reflejo en ninguna propiedad tangible. No es una cualidad que se aprecie con los sentidos. Es una cualidad abstracta. Para reconocerla precisamos de los ojos de la razón. Ante ellos, se presenta tan evidente como la forma de los guijarros o el color de las ovejas. Es ilustrativo comparar el número con el concepto de color. El color es una abstracción, una cualidad de los objetos que se manifiesta en forma de colores: rojo, verde, etc.; el número es una cualidad de los colectivos que tiene también distintas manifestaciones. Para designarlas, a lo largo de la historia, se inventaron símbolos y sonidos muy variados. Así nacieron las palabras *uno, two, trois*, etc., y los símbolos *1, 2, III*. Si a las manifestaciones del color se las llamó colores, a las manifestaciones del número, es decir, al 1, 2,..., se las denominó **números naturales**.

Desde esa invención los hombres no necesitaron ya de guijarros ni de tablillas para contar. Libres de estorbos, les bastaba guardar en su memoria una palabra mágica para saber cuántos objetos componían un colección. Con razón puede decirse que los números son los guijarros más livianos del universo.

2.1.2 OPERACIONES CON LOS NÚMEROS NATURALES

El hombre descubrió también que con los números naturales podían realizarse **operaciones aritméticas**. Si se reúne una colección de tres objetos con una de cinco objetos se obtiene un conjunto de ocho objetos que resulta ser una manifestación del número ocho. Se encuentra así la **suma** $(+)$ de números naturales: $3+5=8$. La operación anterior se puede deshacer, dando lugar a una nueva operación, la **diferencia** o **resta** $(-)$; así $8-5=3$. Cuando hay que sumar repetidamente un número consigo mismo varias veces, se encuentra una nueva operación: la **multiplicación** $(\times)$ de números naturales: $3+3+3+3+3=3\times 5=15$. También esta operación se puede deshacer y resulta la **división** $(\div)$; así $15\div 5=3$.

Las dos operaciones directas, suma y multiplicación, pueden realizarse con cualquier par de números, porque la suma y la multiplicación de dos números naturales es siempre un número natural: $8+5=13$ y $8\times 5=40$. En cambio, las operaciones contrarias, resta y división, pueden hacerse unas veces sí y otras veces no. Por ejemplo, no es posible restar 8 de 5, porque no hay ningún número natural que sumado con 8 sea igual a 5. Tampoco es posible dividir 5 entre 3, porque no hay ningún número natural que multiplicado por 3 resulte igual a 5. Como veremos más adelante, para poder realizar siempre estas operaciones, el hombre sintió la necesidad de inventar más números: los números negativos y los números fraccionarios

2.1.3 SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Una vez que el hombre reconoce la cualidad de número, cae en la cuenta de que sus manifestaciones, los números, son infinitas. Por grande que sea un conjunto de objetos, siempre puede imaginarse otro conjunto que tiene un elemento más. Luego, para designar los números naturales se necesita un **sistema de numeración**.

SISTEMA DE NUMERACIÓN 2.1

Una serie infinita de símbolos y un sistema que permita saber a qué número corresponde cada símbolo se denomina **sistema de numeración**.

La elección de un sistema de numeración tiene una importancia capital. Un sistema que emplee símbolos o palabras arbitrarias, sin ninguna regla o sistema de formación, obligará a aprender un símbolo por cada uno de los números. Por el contrario, un sistema que permita, a partir de un pequeño conjunto de símbolos y de una serie de reglas de formación, representar cualquier número es, sin duda, ventajoso.

2.2 TIPOS DE SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Los sistemas de numeración pueden clasificarse en **acumulativos** *y* **posicionales**.

- *En los sistemas* **acumulativos**, *cada símbolo tiene un valor único independiente de donde se escriba.*
- *En los sistemas* **posicionales**, *el valor de un símbolo depende de su posición respecto de los demás.*

EJEMPLO 2.1 El más elemental de los sistemas acumulativos consistiría en añadir "palote" tras "palote", como se muestra en la figura 2.1. Este es, probablemente, el sistema de numeración que debió emplear en su contabilidad rudimentaria el hombre de las cavernas.

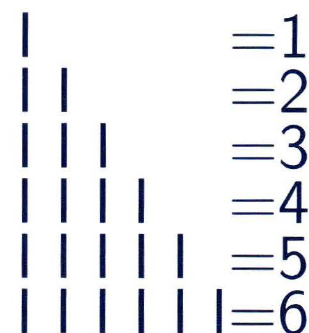


Figura 2.1: Sistema de numeración acumulativo elemental.

EJEMPLO 2.2 El sistema de numeración romano es esencialmente acumulativo. Como símbolos emplea letras del alfabeto cuya equivalencia es la siguiente:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

El sistema obedece a las siguientes reglas:

1. Los símbolos se escriben de derecha a izquierda.
2. Si a la izquierda de un símbolo hay otro mayor o igual se suman sus valores.
3. Cuando un símbolo se coloca a la izquierda de otro que representa un valor mayor, el menor de los valores se resta del mayor.

Por ejemplo, el número romano MDCLXVI es igual a 1666. Como están escritos de mayor a menor se suman sus valores:

$$\text{MDCLXVI} = 1000 + 500 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 = 1666.$$

A su vez, el número romano CD es igual a

$$\text{CD} = 500 - 100 = 400.$$

La regla de sustracción tiene un cierto carácter posicional, puesto que el valor de un símbolo empieza a depender de la posición en que se escriba y permite economizar símbolos; por ejemplo, para escribir el cuatro no hay que escribir IIII, cuatro símbolos, sino IV, dos símbolos.

SISTEMA DECIMAL

El sistema de numeración que se utiliza actualmente de forma prácticamente universal es un sistema posicional: el sistema indo-arábigo, conocido como **sistema decimal**. Este sistema tiene diez símbolos: los nueve dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y el cero, 0. El valor que se asigna a cada símbolo depende de su posición respecto de los demás. Así, no es lo mismo el número 12 que el número 21; porque 12 no significa *el valor de 1 más el valor de 2*, como ocurre en los sistemas acumulativos, sino que 12 significa *una vez 10 más dos veces 1*. Esta manera de contar es bastante natural. Los hombres aprendieron pronto que, para contar un conjunto con muchos elementos, es preferible agrupar los objetos en conjuntos menores. El sistema decimal de numeración está sugerido por una manera de contar que consiste en formar todos los grupos posibles de diez en diez unidades. Según esta idea, un conjunto con doce objetos como el que aparece en la figura 2.2, se dividirá en *un* grupo de diez y *dos* grupos de uno. El símbolo 12 sugiere esta división. La cifra más a la derecha, 2, indica el número de grupos de 1 unidad; la siguiente cifra a su izquierda, el número de *decenas* o grupos de diez unidades. Así, el significado de 12 es

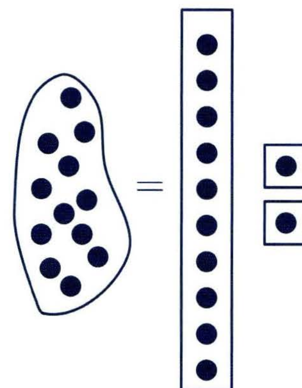


Figura 2.2: 12 = *un* grupo de 10 y *dos* de 1.

$$12 = \text{un grupo de 10 unidades y dos de 1.}$$

Cuando es posible formar más de 10 grupos de diez unidades, las decenas se organizan a su vez en grupos de cien, $100 = 10 \times 10$; por ejemplo, el número 342 puede traducirse

$$342 = 3 \text{ grupos de } 100,\ 4 \text{ de } 10 \text{ y } 2 \text{ de } 1.$$

Así pues, en el sistema decimal, la posición de un símbolo indica el tamaño de los grupos: unidades, decenas, centenas, millares, etc., mientras que el símbolo colocado en una posición indica el número de grupos de ese tamaño que intervienen.

El uso del cero puede parecer hoy banal y evidente, pero exige un grado de abstracción mayor que las demás cifras, ¿qué motivo puede haber para nombrar lo que no existe? Por ello, su aparición en la historia es mucho más tardía y evidencia un hecho frecuente en el devenir del pensamiento: las soluciones más simples y manejables de los problemas suelen estar asociadas a los conceptos más abstractos.

EJEMPLO 2.3 El número decimal 2745 significa

$$2745 = 2 \times 1000 \ + \ 7 \times 100 \ + \ 4 \times 10 \ + \ 5 \times 1$$

Queda un problema por resolver, debido a la necesidad de indicar si alguno de los grupos —unidades, decenas, centenas, etc.— no aparece. Es preciso inventar un símbolo para representar 'ninguno' o 'nada'. Por ejemplo, si los elementos que componen un conjunto se subdividen en un grupo

100	=	10×10	$= 10^2$	*diez al cuadrado*
1000	=	$10 \times 10 \times 10$	$= 10^3$	*diez al cubo*
10000	=	$10 \times 10 \times 10 \times 10$	$= 10^4$	*diez a la cuarta potencia*
100000	=	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	$= 10^5$	*diez a la quinta potencia*

Tabla 2.1: Algunas potencias de 10.

de cien unidades y dos grupos de una unidad, escribimos 102. El símbolo 0, denominado **"cero"**, señala la ausencia de decenas. Como consecuencia del convenio de posición, un cero añadido a la izquierda deja inalterado el número y un cero añadido a la derecha lo multiplica por diez.

EJEMPLO 2.4 El número decimal 2091 equivale a

$$2091 = 2 \times 1000 \ + \ 0 \times 100 \ + \ 9 \times 10 \ + \ 1 \times 1.$$

En el sistema de numeración decimal se cuenta el número de elementos de un conjunto agrupando los objetos en grupos de 1, 10, 100, 1000 , etc. Estos números pueden escribirse de una manera más breve como *potencias* de diez. En la Tabla 2.1 se muestran algunos ejemplos de esta escritura reducida, junto con la manera habitual de leerlas. Al hablar, se suele suprimir la palabra "potencia", y se lee simplemente "diez a la cuarta", "diez a la quinta", etc. Obsérvese que las dos primeras expresiones, "al cuadrado", "al cubo", no siguen la regla general. No es incorrecto decir "a la dos", "a la tres", aunque es infrecuente. Como fácilmente se desprende de la Tabla 2.1 un símbolo como 10^3 es igual al número que resulta de multiplicar 3 veces 10, es decir, $10^3 = 10 \times 10 \times 10$. En una potencia como 10^3, el número 10 se denomina **base** de la potencia, mientras que el número 3 se denomina **exponente**. Según esta notación, $10 = 10^1$. Asimismo, por convenio, se escribe $10^0 = 1$. De esta forma, gracias a las potencias de base 10, el sentido de la escritura decimal es simple

$$4028 = 4 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 8 \times 10^0.$$

Por ello se dice que 10 es la **base** del sistema de numeración decimal.

SISTEMA DE NUMERACIÓN DE BASE CUALQUIERA

Cabe preguntarse si pueden emplearse otros sistemas de numeración con base distinta de 10. La respuesta es sí. Por cada valor de la base, hay un sistema de numeración distinto.

Por ejemplo, los computadores están diseñados para emplear interiormente el sistema de numeración de base 2, también llamado **sistema binario**. En el sistema binario se precisan tan sólo dos cifras 0 y 1 para representar cualquier número, y los conjuntos a contar se agrupan en potencias de 2. En la Tabla 2.2 se muestran las primeras potencias de base 2. En el sistema de numeración de base 2, para calcular la expresión binaria de un número puede emplearse un método gráfico, como se muestra en la figura 2.3, donde se representa el cálculo de la escritura en base 2 del número decimal 7. Con otras palabras: toda colección de 7 objetos puede ser subdividida en un grupo de 4, otro de 2 y otro de 1. Con números:

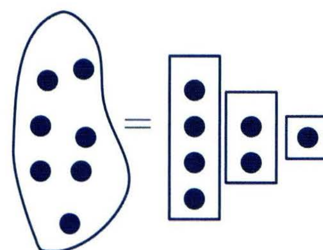


Figura 2.3: 7 = *un* grupo de 4, *uno* de 2 y *uno* de 1.

$$7 = 4+2+1 = 1\times 2^2+1\times 2+1\times 1.$$

Por ello, en base 2, el número decimal 7 se escribe $(111)_2$. Cada cifra se interpreta igual que en el sistema decimal, solo que ahora los grupos en que se se ha subdividido el conjunto son potencias de 2 en lugar de potencias de 10. Así

$$(111)_2 = 1\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0.$$

Esta manera de escribir es semejante a la decimal; el subíndice 2 denota la base del sistema de numeración que se emplea. Cuando la base es 10, suele omitirse el subíndice, salvo que pueda dar lugar a confusión.

En el sistema de numeración ternario, base 3, se precisan tres cifras, 0, 1 y 2. Las colecciones de objetos a contar se agrupan según las potencias de 3. En la Tabla 2.3 se muestran las primeras potencias de 3.

El mismo razonamiento gráfico que se ha empleado para el sistema binario permite escribir un número decimal en base 3. Por ejemplo, el número decimal 7 se escribirá $(21)_3$, ya que toda colección de 7 objetos puede descomponerse en *dos* grupos de tres y *un* grupo de uno. Recíprocamente, dado un número escrito en el sistema de numeración de base 3, su paso al sistema decimal requiere interpretar las cifras que aparecen en cada posición, como

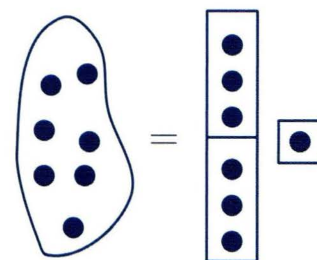


Figura 2.4: 7 = *dos* grupos de 3 y *uno* de 1.

4	=	2×2	=	2^2	*dos al cuadrado*
8	=	$2\times 2\times 2$	=	2^3	*dos al cubo*
16	=	$2\times 2\times 2\times 2$	=	2^4	*dos a la cuarta*
32	=	$2\times 2\times 2\times 2\times 2$	=	2^5	*dos a la quinta*
64	=	$2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2$	=	2^6	*dos a la sexta*

Tabla 2.2: Algunas potencias de 2.

9	=	3×3	=	3^2	*tres al cuadrado*
27	=	$3\times 3\times 3$	=	3^3	*tres al cubo*
81	=	$3\times 3\times 3\times 3$	=	3^4	*tres a la cuarta*
243	=	$3\times 3\times 3\times 3\times 3$	=	3^5	*tres a la quinta*
729	=	$3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3$	=	3^6	*tres a la sexta*

Tabla 2.3: Algunas potencias de 3.

el número de grupos de la potencia correspondiente de 3. Por ejemplo

$$(21)_3 = 2\times 3 + 1\times 1 = 7.$$

El sistema de numeración de base 5 requiere cinco cifras: 0, 1, 2, 3 y 4, y la posición de las cifras indica el número de grupos de potencias de cinco en que ha sido subdividida la colección. En la Tabla 2.4 se muestran las primeras potencias de cinco.

25	=	5×5	=	5^2	*cinco al cuadrado*
125	=	$5\times 5\times 5$	=	5^3	*cinco al cubo*
625	=	$5\times 5\times 5\times 5$	=	5^4	*cinco a la cuarta*
3125	=	$5\times 5\times 5\times 5\times 5$	=	5^5	*cinco a la quinta*
15625	=	$5\times 5\times 5\times 5\times 5\times 5$	=	5^6	*cinco a la sexta*

Tabla 2.4: Algunas potencias de 5.

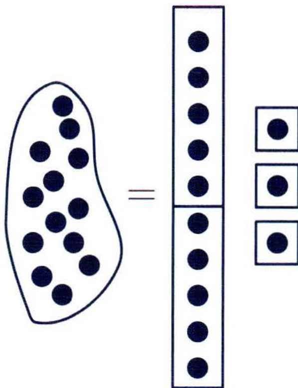


Figura 2.5: 13 = *dos* grupos de 5 y *tres* de 1.

Por ejemplo, cualquier conjunto de trece objetos puede ser dividido en *dos* grupos de cinco y *tres* de uno. Por tanto el número decimal 13 se escribe en el sistema de base cinco como $(23)_5$. Esto se muestra de manera gráfica en la figura 2.5. En el otro sentido, el número $(431)_5$, escrito en el sistema de numeración de base cinco, es igual al número decimal 116, puesto que

$$(431)_5 = 4\times 5^2 + 3\times 5 + 1\times 1 = 100 + 15 + 1 = 116.$$

Podemos llegar entonces a la siguiente conclusión.

- *Cualquier número natural b puede ser* **base** *de un sistema de numeración.*

- *Un sistema de numeración de base b exige disponer de b* ***símbolos*** *que hagan el papel de cifras del sistema.*

Los símbolos de un sistema de numeración de base b pueden escogerse arbitrariamente, pero es usual emplear los derivados del sistema decimal usado comúnmente. Así, el sistema binario, precisa dos símbolos, que suelen ser 0 y 1. El sistema ternario, de base 3, precisa tres símbolos que suelen ser 0, 1 y 2. El sistema de base 12 necesita doce símbolos, que pueden ser

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,(10),(11).$$

Los dos últimos se indican con un paréntesis para hacer patente que es un símbolo único. Téngase presente que, en el sistema de base 12, el símbolo (11) significa $11 \cdot 1$ mientras que 11 es el número $1 \cdot 10 + 1 \cdot 1$. En ocasiones, los símbolos mayores que 9 se designan con letras. Por ejemplo, en el sistema de base 16 o *hexadecimal*, que se emplea en Informática, precisa de 16 símbolos, que suelen ser:

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,\quad A,\quad B,\quad C,\quad D,\quad E,\quad F$$

entendiendo que las letras A, B, C, D, E, F representan respectivamente diez, once, doce, trece, catorce y quince unidades.

EJEMPLO 2.5 El símbolo $(1F)_{16}$ representa al número decimal:

$$(1F)_{16} = 1 \cdot 16 + 15 = 31.$$

La base del sistema de numeración se indica con un subíndice. Por ejemplo $(101)_2$ es un número del sistema binario mientras que $(5043)_6$ es un número del sistema de base 6. Al escribir un número en el sistema de numeración de base b, la posición de cada cifra indica el tamaño de cada grupo (potencia de b) en que ha sido subdividido el conjunto que contamos. Así que $(3021)_b$ significa $3 \cdot b^3 + 0 \cdot b^2 + 2 \cdot b + 1$, supuesto que b es superior a 3.

CAMBIO DE BASE DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN

El problema de calcular la expresión de un número en un sistema de numeración, a partir de su expresión en otro sistema, se denomina **cambio de base** del sistema de numeración. Los mecanismos de cálculo que permiten realizar el cambio de base de forma simple y automática se denominan **algoritmos de cambio de base**.

Algoritmo de cambio de base b a decimal

Para escribir en el sistema decimal un número dado en base b, basta seguir la definición de sistema de numeración.

EJEMPLO 2.6

$$\begin{aligned}(110101)_2 &= 1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2+1\cdot 1=(53)_{10}.\\ (3241)_7 &= 3\cdot 7^3+2\cdot 7^2+4\cdot 7+1\cdot 1=(1156)_{10}.\\ (1(10)0(11))_{12} &= 1\cdot 12^3+10\cdot 12^2+0\cdot 12+11\cdot 1=(3179)_{10}.\end{aligned}$$

Este proceso de cálculo puede hacerse más cómodo y simple si se ordenan las operaciones. Por ejemplo, para escribir el número $(110101)_2$ en base 10 es preciso calcular

$$1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0$$

pero las operaciones son más fáciles si, en lugar de calcular cada producto y sumar, se realiza en el orden que marcan los paréntesis de la expresión

$$1+2\cdot(0+2\cdot(1+2\cdot(0+2\cdot(1+2\cdot 1)))).$$

Esto es, se calcula de dentro a fuera como se ve en la tabla 2.5.

En la práctica, el cálculo se ordena del siguiente modo:

Se escribe en una línea la expresión del número cuya forma decimal se quiere hallar, en este caso (110101).

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

En la línea siguiente se escribe la base del sistema de numeración en que viene expresado el número

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

y se *baja* la primera cifra del número.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & & & & & & \\ \hline & \mathbf{1} & & & & & \end{array}$$

$1+2\cdot(0+2\cdot(1+2\cdot(0+2\cdot(1+2\cdot1))))$	
$2\cdot1$	2
$(1+2\cdot1)$	3
$2\cdot(1+2\cdot1)$	6
$(0+2\cdot(1+2\cdot1))$	6
$2\cdot(0+2\cdot(1+2\cdot1))$	12
$(1+2\cdot(0+2\cdot(1+2\cdot1)))$	13
$2\cdot(1+2\cdot(0+2\cdot(1+2\cdot1)))$	26
$(0+2\cdot(1+2\cdot(0+2\cdot(1+2\cdot1))))$	26
$2\cdot(0+2\cdot(1+2\cdot(0+2\cdot(1+2\cdot1))))$	52
$1+2\cdot(0+2\cdot(1+2\cdot(0+2\cdot(1+2\cdot1))))$	53

Tabla 2.5: Orden de los cálculos para cambiar de base b a base decimal.

En el primer paso se multiplica la base (2) por el número que se ha *bajado*. El resultado de la multiplicación se escribe en la segunda línea. Este paso es equivalente al cálculo del producto del primer paréntesis interior.

	1	1	0	1	0	1
2		**2**				
	1					

$$2\cdot1=2.$$

En el segundo paso se suman los números de la segunda columna, el resultado (3) se escribe en la misma columna, por debajo de la línea. Este paso es equivalente al cálculo de la suma

	1	1	0	1	0	1
2		2				
	1	**3**				

$$1+2\cdot1=3.$$

A partir de aquí se repiten los pasos anteriores: se multiplica la base (2) por la última suma obtenida (3), y el resultado se escribe en la segunda línea. Esto equivale a calcular

	1	1	0	1	0	1
2		2	**6**			
	1	3				

$$2\cdot(1+2\cdot1)=6.$$

Luego, se suman los números de la tercera columna. El resultado se escribe bajo la línea. Esta operación equivale a calcular

	1	1	0	1	0	1
2		2	6			
	1	3	**6**			

$$0+2\cdot(1+2\cdot 1)=6.$$

Los últimos pasos serán:

	1	1	0	1	0	1
2		2	6	**12**		
	1	3	6			

	1	1	0	1	0	1
2		2	6	12		
	1	3	6	**13**		

	1	1	0	1	0	1
2		2	6	12	**26**	
	1	3	6	13		

	1	1	0	1	0	1
2		2	6	12	26	
	1	3	6	13	**26**	

	1	1	0	1	0	1
2		2	6	12	26	**52**
	1	3	6	13	26	

	1	1	0	1	0	1
2		2	6	12	26	52
	1	3	6	13	26	**53**

La última suma es igual al resultado: el número binario $(110101)_2$ tiene como expresión decimal 53.

EJEMPLO 2.7 Hallar la expresión decimal del número $(1201)_3$.

	1	2	0	1
3		3	15	45
	1	5	15	**46**

Luego la expresión decimal de $(1201)_3$ es 46.

EJEMPLO 2.8 Hallar la expresión decimal del número $(10(10))_{11}$. Obsérvese que $(10(10))_{11}$ significa "*un* grupo de tamaño 11^2, *ningún* grupo de tamaño 11 y *diez* grupos de tamaño 1".

	1	0	10
11		11	121
	1	11	**131**

La expresión decimal del número $(10(10))_{11}$ es 131.



Algoritmo de cambio de base decimal a base b

Para hallar la expresión de un número decimal en el sistema de numeración de base b hay que realizar divisiones sucesivas del número decimal por la base b. Por ejemplo, para hallar la expresión del número decimal 14 en el sistema de base 11, basta dividir 14 entre 11.

$$\begin{array}{r|l} 14 & 11 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$$

El cociente de la división, 1, indica cuántos grupos de tamaño 11 podemos formar; el resto de la división, 3, muestra cuántos grupos de unidades quedan después de formar los grupos de tamaño 11. Se tiene así

$$14 = 1 \cdot 11 + 3 \cdot 1$$

luego $14 = (13)_{11}$.

Cuando el cociente de la primera división por la base b del sistema de numeración es mayor que ésta, cabe la posibilidad de formar grupos de tamaño b^2. Hay que volver a dividir el cociente por b. Por ejemplo, para escribir el número decimal 15 en el sistema de numeración de base 3, se comienza por dividir 15 entre 3.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \cline{2-2} \mathbf{0} & 5 \end{array}$$

El cociente de esta división es 5, mayor que la base 3. Esto indica que los cinco grupos de 3 que se han formado pueden, a su vez, agruparse en uno de nueve (3^2) y un resto.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \cline{2-2} \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{array}$$

Las dos divisiones sucesivas se pueden ordenar en una única expresión:

$$\begin{array}{r|rl} 15 & 3 & \\ \cline{2-2} \mathbf{0} & 5 & \multicolumn{1}{|l}{3} \\ \cline{3-3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{array}$$

Operaciones que se resumen en la igualdad:

$$15 = \mathbf{1} \cdot 3^2 + \mathbf{2} \cdot 3 + \mathbf{0} \cdot 1.$$

Luego el número decimal 15 es igual a $(120)_3$, en el sistema de base 3.



$$\begin{array}{lllllllll}
432 & \underline{|2} & & & & & & & \\
\mathbf{0} & 216 & \underline{|2} & & & & & & \\
 & \mathbf{0} & 108 & \underline{|2} & & & & & \\
 & & \mathbf{0} & 54 & \underline{|2} & & & & \\
 & & & \mathbf{0} & 27 & \underline{|2} & & & \\
 & & & & \mathbf{1} & 13 & \underline{|2} & & \\
 & & & & & \mathbf{1} & 6 & \underline{|2} & \\
 & & & & & & \mathbf{0} & 3 & \underline{|2} \\
 & & & & & & & \mathbf{1} & \mathbf{1}
\end{array}$$

Tabla 2.6: Ejemplo de cambio del sistema decimal al binario.

EJEMPLO 2.9 El número decimal $(432)_{10}$, se escribe en el sistema de base 2 de la forma $(110110000)_2$ ya que

$$432 = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1.$$

Los cálculos prácticos vienen reflejados en la Tabla 2.6.

EJEMPLO 2.10 El decimal 432, en el sistema de base 11 se escribe $(363)_{11}$, puesto que

$$\begin{array}{lll}
432 & \underline{|\ 11} & \\
\mathbf{3} & 39 & \underline{|\ 11} \\
 & \mathbf{6} & \mathbf{3}
\end{array}$$

y, por tanto,

$$432 = 3 \cdot 11^2 + 6 \cdot 11 + 3 \cdot 1.$$

Así pues, $432 = (363)_{11}$.

2.1.4 DIVISIBILIDAD

CONCEPTOS BÁSICOS

Como ya se ha señalado, no siempre es posible dividir un número natural por otro, de manera que se obtenga un cociente natural y resto cero. Cuando esto ocurre decimos que la división es exacta, lo que abre paso al estudio de las cuestiones relacionadas con la divisibilidad de números naturales. Por ejemplo, si se divide el número natural 14 entre el número natural 7 el resultado es el número natural 2. Este número se llama cociente de la división. La división resulta ser exacta, es decir, no sobra ninguna unidad o, dicho de otra manera, el resto de la división es 0. Sin embargo si se quiere dividir 14 entre 4 resulta que el cociente es 3 y el resto es 2. La división en este caso no es exacta.

DIVISIBILIDAD

2.4 *Un número natural c se dice* **divisible** *por otro a si al dividir c entre a la división es exacta, es decir, el cociente es otro número natural y el resto de la división es cero.*

EJEMPLO 2.11 El número natural 26 es divisible por 2 y también por 13, pero no es divisible por 4.

El concepto de divisibilidad puede entenderse de otra manera. Si c es divisible por a y llamamos b al cociente exacto de la división de c entre a, resulta $c = a \cdot b$. Es decir, cuando un número natural c puede escribirse



como producto de dos números naturales a y b se dice que c es divisible por a y que c es divisible por b. Se dice también que a y b son *factores* o *divisores* de c, y que c es *múltiplo* de a y de b.

DIVISORES Y MÚLTIPLOS

*Si c y a son dos números naturales, las tres expresiones: "a **divide** a c", "a es un **divisor** de c", "c es **múltiplo** de a" son equivalentes a decir que la división de c entre a es exacta.* 2.5

FACTORIZACIÓN

*Si c es un número natural y a,b son números naturales tales que $c = a \cdot b$, el producto $a \cdot b$ se denomina **una factorización** o **descomposición en factores** de c.* 2.6

Todo número se puede factorizar, al menos, de las dos maneras siguientes:

$$c = c \cdot 1 = 1 \cdot c$$

por ello se llaman **factorizaciones triviales** y 1 y c **divisores triviales**. Hay números que pueden factorizarse de maneras distintas de las triviales. Por ejemplo, el número 75 puede factorizarse como:

$$75 = 5 \cdot 15 = 3 \cdot 25.$$

En cambio, hay números que no admiten más factorizaciones que las triviales. Por ejemplo, las únicas factorizaciones que admite el número 29 son:

$$29 = 1 \cdot 29 = 29 \cdot 1.$$

NÚMERO COMPUESTO

*Un número natural, mayor que 1, que tiene alguna factorización, además de las triviales, se dice **compuesto**.* 2.7

EJEMPLO 2.12 Los números 8, 12, 15, 42, 75 son compuestos.

NÚMERO PRIMO

*Un número natural que no tiene más factorizaciones que las triviales se dice **primo** o, equivalentemente, un número c, mayor que 1, es **primo** si no tiene más divisores que 1 y c.* 2.8

EJEMPLO 2.13 Los números 2, 3, 5, 7, 11 son primos.

EJEMPLO 2.14 Entre los 100 primeros números naturales hay 25 números primos que son:

2	3	5	7	11	13	17
19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73
79	83	89	97			

Todos los demás, excepto el 1, son compuestos. El número 1 no se considera ni primo ni compuesto.

REGLAS DE DIVISIBILIDAD

Pueden formularse diversas reglas que anticipan cuando un número es divisible por otro. En particular, para saber si un número es divisible por 2, por 3 o por 5 hay tres reglas muy sencillas.

DIVISIBILIDAD POR 2

2.9 *Un número es divisible por* 2 *si termina en* 0, 2, 4, 6, 8.

EJEMPLO 2.15 Los números 30, 32, 14, 26 y 58 son divisibles por 2, mientras que 31, 53, 75, 87 y 99 no son divisibles por 2.

Los números divisibles por 2 se denominan números **pares**, mientras que los números que no son divisibles por 2 se denominan números **impares**.

DIVISIBILIDAD POR 3

2.10 *Un número es divisible por* 3 *si la suma de sus cifras es divisible por* 3.

EJEMPLO 2.16 El número 102 es divisible por 3, ya que la suma de sus cifras, $1+0+2=3$, es divisible por tres, mientras que el número 215 no es divisible por 3, ya que la suma de sus cifras, $2+1+5=8$, no es divisible por 3.

DIVISIBILIDAD POR 5

2.11 *Un número es divisible por* 5 *si termina en* 0 *o en* 5.

EJEMPLO 2.17 Los números 15, 70 y 105 son divisibles por 5, mientras que 14, 27 y 38 no lo son.

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Como hemos visto, todo número compuesto c puede escribirse como producto de dos factores que no son ni 1 ni c. Por ejemplo, el número 24 puede escribirse como $24 = 3 \cdot 8$. Ahora, si alguno de los factores es compuesto como es el caso del número 8, puede factorizarse a su vez. Como



$8 = 2 \cdot 4$, podemos poner $24 = 3 \cdot 2 \cdot 4$. Este proceso puede repetirse hasta que todos los factores sean primos. En este caso, como $4 = 2 \cdot 2$, resulta finalmente $24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Tenemos entonces el siguiente resultado:

Cada número natural mayor que 1 o es un número primo o es producto de números primos. 2.12

EJEMPLO 2.18 Como $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$, el número 66 se descompone en producto de los factores primos 2, 3 y 11.

EJEMPLO 2.19 Dado que $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ el número 60 se descompone en producto de los factores primos 2, dos veces, 3 y 5.

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

La serie de todos los números primos que multiplicados dan como resultado un número dado c se llama **descomposición en factores primos de** c. 2.13

Para hallar la descomposición en factores primos de un número conviene ordenar los cálculos. Un buen procedimiento es hacer divisiones sucesivas por los números primos, de menor a mayor, hasta agotar cada factor.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la descomposición en factores primos del número 84. Se comienza por probar si es divisible por 2.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ \hline 84 & 42 \\ 0 & \end{array}$$

Como la división es exacta, 84 es divisible por 2. Ahora el cociente 42 de la división puede contener algún otro factor de 2. Por ello se prueba a dividir de nuevo el cociente por 2.

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ \hline 42 & 21 \\ 0 & \end{array}$$

De nuevo la división resulta exacta, por lo que se repite la operación de dividir por 2, para probar si el cociente 21 es divisible por 2.

$$\begin{array}{r|l} 21 & 2 \\ \hline 21 & 10 \\ 1 & \end{array}$$

Como 21 no es divisible por 2 se prueba si es divisible por el siguiente factor primo, en este caso 3.

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ \hline 21 & 7 \\ 0 & \end{array}$$

El cociente de la división, 7, es primo. Luego el único factor restante es 7. Las divisiones sucesivas se resumen en:

$$\begin{aligned} 84 &= 2 \cdot 42 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 21 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \end{aligned}$$

Así la descomposición en factores primos del número 84 es

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7.$$

A menudo, los cálculos anteriores se ordenan en una tabla que hace más breve la escritura. En el caso del número 84 la tabla será

$$\begin{array}{r|ll} 84 & 2 & (84 \div 2 = 42) \\ 42 & 2 & (42 \div 2 = 21) \\ 21 & 3 & (21 \div 3 = 7) \\ 7 & 7 & (7 \div 7 = 1) \\ 1 & & \end{array}$$

Como puede verse, la tabla tiene dos columnas. En la columna de la izquierda se escribe el número cuya descomposición queremos hallar y los cocientes sucesivos. En la columna de la derecha se escriben los factores primos. El proceso termina cuando en la columna de la izquierda aparece un 1. La descomposición en factores primos es igual al producto de los números de la columna de la derecha.

EJEMPLO 2.20 Hallar la descomposición en factores primos del número 350. Los cálculos se resumen en la tabla:

$$\begin{array}{r|l} 350 & 2 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

y 350 se descompone en el producto de los factores primos $2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Los números 36 y 42 comparten el 3 como divisor, ya que $36 = 3 \cdot 12$ y $42 = 3 \cdot 14$. Entonces:

DIVISOR COMÚN

2.14 *Un número a se dice* **divisor común** *de los números b y c si divide a ambos números, esto es, existen sendos números naturales b_1, c_1 tales que*

$$b = a \cdot b_1, \quad c = a \cdot c_1$$

EJEMPLO 2.21 Los números 18 y 48 tienen cuatro, y sólo cuatro, divisores comunes: 1, 2, 3 y 6.



Dos números naturales cualesquiera b y c, siempre tienen algún divisor común, puesto que al menos 1 divide a ambos. El mayor de los divisores comunes recibe un nombre especial:

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

2.15 *Se llama* **máximo común divisor** *de dos números a y b al mayor de los divisores comunes. El máximo común divisor de a y b se representa por*

$$m.c.d.(a,b)$$

EJEMPLO 2.22 Los números 124 y 16 tienen los divisores comunes: 1, 2 y 4. El mayor de ellos es 4, luego m.c.d.$(124,16) = 4$.

Cálculo del máximo común divisor

Si se conoce la descomposición en factores primos de b y c, el cálculo del máximo común divisor es muy simple. Por ejemplo, si $b = 84$ y $c = 360$, entonces

$$b = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7, \qquad c = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

los divisores comunes no pueden tener otros factores primos que 2 y 3; serán de la forma:

$$2^{n_1} \cdot 3^{n_2}.$$

El más grande de los divisores comunes será aquel que tenga los mayores exponentes posibles. Pero el exponente n_1 no puede ser mayor que 2, a fin de que divida a 84, ni mayor que 3, para que sea divisor de 360. Por consiguiente, la mayor elección posible para n_1 es 2. De igual modo, se llega a la conclusión de que la mayor elección posible para n_2 es 1. Luego

$$\text{m.c.d.}(84,360) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

EJEMPLO 2.23 Para hallar el máximo común divisor de 225 y 90, se calcula la descomposición en factores primos de ambos números:

$$\begin{aligned} 225 &= 3^2 \cdot 5^2 \\ 90 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{aligned}$$

luego m.c.d.$(225,90) = 3^2 \cdot 5 = 45$.

En ocasiones, el cálculo de la descomposición en factores primos de un número puede resultar trabajosa, sobre todo cuando ese número tiene factores primos mayores que 2, 3, 5 ó 7. Conviene entonces disponer de un procedimiento mecánico para calcular el máximo común divisor, como el que se va a estudiar a continuación basado en el **algoritmo de la división**.

Supongamos que a y b son los números cuyo máximo común divisor se quiere calcular y que $b < a$. Si se divide a entre b resulta $a = b \cdot c + r$, donde c es el cociente de la división y r el resto. Observemos que el resto debe cumplir $0 \leq r < b$. Ahora bien, si el resto es cero ($r = 0$) entonces b divide a a y en este caso es claro que $\text{m.c.d.}(a,b) = b$, En otro caso, puede escribirse $r = a - b \cdot c$. Entonces todo número que divide a a y b divide también a r. Resulta así que los números a, b y los números b, r tienen los *mismos divisores comunes*. Por consiguiente $\text{m.c.d.}(a,b) = \text{m.c.d.}(b,r)$. Tenemos entonces el siguiente resultado:

2.16 *Sean a y b dos números naturales tales que $b < a$ y sean c y r, respectivamente, el cociente y el resto de la división de a entre b. Entonces se cumple que:*

$$\text{m.c.d.}(a,b) = \text{m.c.d.}(b,r)$$

Gracias a la igualdad del resultado anterior, el cálculo del máximo común divisor de los números a y b se simplifica, puesto que basta dividir a entre b y calcular el máximo común divisor de b y el resto r; este cálculo será más sencillo ya que los nuevos números son más pequeños que los iniciales. Además el procedimiento se puede aplicar repetidamente, convirtiendo el cálculo del máximo común divisor en una serie de divisiones.

EJEMPLO 2.24 Hallar el máximo común divisor de los números 258 y 78. Aplicamos el método anterior:

Primero se divide el mayor 258 entre el menor 78.

$$\begin{array}{r|l} 258 & 78 \\ \cline{2-2} 234 & 3 \\ \cline{1-1} 24 & \end{array}$$

es decir: $258 = 78 \cdot 3 + 24$.

Después se divide el divisor 78 por el resto 24.

$$\begin{array}{r|l} 78 & 24 \\ \cline{2-2} 72 & 3 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

es decir: $78 = 24 \cdot 3 + 6$.

El procedimiento se repite; otra vez se divide el divisor 24 por el resto 6.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 6 \\ \cline{2-2} 24 & 4 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

es decir: $24 = 6 \cdot 4$.

Como 6 es divisor de 24 se tendrá m.c.d.$(24,6) = 6$, por lo tanto:

$$\text{m.c.d.}(258,78) = \text{m.c.d.}(78,24) = \text{m.c.d}(24,6) = 6.$$

El máximo común divisor de 258 y 78 es 6.

EJEMPLO 2.25 Hallar el máximo común divisor de los número 371 y 428. Aplicamos el método anterior:

Primero se divide 428 entre 371

$$\begin{array}{r|l} 428 & 371 \\ \cline{2-2} 371 & 1 \\ \hline 57 & \end{array}$$

es decir: $428 = 371 \cdot 1 + 57$.

Ahora, como m.c.d.$(371,428) =$ m.c.d.$(371,57)$, se divide 371 entre 57

$$\begin{array}{r|l} 371 & 57 \\ \cline{2-2} 342 & 6 \\ \hline 29 & \end{array}$$

es decir: $371 = 57 \cdot 6 + 29$.

Se tiene ahora m.c.d.$(371,57) =$ m.c.d.$(57,29)$, entonces hay que dividir 57 entre 29.

$$\begin{array}{r|l} 57 & 29 \\ \cline{2-2} 29 & 1 \\ \hline 28 & \end{array}$$

es decir: $57 = 29 \cdot 1 + 28$.

De nuevo m.c.d.$(57,29) =$ m.c.d.$(29,28)$; ahora se divide 29 entre 28.

$$\begin{array}{r|l} 29 & 28 \\ \cline{2-2} 28 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

es decir $29 = 28 \cdot 1 + 1$.

Por tanto

$$\text{m.c.d.}(29,28) = \text{m.c.d.}(28,1)$$

Como m.c.d.$(28,1) = 1$, si se vuelve atrás en la cadena de igualdades, se tendrá el resultado final siguiente:

$$\begin{aligned} \text{m.c.d.}(371,428) &= \text{m.c.d.}(371,57) \\ &= \text{m.c.d.}(57,29) \\ &= \text{m.c.d.}(29,28) \\ &= \text{m.c.d.}(28,1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior resultó que el máximo común divisor de dos números era 1. Cuando esto sucede los números en cuestión no tienen divisores comunes salvo 1. Este caso recibe un nombre especial.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ

2.17 *Dos números naturales a, b se dicen* **primos entre sí**, *si se verifica m.c.d.$(a,b) = 1$.*

EJEMPLO 2.26 Los números 39 y 22 son primos entre sí. En efecto, la descomposición en factores primos de cada uno de los números es

$$39 = 3 \cdot 13, \qquad 22 = 2 \cdot 11.$$

Por lo tanto, los dos números no tienen factores primos comunes: el único divisor común es 1.

EJEMPLO 2.27 Los números 17 y 51 no son primos entre sí. En efecto, su descomposición en factores primos es

$$17 = 1 \cdot 17, \qquad 51 = 3 \cdot 17.$$

Por tanto, tienen un factor primo común: 17. Obsérvese que 17 es un número primo, pero 17 y 51 no son primos entre sí.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Dos números naturales a y b tienen siempre múltiplos comunes. Por ejemplo, el producto de los dos números es múltiplo de ambos. El menor de los múltiplos comunes recibe un nombre especial.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

2.18 *Se llama* **mínimo común múltiplo** *de dos números naturales a y b al menor de sus múltiplos comunes. El mínimo común múltiplo se representa por*

$$\text{m.c.m.}(a,b).$$

EJEMPLO 2.28 Los números 4 y 6 tienen infinitos múltiplos comunes, como 12, 24, 120, 1500, ... El menor de todos ellos, 12, es el mínimo común múltiplo de 4 y 6: m.c.m.$(4,6)$.

Cálculo del mínimo común múltiplo

Cuando se conoce la descomposición en factores primos de los dos números, hallar el mínimo común múltiplo es sencillo. Para que un número sea múltiplo común debe contener todos los factores primos de cada número elevados a un exponente mayor o igual que cualquiera de los exponentes que aparecen en ambas descomposiciones. Para que sea el menor de los múltiplos comunes, el exponente debe ser el mayor de los exponentes del factor en las dos descomposiciones.

EJEMPLO 2.29 Los números 12 y 15 tienen infinitos múltiplos comunes. Así 180, 60 y 300 son múltiplos comunes ya que

$$\begin{aligned} 180 &= 12 \cdot 15, & 180 &= 15 \cdot 12, \\ 60 &= 12 \cdot 5, & 60 &= 15 \cdot 4, \\ 300 &= 12 \cdot 25, & 300 &= 15 \cdot 20. \end{aligned}$$



Ahora bien, la descomposición en factores primos de los dos números es:

$$12 = 2^2 \cdot 3, \qquad 15 = 3 \cdot 5.$$

El menor de los múltiplos comunes tendrá como factores primos todos los que aparezcan en alguna de las descomposiciones, esto es 2, 3 y 5. El menor de los múltiplos comunes será $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

De los procedimientos para calcular el máximo común divisor (m.c.d.) y el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números a partir de su descomposición en factores primos, se sigue la importante relación:

El producto de dos números naturales a y b es igual al producto de su mínimo común múltiplo por su máximo común divisor 2.19

$$a \cdot b = \text{m.c.m.}(a,b) \times \text{m.c.d.}(a,b).$$

Por ello, cuando el cálculo de la descomposición en factores primos de los números a y b no es fácil, para hallar el mínimo común múltiplo, es preferible calcular primero el máximo común divisor por el algoritmo de la división y, a continuación, emplear el siguiente resultado:

El mínimo común múltiplo de dos números naturales a y b es igual al cociente entre su producto y el máximo común divisor de dichos números 2.20

$$\text{m.c.m.}(a,b) = \frac{a \cdot b}{\text{m.c.d.}(a,b)}.$$

EJEMPLO 2.30 Hallar el mínimo común múltiplo de los números 1455 y 1164.

Se calcula primero el máximo común divisor de 1455 y 1164 mediante el algoritmo de la división.

$$\begin{array}{r|l} 1455 & 1164 \\ \hline 1164 & 1 \\ \hline 291 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1164 & 291 \\ \hline 1164 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Luego

$$\text{m.c.d.}(1455,1164) = \text{m.c.d.}(1164,291) = 291.$$

Ahora

$$\text{m.c.m.}(1455,1164) = \frac{1455 \cdot 1164}{\text{m.c.d.}(1455,1164)}.$$

Por lo tanto

$$\text{m.c.m.}(1455,1164) = 5820.$$

2.2 NÚMEROS ENTEROS

2.2.1 EL CONCEPTO DE NÚMERO ENTERO

Entre las necesidades de cálculo del pastor cavernícola que descubrió los números naturales y las del hombre actual hay diferencias radicales. El hombre rupestre vivía sometido a la naturaleza; sus necesidades eran elementales, mientras que el hombre de hoy vive en un mundo dominado por las creaciones del propio hombre; su mundo está gobernado por conceptos y abstracciones. No es difícil imaginar cómo, en algún momento del transcurrir de la historia, el hombre descubrió que para medir ciertas magnitudes es conveniente considerar su variación en un sentido y otro, por encima y por debajo de un origen prefijado. Veamos algunos ejemplos:

- Los bloques de viviendas tienen pisos por encima y por debajo del nivel del suelo. Si se pretende numerar esos pisos, parece natural denominar piso 0 al que se encuentra al nivel del suelo, y llamar 1 al primero sobre ese nivel, 2 al segundo sobre el nivel, etc.; entonces se precisan otros números "menores" que cero, para designar a los pisos por debajo del suelo.

- Si la temperatura desciende 10°C a partir de una temperatura de 5°C, se alcanzan los 5°C bajo cero. Ello nos informa de cuanto tiene que volver a subir para alcanzar el punto de fusión del hielo. Si no se contase "por debajo de cero" se carecería de tal información.

- Si los reintegros son superiores a los ingresos, una cuenta corriente tendrá "saldo negativo" y el banco seguirá calculando dichas cantidades, incluso "intereses negativos", en "números rojos" para controlar exactamente la deuda.

Las Matemáticas proporcionan una manera unificada de tratar las cantidades como 5°C bajo cero o 1500 euros en números rojos. Todo consiste en anteponer al número el signo menos e interpretarlo como la cantidad que falta para alcanzar el origen de la escala de que se trate; así se dice que la temperatura es de -5°C o que el saldo de una cuenta es de -1500 euros. Estos números se llaman **negativos**.

Por cada número natural, como 1, 2 ó 304, hay otro negativo, -1, -2, -304. En este contexto, a los números naturales se les denomina números **positivos**. Por ello, con frecuencia, al hablar de un número natural se insiste en su carácter positivo y se escribe $+3$ en lugar de 3.

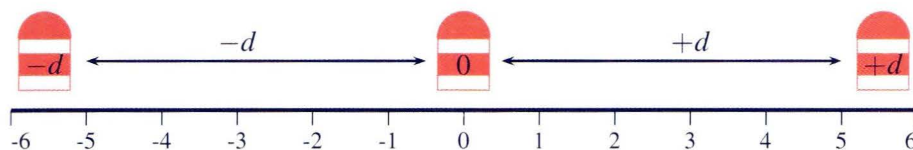


Figura 2.6: Representación gráfica de los números enteros.

NÚMEROS ENTEROS

A los números naturales, sus negativos y el cero se les denomina **números enteros**. 2.21

Resulta así que los números enteros provienen de incorporar a los números ya conocidos, los naturales y el cero, otros números que permiten expresar unas cantidades un tanto extrañas, aquellas que se consideran negativas, pero imprescindibles a partir de cierta complicación del modo de vida.

Los números enteros pueden representarse gráficamente, como se muestra en la figura 2.6. Imaginemos una carretera en la que se considera como punto de referencia 0 la posición de cierto vehículo; los vehículos que le precedan a una cierta distancia d tendrán una ventaja respecto al vehículo prefijado de $+d$, y los que vayan rezagados a una distancia d, ocuparán la posición $-d$. Así, si sólo se considera el número entero de kilómetros que separan dos puntos, las posiciones de un vehículo respecto del punto de referencia, escritas en orden creciente, pueden ser

$$\ldots\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, \ldots\ldots$$

Según esta imagen de los hitos kilométricos de la carretera, la posición -4 puede entenderse del modo siguiente: el signo $-$ (*menos*) indica que la posición es a la *izquierda* del punto de referencia y la cifra 4 señala la *distancia* al punto de referencia. En el otro sentido, un punto designado por $+5$ se encontrará a la *derecha* $(+)$ del punto cero, a una distancia de 5 kilómetros. Nótese que un vehículo que ocupa el punto -6 está más rezagado que el que ocupa la posición -5, por lo que se puede decir que -6 es menor que -5.

En el gráfico observamos que existen puntos simétricos respecto del punto de referencia esto es, puntos que se encuentran a igual distancia del punto cero pero en sentido contrario; por ejemplo, los puntos -4 y 4. La suma de estos dos números enteros es cero, es decir, $-4+4=0$. La relación que hay entre estos dos números recibe un nombre especial.

OPUESTO

2.22 *El* **opuesto** *de un número entero a es el número que tenemos que añadirle para que la suma de ambos sea cero. El opuesto de un número a se representa con $-a$.*

En particular, el opuesto de un número negativo como -7 se representa con $-(-7)$, donde los paréntesis significan que el primer signo menos actúa sobre el número -7, de forma que $-(-7)+(-7)=0$. Ahora bien, el número que hay que sumar a -7 para que resulte igual a cero es evidentemente el número 7, ya que $7+(-7)=0$. Entonces resulta $-(-7)=7$.

EJEMPLO 2.31 El opuesto de los números 125, -405 son respectivamente -125 y 405.

Cuando se considera exclusivamente la distancia que separa el origen de otra posición sin tener en cuenta si es a favor o en contra, observamos que puntos como -6 y 6 están a la misma distancia, 6, del punto de referencia, o punto 0. Además este punto origen es el único que está a distancia nula de sí mismo. Esta consideración nos conduce al concepto de valor absoluto de un número entero.

VALOR ABSOLUTO

2.23 *El* valor absoluto *de un número entero a se representa por $|a|$ y es igual a:*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ es un número entero positivo,} \\ 0 & \text{si } a = 0, \\ -a & \text{si } a \text{ es un número entero negativo.} \end{cases}$$

EJEMPLO 2.32 El valor absoluto de los números enteros 1256, -356, 104, -104 es

$$\begin{aligned} |+1256| &= 1256 \\ |-356| &= -(-356) = 356 \\ |-104| &= |+104| = 104 \end{aligned}$$

Nótese que se ha empleado la observación acerca de los números opuestos de los negativos.

EJEMPLO 2.33 El saldo de una cuenta corriente puede ser positivo o negativo. Por lo tanto se mide con números enteros. Si un saldo es de -1200 euros, el signo menos $(-)$ indica que el cliente tiene una deuda con el banco por un importe de 1200 euros. Si un saldo es de $+1200$ euros, entonces el banco tiene una deuda con el cliente por 1200 euros. En ambos casos el valor absoluto del saldo es igual $|-1200| = |1200| = 1200$. El valor absoluto del saldo señala el importe de la deuda. El signo del saldo indica a favor de quién es ese importe.

2.2.2 OPERACIONES CON LOS NÚMEROS ENTEROS

SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS

La suma de números enteros puede razonarse sin dificultad si interpretamos que los números que se tienen que sumar son saldos de una cuenta corriente o temperaturas. Por ejemplo, si disponemos de un saldo de 327 euros e ingresamos un talón de 125 euros, el saldo resultante será de $327+125=452$ euros; o también, si la temperatura era de -7 grados y ha subido 5 grados, la temperatura actual será el resultado de sumar $-7+5$, es decir, -2 grados. Por tanto, a partir de la suma de números naturales podemos considerar la suma de números enteros.

SUMA DE NÚMEROS ENTEROS

2.24 *La **suma** de dos números enteros se calcula del modo siguiente:*

1) *Si ambos números tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y se antepone el signo común.*
2) *Si los números tienen diferente signo, se restan sus valores absolutos en el orden en que sea posible, esto es, quitando el más pequeño al más grande, y se antepone el signo del que tenga mayor valor absoluto.*

EJEMPLO 2.34 Algunos ejemplos de sumas de números enteros son los siguientes:

$$\begin{aligned} 5+19 &= 24, \\ -12+(-16) &= -(12+16) = -28, \\ (-2)+9 &= 9-2 = 7, \\ (-8)+3 &= -(8-3) = -5, \\ 8+(-11) &= -(11-8) = -3, \\ 12+(-10) &= 12-10 = 2. \end{aligned}$$

Con ello, la **diferencia** o **resta** de dos números enteros se reduce a sumar al primero (*minuendo*) el opuesto del segundo (*sustraendo*):

DIFERENCIA DE NÚMEROS ENTEROS

2.25 *La **diferencia**, o **resta**, $a-b$ de dos números enteros a y b es igual a la suma de a y el opuesto de b.*

$$a-b=a+(-b).$$

EJEMPLO 2.35 Las restas o diferencias de números enteros se reducen a sumas:

$$\begin{aligned} 7-(-3) &= 7+3 &&= 10, \\ (-4)-8 &= (-4)+(-8) &&= -12, \\ (-1)-(-2) &= (-1)+2 &&= 1, \\ (-2)-(-1) &= (-2)+1 &&= -1. \end{aligned}$$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Como hemos visto, el producto de números naturales suele entenderse como una suma repetida:

'tres' veces el número 'cuatro' $= 3 \times 4 = 4+4+4 = 12.$

Este principio, extendido a los números enteros, permite deducir cuál será el resultado de multiplicar un número positivo por otro número positivo o negativo. Así $3 \times (-4)$ se interpreta también como

'tres' veces el número 'menos cuatro' $= 3 \times (-4) = (-4)+(-4)+(-4) = -12.$

Pero también puede darse una interpretación al producto por un número negativo. Si de una suma se quitan tres sumandos iguales a 4, la suma disminuirá en 12. Puede pensarse que "se ha puesto -3 veces el número 4". Así, se tiene:

'menos tres' veces el número 'cuatro' $= (-3) \times 4 = -12.$

Mientras que si de una suma se quitan tres sumandos -4, la suma aumentará en 12, es decir:

'menos tres' veces el número 'menos cuatro' $= (-3) \times (-4) = 12.$

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Se puede definir entonces la **multiplicación** o **producto** de números enteros del modo siguiente:

2.26 *Para* **multiplicar** *dos números enteros se multiplican los valores absolutos de los factores y al resultado se le da el signo que se obtiene, a partir de los signos de los factores, según la siguiente regla denominada* **regla de los signos para la multiplicación***:*

- $+$ *por* $+$ *es igual a* $+$
- $+$ *por* $-$ *es igual a* $-$
- $-$ *por* $+$ *es igual a* $-$
- $-$ *por* $-$ *es igual a* $+$

EJEMPLO 2.36 Para multiplicar $(-3) \times 5$ se calcula $3 \times 5 = 15$ y puesto que, según la regla de los signos, $-$ por $+$ es $-$ resulta $(-3) \times 5 = -15$.

EJEMPLO 2.37 Para multiplicar $(-6) \times (-7)$ se calcula $6 \times 7 = 42$ y puesto que, según la regla de los signos, $-$ por $-$ es $+$ resulta $(-6) \times (-7) = 42$.

EJEMPLO 2.38 Supongamos que en este momento la temperatura es de 0°C.

- Si la temperatura lleva todo el día *subiendo* a razón de 4°C cada hora, dentro de 5 horas la temperatura será de $5 \times 4 = 20$°C, mientras que hace 3 horas, es decir, en la hora -3 contada desde este instante, la temperatura era de $(-3) \times 4 = -12$°C.
- Si la temperatura lleva todo el día *bajando* a razón de 4°C cada hora, dentro de 5 horas la temperatura será de $5 \times (-4) = -20$°C, mientras que hace 3 horas la temperatura era de $(-3) \times (-4) = 12$°C.

Con los números enteros sucede como con los naturales: no siempre es posible dividir de manera exacta dos enteros. Sin embargo, cuando la operación puede llevarse a cabo la misma regla de los signos de la multiplicación permite tener el signo del cociente.

DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

2.27 *Si un número entero a es divisible por otro entero b, el* ***cociente*** *es igual al cociente de los valores absolutos con el signo dado por la siguiente* **regla de los signos para la división***:*

- $+$ *dividido por* $+$ *es igual a* $+$
- $+$ *dividido por* $-$ *es igual a* $-$
- $-$ *dividido por* $+$ *es igual a* $-$
- $-$ *dividido por* $-$ *es igual a* $+$

EJEMPLO 2.39 $-12 \div 3 = -4$, $15 \div -3 = -5$, $-8 \div -2 = 4$, $36 \div 6 = 6$.

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

Es evidente que tanto da sumar un número a otro que el otro al uno. Por ejemplo, es claro que $3 + 6 = 6 + 3$. Esta igualdad es una consecuencia inmediata del concepto de suma de números enteros y es una propiedad

general que intuitivamente se reconoce como válida para cualquier par de números enteros. Sin embargo, cuando se quiere enunciar dicha propiedad de un modo general hay que recurrir a una idea sutil. Cuando se afirma que $3+6=6+3$ se está diciendo exactamente eso: que es igual sumar 3 a 6 que sumar 6 a 3, pero esta afirmación no dice que la igualdad se siga manteniendo cuando la pareja de números elegidos sea otra. Para expresar esta propiedad de un modo simbólico y general, hay que recurrir a representar los números por letras, de forma que cada letra no sea ningún número particular sino que represente de un modo general a cualquier número. Con este lenguaje en el que las letras *son* y *no son* números, resulta fácil expresar las propiedades que cumplen las operaciones con los números enteros. En los enunciados que siguen, las letras, como a, b, c, representan cualquier número entero, de forma que las afirmaciones que se hacen son válidas cuando se sustituye cada letra por cualquier número entero.

PROPIEDAD COMMUTATIVA DE LA SUMA

2.28 *Si a y b son números enteros, se cumple*

$$a+b=b+a.$$

EJEMPLO 2.40 Se cumple que $-15+27=27+(-15)$.

PROPIEDAD COMMUTATIVA DEL PRODUCTO

2.29 *Si a y b son números enteros, se cumple*

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

EJEMPLO 2.41 Se cumple que $(-15)\cdot 18=18\cdot(-15)$.

PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA SUMA

2.30 *Si a, b y c son números enteros, se cumple*

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

EJEMPLO 2.42 Se cumple que $(23+(-14))+4=23+((-14)+4)$.

PROPIEDAD ASOCIATIVA DEL PRODUCTO

2.31 *Si a, b y c son números enteros, se cumple*

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

EJEMPLO 2.43 Se cumple que $((-11)\cdot(-6))\cdot 9 = (-11)\cdot((-6)\cdot 9)$.

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO RESPECTO DE LA SUMA

2.32

Si a, b y c son números enteros, se cumple

$$a\cdot(b+c) = (a\cdot b) + (a\cdot c).$$

EJEMPLO 2.44 Se cumple que $(-7)\cdot(16+29) = ((-7)\cdot 16) + ((-7)\cdot 29)$.

La utilización de letras para representar de forma general un número presenta ventajas adicionales. Es posible realizar cálculos con expresiones literales de forma similar a como se hace con los números. Los resultados que se obtengan serán válidos cuando se sustituyan las letras por números cualesquiera. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 2.45 La expresión $(3a+6b)$ es igual a $3\cdot(a+2b)$. En efecto, por la propiedad distributiva se cumple:

$$3\cdot(a+2b) = (3\cdot a + 3\cdot 2b) = (3a+6b).$$

EJEMPLO 2.46 La expresión $(a+b)(a-b)$ es igual a (a^2-b^2) (recuérdese que a^2 significa $a\cdot a$). En efecto, por la propiedad distributiva se tiene:

$$(a+b)(a-b) = (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot(-b).$$

De la regla de los signos, se sigue:

$$(a+b)\cdot a + (a+b)\cdot(-b) = (a+b)\cdot a - (a+b)\cdot b$$

y, otra vez por la propiedad distributiva, se tiene:

$$(a+b)\cdot a - (a+b)\cdot b = a\cdot a + b\cdot a - a\cdot b - b\cdot b;$$

pero, por la propiedad conmutativa, $ba = ab$, se tiene así

$$b\cdot a - a\cdot b = a\cdot b - a\cdot b = 0.$$

Resulta así

$$(a+b)\cdot a - (a+b)\cdot b = a\cdot a + b\cdot a - a\cdot b - b\cdot b = a^2 - b^2$$

Este resultado se lee: suma por diferencia de dos números igual a la diferencia de sus cuadrados.

EJEMPLO 2.47 La expresión $(a+b)^2$ es igual a $a^2+2ab+b^2$ (recuérdese que $(a+b)^2$ se lee: "a más b al cuadrado"). Como se ha visto, el exponente ^{2} indica que el número de la base se multiplica por sí mismo. Esto vale también para el cálculo con letras.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b)\\ &= (a+b)\cdot a+(a+b)\cdot b \quad \text{(prop. distributiva)}\\ &= (a\cdot a+b\cdot a)+(a\cdot b+b\cdot b)\\ &= a^2+ba+ab+b^2.\end{aligned}$$

Pero, por la propiedad conmutativa del producto, $ba=ab$, y además $ab+ab=2ab$. Luego

$$(a+b)^2=a^2+ba+ab+b^2=a^2+2ab+b^2,$$

o bien

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$$

Con palabras, esta igualdad se lee: el cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el doble producto del primero por el segundo.

2.3 NÚMEROS RACIONALES

2.3.1 EL CONCEPTO DE NÚMERO RACIONAL

Con los números naturales y enteros es imposible resolver cuestiones tan simples como "*hallar un número que multiplicado por* 5 *resulte igual a* 12". Esa imposibilidad es razonable cuando la unidad de las magnitudes consideradas tiene un carácter indivisible.

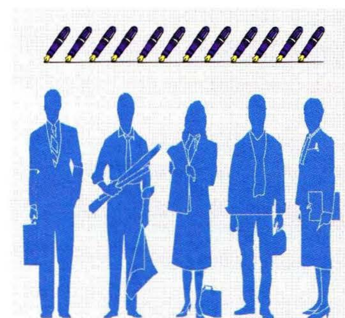


Figura 2.7: Un reparto no equitativo: $12 \div 5 = ?$.

Por ejemplo, si se pretende repartir, en partes iguales, 12 plumas estilográficas entre 5 personas, parece natural llegar a la conclusión de que no hay solución, pues ninguno de los repartos posibles merece el calificativo de equitativo. Sin embargo, si se trata de repartir 12 hectáreas de tierra entre 5 agricultores, parece que será posible hallar una solución.

Lo primero que llama la atención es lo arbitrario de la unidad de medida empleada. Si en lugar de la hectárea se empleara el metro cuadrado, como una hectárea es igual a 10000 metros cuadrados, el problema sería repartir 120000 metros cuadrados entre cinco agricultores, es decir, $120000 \div 5 = 24000$, y la solución es dar 24000 metros cuadrados a cada agricultor.

De igual manera, para repartir 2 litros de vino entre cinco personas, basta considerar una nueva unidad de capacidad tal que un litro sea igual a 5 nuevas unidades. Llamemos *un quinto* de litro a esa nueva unidad. Entonces, el problema propuesto equivale a repartir 10 *quintos* de litro entre 5 personas, y la solución es simple: hay que dar $10 \div 5 = 2$ *quintos* de litro a cada persona.

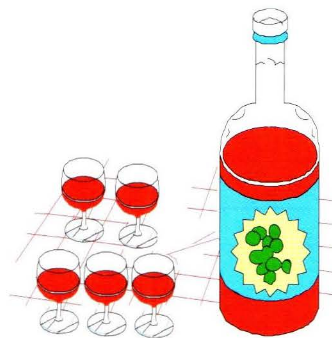


Figura 2.8: Un "quinto" de la unidad.

En resumen, las unidades de medida de algunas magnitudes como la longitud, superficie, masa, capacidad, etc., pueden subdividirse en tantas partes iguales como se desee. Entonces, el problema de repartir cierta cantidad de manera equitativa se resuelve tomando como nueva unidad de medida una parte o **fracción** de la unidad inicial.

A los números que representan esas cantidades fraccionarias se les denomina **números racionales**.

FRACCIÓN

2.33 *La cantidad que resulta de dividir una unidad en b fracciones iguales y tomar a de estas fracciones se representa por $\frac{a}{b}$. El símbolo $\frac{a}{b}$ se denomina* **fracción** *o* **quebrado**. *También se utiliza el símbolo a/b. Una fracción representa un número que se denomina* **racional**.

- *El número b, que aparece en la parte inferior, se llama* **denominador** *de la fracción ya que denomina la unidad fraccionaria que se emplea.*
- *El número a, que aparece en la parte superior, numera cuántas unidades fraccionarias se toman y se llama* **numerador** *de la fracción.*

Para repartir dos litros de vino entre cinco personas consideramos una nueva unidad que llamamos un quinto de litro. De igual manera podíamos haber considerado otras unidades diferentes. Por ejemplo, podría haberse considerado como nueva unidad un *décimo* de litro, de forma que un litro fuese igual a 10 décimos de litro. Así, 2 litros equivalen a 20 décimos de litro y el problema sería ahora cómo repartir 20 décimos de litro entre 5 personas; la solución evidente es dar a cada persona 4 décimos de litro. Concluimos entonces que es lo mismo 2 quintos de litro que 4 décimos de litro. Dicho con la simbología de fracciones $\frac{2}{5}$ representa la misma cantidad que $\frac{4}{10}$. Razonando de manera análoga resulta evidente que fracciones como $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{8}{20}$, representan la misma cantidad, es decir, representan al mismo número racional.

FRACCIONES EQUIVALENTES

2.34 *Dos fracciones que representan al mismo número racional se dice que son* **equivalentes**.

Es sencillo obtener fracciones equivalentes a una fracción dada:

2.35 *Si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican por un mismo número, se obtiene una fracción equivalente a la dada.*

EJEMPLO 2.48 Las fracciones: $\frac{5}{7}$ y $\frac{15}{21}$ son equivalentes. En efecto $15 = 3 \times 5$ y $21 = 3 \times 7$.

$$\frac{15}{21} = \frac{3 \times 5}{3 \times 7}.$$



Cuando dos fracciones son equivalentes, por abuso del lenguaje, se acostumbra a decir que son **iguales**, por lo que se escribe $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$. Un criterio bien simple para averiguar si dos fracciones son equivalentes consiste en multiplicar el numerador de la primera por el denominador de la segunda y, al revés, el denominador de la primera por el numerador de la segunda. Si ambos números son iguales, entonces las fracciones son equivalentes.

CRITERIO DE EQUIVALENCIA DE FRACCIONES

2.36

Dos fracciones: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si y solamente si se cumple:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

EJEMPLO 2.49 Para averiguar si las fracciones $\frac{15}{17}$ y $\frac{90}{102}$ son equivalentes, mediante el criterio anterior, se calculan los productos $a \cdot d = 15 \times 102 = 1530$ y $b \cdot c = 17 \times 90 = 1530$. Como son iguales, las fracciones son equivalentes.

EJEMPLO 2.50 Las fracciones: $\frac{12}{17}$ y $\frac{83}{119}$ no son equivalentes, ya que los productos $12 \times 119 = 1428$ y $17 \times 83 = 1411$ no son iguales.

Al igual que sucede con los números naturales, tiene interés considerar la existencia de **fracciones negativas**. Dos pueden ser las razones prácticas para tenerlas en cuenta. Por una parte, una fracción como $\frac{-a}{b}$ puede entenderse como el resultado de dividir una unidad en b partes iguales y *quitar* a partes. Por otra parte no es extraño encontrarse con la necesidad de fraccionar una magnitud negativa; por ejemplo, una deuda. Entonces el empleo de fracciones negativas es natural: pueden interpretarse como la parte de la deuda total que se ven obligadas a pagar cada uno de los deudores entre los que se divide. En este punto se puede contemplar como los conceptos matemáticos van encajando uno en otro de manera natural, sin que la adquisición de una nueva idea suponga gran esfuerzo adicional. Así, la regla de los signos para la división de los enteros sigue siendo plenamente válida, como se aprecia en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.51 De acuerdo con la regla de los signos para la división de números enteros las siguientes fracciones son equivalentes:

$$\frac{-2}{3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} \qquad \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7} = +\frac{5}{7},$$

como se comprueba fácilmente mediante el criterio de equivalencia de fracciones.

Resta por hacer una observación adicional. Si bien todo número racional puede escribirse como fracción, no todos los símbolos que resultan de escribir un número encima de otro con una raya en medio representan números racionales. En concreto, los símbolos de la forma: $\frac{1}{0}, \frac{2}{0}, \frac{3}{0}, \frac{4}{0}$, etc. que tienen un cero en el denominador, no representan a ningún número. Esto es así porque la división por cero no tiene sentido.

2.3.2 OPERACIONES CON FRACCIONES

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Fracciones con igual denominador

Cuando dos fracciones tienen el mismo denominador, su suma o resta tiene un sentido evidente y la operación es inmediata. Por ejemplo, la fracción $\frac{3}{4}$ representa tomar tres cuartas partes de una unidad y la fracción $\frac{5}{4}$ representa tomar cinco cuartas partes de la unidad; luego la suma de ambas cantidades contendrá ocho cuartas partes de la unidad, o lo que es lo mismo, dos unidades enteras. Con el lenguaje de fracciones escribimos:

SUMA DE FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2.$$

2.37 *La **suma** de dos fracciones con igual denominador es igual a otra fracción que tiene como numerador la suma de los numeradores y, como denominador, el común.*

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

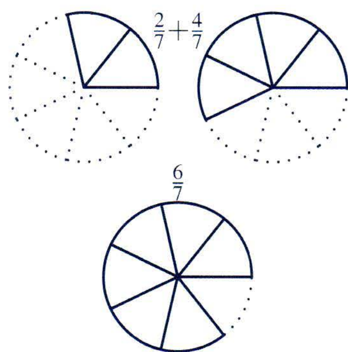


Figura 2.9: Suma de fracciones con igual denominador.

EJEMPLO 2.52 La suma de las fracciones $\frac{2}{7}$ y $\frac{4}{7}$ es igual a $\frac{6}{7}$.

$$\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{2+4}{7}=\frac{6}{7}.$$

Por lo que a la diferencia de fracciones se refiere, el razonamiento es análogo. Si a cinco sextas partes de la unidad se le quitan dos sextas partes de la unidad, el resultado es tres sextas partes de la unidad.

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5-2}{6}=\frac{3}{6}.$$

Puede entenderse la diferencia de dos fracciones como la suma de la primera con el opuesto de la segunda:

DIFERENCIA DE FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR

*La **diferencia** de dos fracciones con igual denominador es otra fracción que tiene como numerador la diferencia de los numeradores y como denominador el común.* 2.38

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

EJEMPLO 2.53 La diferencia de las fracciones $\frac{17}{5}$ y $\frac{23}{5}$ es igual a $\frac{-6}{5}$.

$$\frac{17}{5} - \frac{23}{5} = \frac{17-23}{5} = \frac{-6}{5}.$$

Fracciones con distinto denominador

Cuando dos fracciones no tienen el mismo denominador, se hallará una fracción equivalente a cada una de ellas, que tengan igual denominador. Luego se suman o restan según lo dicho.

SUMA Y DIFERENCIA DE FRACCIONES CON DISTINTO DENOMINADOR

Para sumar, o restar, fracciones con distinto denominador se buscan fracciones equivalentes con igual denominador y se suman, o restan, los numeradores. 2.39

Por ejemplo, para sumar dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ que no tienen denominador común, esto es $b \neq d$, se halla una fracción equivalente a $\frac{a}{b}$ y otra equivalente a $\frac{c}{d}$ que tengan el mismo denominador. Esto siempre es posible, ya que dos números enteros b y d tienen infinitos múltiplos comunes. Por ejemplo, basta tomar como denominador común el producto de los denominadores.

EJEMPLO 2.54 Para sumar las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$, se hallan otras equivalentes con denominador común. Por ejemplo $\frac{12}{18}$ es equivalente a $\frac{2}{3}$ y $\frac{15}{18}$ es equivalente a $\frac{5}{6}$, puesto que $\frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 2}{6 \cdot 3}$ y $\frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 6}$. Entonces

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{12}{18} + \frac{15}{18} = \frac{27}{18}.$$

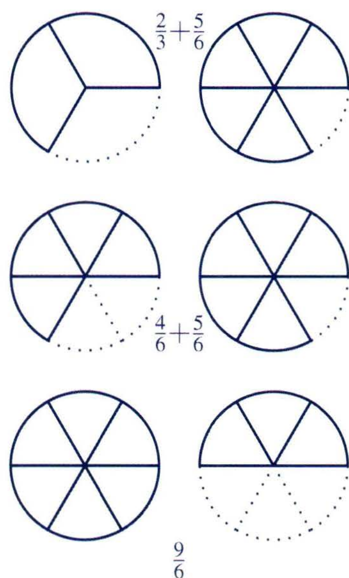


Figura 2.10: Suma de fracciones con distinto denominador.

En el ejemplo anterior se transformaron las fracciones al denominador común 18, pero pueden elegirse otros muchos denominadores comunes, así:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{16}{24}+\frac{20}{24}=\frac{36}{24}.$$

Cualquier número que sea múltiplo común de los denominadores puede servir como denominador común. Desde luego, cuanto menor sea el denominador común elegido, más simples serán los cálculos y las fracciones resultantes. Resulta pues de interés elegir como denominador común un número tan pequeño como sea posible. Ese número es el mínimo común múltiplo de los denominadores.

EJEMPLO 2.55 En el caso de las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$, el mínimo común múltiplo de los denominadores 3 y 6 es 6. El cálculo más sencillo de la suma es:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}.$$

EJEMPLO 2.56 Para calcular la diferencia de las fracciones: $\frac{17}{25}-\frac{26}{30}$ se halla en primer lugar el mínimo común múltiplo de los denominadores m.c.m.$(25,30)=150$; luego se obtienen fracciones equivalentes a las dadas con denominador igual a 150 y finalmente se restan los numeradores

$$\frac{17}{25}-\frac{26}{30}=\frac{102}{150}-\frac{130}{150}=\frac{-28}{150}.$$

Cuando se trata de sumar o restar varias fracciones, el procedimiento que hay que seguir es el mismo: reducir a denominador común todas las fracciones que aparecen en la expresión y sumar o restar los numeradores de las fracciones equivalentes obtenidas.

EJEMPLO 2.57 Para calcular la expresión $\frac{7}{9}+\frac{1}{12}-\frac{3}{4}$ se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores m.c.m.$(9,12,4)=36$ y luego se opera del modo siguiente

$$\frac{7}{9}+\frac{1}{12}-\frac{3}{4}=\frac{28}{36}+\frac{3}{36}-\frac{27}{36}=\frac{28+3-27}{36}=\frac{4}{36}.$$

PRODUCTO Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

El producto de un número entero por una fracción tiene el mismo sentido que el producto de números enteros: es una suma repetida. Así, por ejemplo:

$$6 \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{3+3+3+3+3+3}{7} = \frac{6 \cdot 3}{7}$$

De manera semejante, dividir una fracción por un número entero, por ejemplo $\frac{3}{7} \div 5$, significa dividir la unidad en siete partes iguales, tomar tres y dividir por cinco la cantidad que resulta. Claramente, la operación anterior equivale a dividir la unidad en siete partes iguales, volver a dividir cada una de esas séptimas partes en cinco partes y tomar tres. Por lo tanto, se tiene: $\frac{3}{7} \div 5 = \frac{3}{35}$. Cuando se multiplica una fracción por otra, por ejemplo $\frac{6}{5} \cdot \frac{3}{7}$ puede interpretarse ese producto como *multiplicar* por 6 y *dividir* por 5, de forma que $\frac{6}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6 \cdot 3}{5 \cdot 7}$ Se razona así la regla del producto de dos fracciones:

PRODUCTO DE FRACCIONES

2.40

El ***producto*** *de dos fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

EJEMPLO 2.58 El producto de las fracciones $\frac{3}{8}$ y $\frac{4}{5}$ es igual a:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 5} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}.$$

EJEMPLO 2.59 El producto de fracciones $\frac{3}{11}$, $\frac{15}{4}$ y $\frac{22}{5}$ es igual a:

$$\frac{3}{11} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{22}{5} = \frac{3 \cdot 15 \cdot 22}{11 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{2}.$$

Como se ha razonado antes, la división de una fracción $\frac{a}{b}$ por un número entero c es equivalente a multiplicar dicha fracción por la fracción $\frac{1}{c}$.

DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO ENTERO

2.41 **Dividir** *la fracción* $\frac{a}{b}$ *entre el número entero* c *es equivalente a multiplicar las fracciones* $\frac{a}{b}$ *y* $\frac{1}{c}$

$$\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

EJEMPLO 2.60

$$\frac{6}{7} \div (-8) = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{-8} = \frac{6}{-56} = -\frac{3}{28}.$$

El número c y la fracción $\frac{1}{c}$ guardan entre sí una relación particular: su producto es igual a 1. Esta misma relación se mantiene entre las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ cualesquiera que sean a y b no nulos. Esta situación recibe un nombre especial.

FRACCIÓN INVERSA

2.42 *Dos fracciones se denominan* **recíprocas** *o* **inversas** *si su producto es igual a 1. Todas las fracciones o números racionales, menos el cero, tienen un recíproco. La fracción recíproca de* $\frac{a}{b}$ *es* $\frac{b}{a}$.

Las observaciones anteriores conducen de manera natural a la división de fracciones. Dividir una fracción $\frac{a}{b}$ por otra $\frac{c}{d}$ es lo mismo que dividir $\frac{a}{b}$ entre c y multiplicar el resultado por d.

DIVISIÓN DE FRACCIONES

2.43 **Dividir** *la fracción* $\frac{a}{b}$ *entre la fracción* $\frac{c}{d}$ *es equivalente a multiplicar* $\frac{a}{b}$ *por el recíproco de* $\frac{c}{d}$*. Esto es:*

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

EJEMPLO 2.61 $\frac{2}{5} \div \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 4} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}.$

Además del signo ($\div$), a menudo se emplea la misma notación de fracción para expresar la división de dos fracciones. Así, son iguales las expresiones siguientes:

$$\frac{2/3}{3/5} = \frac{2}{3} \div \frac{3}{5} \qquad \frac{12/7}{4/25} = \frac{12}{7} \div \frac{4}{25}$$

2.3.3 EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Además de las fracciones o quebrados hay otras formas de representar un número racional. La más importante es la decimal que consiste en una extensión de la ya vista para los números enteros.

Como sabemos, en el sistema de numeración decimal los números enteros se agrupan en unidades, decenas, centenas, etc. Estas agrupaciones resultan inadecuadas para dar cabida a partes más pequeñas que la unidad. En su lugar, hay que considerar nuevas agrupaciones que, siguiendo la regla del sistema decimal de ir de diez en diez, resulten útiles para representar las fracciones de la unidad. En concreto, si se divide la unidad en diez partes iguales, se puede tomar como patrón de agrupación la *décima* parte de la unidad, de modo que diez décimas formen una unidad; si se divide la unidad en cien partes se puede tomar la *centésima*, de modo que cien centésimas formen una unidad, o bien, diez centésimas formen una décima. De modo análogo pueden considerarse las *milésimas*, *diez milésimas*, *cien milésimas*, *millonésimas* y así sucesivamente. Cada una de esta nuevas agrupaciones equivale a una fracción con numerador igual a 1 y con denominador igual al número de partes en que se ha dividido la unidad. Por ejemplo, la décima equivale a la fracción $\frac{1}{10}$; la centésima, a la fracción $\frac{1}{100}$; la milésima, a la fracción $\frac{1}{1000}$, etc. Se puede utilizar ahora una notación coherente con la empleada en la Tabla 2.1 y representar a las fracciones anteriores como potencias de diez elevadas a exponentes negativos, es decir, $\frac{1}{10}$ por 10^{-1}, $\frac{1}{100}$ por 10^{-2}, etc. También podemos escribir estas fracciones de la unidad de un modo que resulte coherente con la escritura del sistema decimal. Para ello necesitamos introducir un símbolo que indique en que lugar finaliza la parte correspondiente a unidades enteras y comienza la parte correspondiente a fracciones de la unidad. Nosotros elegiremos el punto decimal (.) para lograr esta separación. Así, al igual que 10 simboliza una decena, 100 una centena, 1000 un millar, etc., 0.1 simboliza una décima, 0.01 una centésima, 0.001 una milésima, etc. Todas estas representaciones vienen resumidas en la Tabla 2.7.

Veamos ahora cómo representar un número fraccionario utilizando estas agrupaciones menores que la unidad.

1	= 1			$= 10^0$	*unidad*
0.1	$= \frac{1}{10}$			$= 10^{-1}$	*décima*
0.01	$= \frac{1}{100}$	$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$		$= 10^{-2}$	*centésima*
0.001	$= \frac{1}{1000}$	$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$		$= 10^{-3}$	*milésima*
0.0001	$= \frac{1}{10000}$	$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$		$= 10^{-4}$	*diez milésima*
0.00001	$= \frac{1}{100000}$	$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$		$= 10^{-5}$	*cien milésima*
0.000001	$= \frac{1}{1000000}$	$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$		$= 10^{-6}$	*millonésima*

Tabla 2.7: Algunas fracciones de la unidad.

Consideremos, por ejemplo, la fracción $\frac{17}{25}$. Si multiplicamos por 4 el numerador y el denominador, encontramos una fracción equivalente, con denominador 100, que es la fracción $\frac{68}{100}$. Esta fracción se interpreta de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{68}{100} &= \frac{60+8}{100} \\
&= \frac{60}{100} + \frac{8}{100} \\
&= \frac{6}{10} + \frac{8}{100} \\
&= 6 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{100} \\
&= \text{6 décimas} + \text{8 centésimas}
\end{aligned}$$

Obtenemos así una representación decimal del número fraccionario. Es decir, tanto la fracción $\frac{17}{25}$ como el número decimal 0.68 representan a la misma cantidad.

$$\begin{aligned}
\frac{17}{25} &= \text{6 grupos de una décima} \\
&\quad + \text{8 grupos de una centésima} \\
&= 6 \times 0.1 + 8 \times 0.01 \\
&= 0.6 + 0.08 = 0.68
\end{aligned}$$

Esta representación decimal es válida también para fracciones mayores que la unidad. Por ejemplo, la fracción $\frac{117}{25}$ puede escribirse en forma decimal como:

$$\begin{aligned}
\frac{117}{25} &= \frac{100+17}{25} \\
&= \frac{100}{25} + \frac{17}{25} \\
&= 4 + \frac{17}{25} \\
&= 4 + 0.68 = 4.68
\end{aligned}$$

Esta sistema decimal de representar números fraccionarios es completa-

mente análogo al decimal para números enteros. La analogía se pone de manifiesto de manera más clara cuando empleamos las potencias de diez.

EJEMPLO 2.62 El símbolo 7523.418 representa la cantidad

$$\begin{aligned} 7523.418 &= 7\cdot 10^3+5\cdot 10^2+2\cdot 10^1+3\cdot 10^0+4\cdot 10^{-1}+1\cdot 10^{-2}+8\cdot 10^{-3} \\ &= 7\cdot 1000+5\cdot 100+2\cdot 10+3\cdot 1+4\cdot 0.1+1\cdot 0.01+8\cdot 0.001 \\ &= 7\cdot 1000+5\cdot 100+2\cdot 10+3\cdot 1+4\cdot\frac{1}{10}+1\cdot\frac{1}{100}+8\cdot\frac{1}{1000}. \end{aligned}$$

Con palabras se diría: 7523.418 *es la cantidad que resulta de tomar 7 grupos de mil unidades, 5 grupos de 100 unidades, 2 grupos de diez unidades, 3 grupos de una unidad, 4 grupos de una décima de unidad, 1 grupo de una centésima de unidad y 8 grupos de una milésima de unidad.*

PASO DE LA EXPRESIÓN FRACCIONARIA A LA DECIMAL

El algoritmo de cálculo de la expresión decimal de una fracción es el algoritmo de la división. Para encontrar la expresión decimal de la fracción 117/25 efectuamos la división que indica el quebrado, como se ve en la figura 2.11.

```
1 1 7         |25
1 0 0          4.68
  1 7 0
  1 5 0
    2 0 0
    2 0 0
        0
```

Figura 2.11: Paso de fraccionario a decimal.

Sin embargo, no todas las expresiones decimales de las fracciones son tan simples como el ejemplo anterior puede dar a entender. Si se calcula la expresión decimal de la fracción $\frac{1}{3}$, resulta que la división anterior no acaba nunca.

```
10      |3
 10      0.333...
  10
    ...
```

Es decir, la representación decimal de la fracción $\frac{1}{3}$ exige emplear *infinitos* decimales. Una solución es escribir:

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$$

donde los puntos suspensivos dan a entender que el número 3 se repite infinitas veces. Otra solución mejor es emplear un rasgo especial, el acento circunflejo, para determinar la parte decimal que se repite indefinidas veces. Así se escribirá:

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots = 0.\widehat{3}$$

FRACCIÓN PERIÓDICA

Una fracción cuya parte decimal se repite indefinidas veces se denomina **fracción periódica***. La parte decimal que se repite se denomina* **período**. 2.44

$$\begin{array}{l|l} 1031 & 330 \\ \quad 410 & 3.12424\ldots \\ \quad\ 800 & \\ \quad\ 1400 & \\ \quad\quad 800 & \\ \quad\quad 1400 & \\ \quad\quad\quad \ddots & \end{array}$$

Figura 2.12: Expresión decimal de $\frac{1031}{330}$.

EJEMPLO 2.63 La fracción $\frac{1031}{330}$ es periódica, como puede comprobarse al efectuar la división, ver figura 2.12. Este ejemplo muestra el caso más complicado que puede darse: una fracción cuya expresión decimal tiene parte entera, parte decimal no periódica y parte decimal periódica. Se escribirá

$$\frac{1031}{330} = 3.1242424\ldots = 3.1\widehat{24}.$$

EJEMPLO 2.64 La fracción $\frac{10}{6}$ se escribe en forma decimal como $1.\widehat{6}$, como se comprueba al efectuar la división.

EJEMPLO 2.65 La expresión decimal de la fracción $\frac{239}{33}$ es $7.\widehat{24}$ como se comprueba al efectuar la división.

EJEMPLO 2.66 La expresión decimal de la fracción $\frac{271}{90}$ es $3.0\widehat{1}$ como se comprueba al efectuar la división.

PASO DE LA EXPRESIÓN DECIMAL A LA FRACCIONARIA

Expresión decimal finita

Cuando la parte decimal del número es finita basta multiplicar y dividir por 10, 100, 1000, etc., según que la parte decimal tenga una, dos, tres, etc., cifras. Por ejemplo, el número 56.97 significa

$$56.97 = 5\cdot 10 + 6\cdot 1 + 9\cdot \frac{1}{10} + 7\cdot \frac{1}{100}$$

luego, si se multiplica y divide por 100, resulta:

$$\begin{aligned} 56.97 &= \frac{100\cdot\left(5\cdot 10 + 6\cdot 1 + 9\cdot \frac{1}{10} + 7\cdot \frac{1}{100}\right)}{100} \\ &= \frac{5697}{100}. \end{aligned}$$

Este procedimiento es general.

EJEMPLO 2.67 Los cálculos siguientes ilustran el paso de la forma decimal a la fraccionaria, cuando el número de decimales es finito.

a) $1.23 = 1.23\cdot\frac{100}{100} = \frac{123}{100}$.

b) $1.8 = 1.8 \cdot \frac{10}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$.

c) $1.168 = 1.168 \cdot \frac{1000}{1000} = \frac{1168}{1000} = \frac{146}{125}$.

Expresión decimal periódica

Cuando la expresión decimal es periódica el problema es algo más complicado; a cambio, su solución sirve de introducción en los métodos de las ecuaciones. Sin duda, la dificultad está en manejar la parte decimal infinita del número. Por ejemplo, para hallar la expresión fraccionaria del número $1.\widehat{3}$ puede razonarse así: llamemos x a la expresión desconocida, esto es:

$$x = 1.3333\ldots$$

Entonces diez veces el número será

$$10x = 10 \cdot 1.3333\ldots = 13.3333\ldots$$

Si se resta a $10x$ el número x el resultado será $9x$ por una parte y, por otra, desaparecerá la parte decimal infinita.

$$\begin{array}{rrcl} & 10x & = & 13.3333\ldots \\ (-) & x & = & 1.3333\ldots \\ \hline & 9x & = & 12 \end{array}$$

Puesto que nueve veces x es igual a 12, tenemos la igualadad $9x = 12$. Entonces $x = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$. Así pues $\dfrac{4}{3} = 1.\widehat{3}$.

Algunos ejemplos adicionales servirán para mostrar cómo deben tratarse otros casos.

EJEMPLO 2.68 Para hallar la expresión fraccionaria del número $1.\widehat{23}$ se hace

$$x = 1.\widehat{23} = 1.232323\ldots$$

Si se multiplica x por 100 resulta

$$100x = 100 \cdot 1.232323 = 123.232323\ldots$$

luego al restar x a $100x$ desaparece la parte decimal infinita, es decir:

$$\begin{array}{rrcl} & 100x & = & 123.232323\ldots \\ (-) & x & = & 1.232323\ldots \\ \hline & 99x & = & 122 \end{array}$$

Por lo tanto $x = \dfrac{122}{99}$.

EJEMPLO 2.69 Para hallar la expresión fraccionaria del número $0.1\widehat{35}$ se hace

$$x = 0.1\widehat{35} = 0.1353535\ldots$$

Si se multiplica x por 1000 resulta

$$1000x = 135.353535\ldots$$

Pero ahora no basta restar x para eliminar la parte decimal, ya que no son iguales los decimales de $1000x$ y de x. Lo más conveniente es restar a $1000x$ el número $10x$ que sí tiene su misma parte decimal.

$$10x = 1.353535\ldots$$

Se tendrá

$$\begin{array}{rrcl} & 1000x & = & 135.353535\ldots \\ (-) & 10x & = & 1.353535\ldots \\ \hline & 990x & = & 134 \end{array}$$

Luego $x = \dfrac{134}{990} = \dfrac{67}{495}$.

EJEMPLO 2.70 Este ejemplo ilustrará un importante hecho en la representación de números racionales. Se trata de encontrar una expresión fraccionaria del número $0.\widehat{9}$. Razonamos como en los ejemplos anteriores. Si $x = 0.\widehat{9}$, se tiene $10x = 9.\widehat{9}$; luego al restar, resulta:

$$\begin{array}{rrcl} & 10x & = & 9.999999\ldots \\ (-) & x & = & 0.999999\ldots \\ \hline & 9x & = & 9 \end{array}$$

por lo cual

$$x = 0.\widehat{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

Esta igualdad, que puede parecer sorprendente a primera vista, no debe causar dificultad alguna. Hay que insistir de nuevo en la diferencia que hay entre un número y el símbolo que se emplea para representarlo. Un número racional es una manifestación del concepto de número o de cantidad, es algo esencialmente único. Por ejemplo, *tres* es el número de elementos de cualquier conjunto de tres objetos, *un* metro y *medio* es la longitud de cualquier varilla de esa medida, independientemente del material de que esté hecha. Pero una misma cantidad puede simbolizarse de muy distintas maneras. Como hemos visto, los símbolos 1.5, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{12}{8}$ son maneras distintas de representar la misma cantidad. Pues bien, siempre

cabe la posibilidad de escribir los números fraccionarios con parte decimal finita como números con parte decimal periódica, como en el ejemplo que acabamos de ver. Por el mismo motivo, pueden probarse las igualdades siguientes: $1.2 = 1.1\widehat{9}$, $3 = 2.\widehat{9}$, $2.25 = 2.24\widehat{9}$, $7.8 = 7.7\widehat{9}$.

2.3.4 PORCENTAJES

Una manera frecuente de definir un número fraccionario es mediante porcentajes o tantos por ciento. Una expresión como *el alumno ha contestado al sesenta por ciento de las cuestiones* significa que ha contestado a una fracción igual a $60/100$ del total de cuestiones. La expresión *por ciento* se representa por el símbolo %. Así, en lugar de sesenta por ciento, se acostumbra a escribir 60 %.

PORCENTAJE

2.45

El **porcentaje** *$c\,\%$ equivale a la fracción $\frac{c}{100}$. Se puede escribir*

$$c\,\% = \frac{c}{100}.$$

Es sencillo expresar una fracción en forma de porcentaje:

2.46

Para expresar la fracción $\frac{a}{b}$ como porcentaje, basta hallar la expresión decimal de la fracción y multiplicar por cien.

EJEMPLO 2.71 Las igualdades que siguen muestran la equivalencia entre fracciones, decimales y porcentajes: $\frac{6}{25} = 0.24 = 24\,\%$, $\frac{21}{20} = 1.05 = 105\,\%$, $\frac{1}{3} = 0.\widehat{3} = 33.\widehat{3}\,\%$.

Los porcentajes se emplean a menudo para dar razón de los aumentos o disminuciones de una cantidad. Esto es así porque, en numerosas ocasiones, importa más el aumento *relativo* que el aumento *absoluto*. Así, si el barril de petróleo aumenta su precio en 1€ y pasa de costar 20€ a costar 21€, el efecto que tal subida produce en la economía será menor que si pasa de costar 2€ a costar 3€, siendo en ambos casos el aumento absoluto igual.

2.47 *Si se toman dos medidas, que llamaremos* medida anterior *y* medida actual, *de una determinada cantidad, entonces el* **porcentaje de variación** *que se observa en dicha cantidad es igual a:*

$$\%\ \textit{variación} = \frac{\text{medida actual} - \text{medida anterior}}{\text{medida anterior}} \times 100.$$

El signo de la diferencia

medida actual - medida anterior

da el sentido de la variación.

- *Si la diferencia es positiva el porcentaje será de* **aumento**.
- *Si la diferencia es negativa el porcentaje será de* **disminución**.

EJEMPLO 2.72 Si un producto que costaba 1.40€ pasa a valer 1.61€, el porcentaje de aumento de precio es del

$$\frac{\text{precio actual} - \text{precio antiguo}}{\text{precio antiguo}} \times 100 = \frac{1.61 - 1.40}{1.40} \times 100 = 0.15 \times 100 = 15\,\%.$$

EJEMPLO 2.73 Si el valor de una acción pasa de 5.00€ a 4.00€, el porcentaje de disminución es del 20 % ya que:

$$\frac{\text{precio actual} - \text{precio anterior}}{\text{precio anterior}} \times 100 = \frac{4.00 - 5.00}{5.00} \times 100 = -20\,\%.$$

EJEMPLO 2.74 Con frecuencia, los impuestos son porcentajes fijos de ciertas cantidades denominadas "bases imponibles". En concreto, el impuesto sobre el valor añadido, conocido como IVA, supone un porcentaje de aumento en el precio de los productos de consumo. Por ejemplo, si en la carta de un restaurante se lee: *Estos precios no incluyen el impuesto* IVA *del 7 %*, debe entenderse que, si un determinado plato marca un precio de 12.00€, la factura se verá incrementada en un 7 % más. Es decir, se tendrá que abonar un total de

$$12.00 + 12.00 \cdot \frac{7}{100} = 12.00 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right) = 12.00 \cdot (1 + 0.07) = 12.00 \cdot 1.07 = 12.84€$$

Si por el contrario, en la carta figurase el texto: 7 % IVA *incluido*, debe entenderse que una factura de, por ejemplo, 53.50€, se reparte del siguiente modo: 50.00€ corresponden al restaurante y 3.50€ al impuesto, ya que:

$$50.00 + 50.00 \cdot \frac{7}{100} = 50.00 + 3.50 = 53.50.$$

Hay que tener presente que al hablar de porcentajes se está haciendo referencia a una fracción respecto de un total. Cuando se desea conocer una cantidad definida por un porcentaje, es preciso conocer la cantidad total de la que es una parte.

EJEMPLO 2.75 Si el porcentaje de declaraciones de renta positivas es del 47 %, para conocer el número de declaraciones positivas será preciso saber el número total de declaraciones. Así, si hay 8545000 declaraciones, habrá

$$0.47 \cdot 8545000 = 4016150 \quad \text{declaraciones positivas.}$$

EJEMPLO 2.76 Si un zumo envasado tiene un porcentaje del 88 % de agua, en 400 litros de zumo habrá $0.88 \cdot 400 = 352$ litros de agua.

Al ser los porcentajes fracciones de un total, el cálculo del porcentaje de un porcentaje es inmediato. El $a\,\%$ del $b\,\%$ es igual a una fracción del total equivalente a:

$$\frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100} = \frac{a \cdot b}{10000}.$$

Por lo tanto, el $a\,\%$ del $b\,\%$ es igual al

$$\frac{a \cdot b}{10000} \cdot 100\,\% = \frac{a \cdot b}{100}\,\%.$$

2.48

El $a\,\%$ del $b\,\%$ es igual al $\frac{a \cdot b}{100}\,\%$.

EJEMPLO 2.77 Si el 87 % de los trabajadores son asalariados por cuenta ajena, y el 60 % de los asalariados por cuenta ajena son mujeres, el porcentaje de mujeres asalariadas por cuenta ajena, del total de los trabajadores, es igual al

$$\frac{87}{100} \cdot \frac{60}{100} \cdot 100\,\% = 52.2\,\%.$$

EJEMPLO 2.78 Una fábrica produce dos tipos de productos, digamos A y B. El 60 % de la producción es de tipo A y el 40 % restante de tipo B. El 2 % de los productos A y el 5 % de los productos B son defectuosos. Entonces el porcentaje de la producción total que es defectuosa será:

$$(0.60 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.05) \cdot 100\,\%.$$

El razonamiento es simple, el porcentaje de productos A defectuosos respecto del total es:

$$\frac{60}{100}\cdot\frac{2}{100}\cdot 100\,\% = 0.6\cdot 0.02\cdot 100\,\% = 1.2\,\%.$$

Por otra parte, el porcentaje de productos B defectuosos respecto del total es:

$$\frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100}\cdot 100\,\% = 0.4\cdot 0.05\cdot 100\,\% = 2\,\%$$

luego el porcentaje total de productos defectuosos será:

$$(0.60\cdot 0.02 + 0.4\cdot 0.05)\cdot 100\,\% = (1.2+2)\,\% = 3.2\,\%.$$

EJEMPLO 2.79 Si una bebida consiste en un 70 % de zumo y el resto es licor, y el 90 % del zumo y el 20 % del licor son agua, el porcentaje de agua en la bebida es:

$$(0.7\cdot 0.9 + 0.3\cdot 0.2)\cdot 100\,\% = 69\,\%.$$

2.3.5 FRACCIONES DEFINIDAS POR EXPRESIONES LITERALES

En el lenguaje ordinario se utilizan con mucha frecuencia expresiones literales cuyo sentido define un número fraccionario. Veamos algunas de ellas y su traducción al lenguaje de fracciones.

EXPRESIÓN 1

2.49 *Por cada b individuos u objetos de cierto colectivo, hay a que tienen una cualidad.*

Si se supone que el total ha sido dividido en grupos de b individuos u objetos, cada uno de esos grupos se entiende compuesto de:

- a individuos u objetos que tienen la cualidad.
- $b-a$ individuos u objetos que no tienen la cualidad.

Así, esta expresión indica que:

- La fracción del total de los individuos u objetos que *tienen* la cualidad es $\frac{a}{b}$.
- La fracción del total de los individuos u objetos que *no tienen* la cualidad es $\frac{b-a}{b}$. Naturalmente, esta cantidad es igual a

$$\frac{b-a}{b} = \frac{b}{b} - \frac{a}{b} = 1 - \frac{a}{b}$$

es decir, la diferencia a la unidad de la fracción que cumple la propiedad.

EJEMPLO 2.80 Si por cada diez españoles hay cuatro que han viajado al extranjero, la fracción del total de españoles que ha viajado al extranjero es $\frac{4}{10}$ y la fracción que no ha viajado es $\frac{6}{10}$.

EJEMPLO 2.81 Si de cada cien coches en circulación hay veinte con más de siete años de antigüedad, la fracción de coches en circulación con más de siete años de antigüedad es $\frac{20}{100}$ y la fracción con menos de siete años de antigüedad es $\frac{80}{100}$.

EXPRESIÓN 2

Por cada a individuos u objetos que tienen cierta cualidad, hay b que no la tienen. 2.50

Esta expresión indica la posibilidad de dividir el total de individuos u objetos en grupos de tamaño $a+b$ compuestos de:

- a individuos u objetos que *tienen* la cualidad.
- b individuos u objetos que *no tienen* la cualidad.

Por lo tanto la expresión indica que:

- La fracción del total que cumple la propiedad es $\frac{a}{a+b}$
- La fracción del total que no la cumple es $\frac{b}{a+b}$

Se observa también en este caso que la suma de las dos fracciones es igual a la unidad:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}=1$$

EJEMPLO 2.82 Si por cada cuatro alumnos de Matemáticas básicas que aprueban el examen hay uno que suspende, la fracción de alumnos examinados que aprueba es $\frac{4}{4+1}=\frac{4}{5}$ y la fracción que suspende es $\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}$

EJEMPLO 2.83 Si por cada ocho hogares que tienen teléfono hay tres que no lo tienen, la fracción del total de hogares que tienen teléfono es: $\frac{8}{8+3}=\frac{8}{11}$ y la fracción de hogares que no tiene teléfono es $\frac{3}{8+3}=\frac{3}{11}$

2.3.6 ORDENACIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Los números racionales se ordenan de acuerdo al tamaño de la magnitud que representan. Es evidente que, si se trata de la misma unidad de medida, 1.5 unidades representa una cantidad menor que 2.5 unidades, pero no resulta tan evidente saber si $\frac{2}{5}$ es mayor o menor que $\frac{1}{3}$.

ORDEN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

El criterio para averiguar cuándo una fracción representa una cantidad mayor que otra es simple:

2.51

*La fracción $\frac{a}{b}$ es **mayor** que $\frac{c}{d}$ si la diferencia $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ es positiva, es decir*

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0$$

Si suponemos que b y d son positivos, lo cual siempre puede hacerse porque en otro caso siempre es posible cambiar el signo de los numeradores, esta condición se resume en el siguiente criterio:

2.52

Si $b, d > 0$ la fracción $\frac{a}{b}$ es mayor que $\frac{c}{d}$ si se cumple:

$$ad - bc > 0$$

Si los números están escritos en forma decimal hay que prestar especial atención. Sin duda se tienen las desigualdades:

$$1.43 > 1.42, \qquad 53.12 > 52.12, \qquad 1.231 > 1.230.$$

Pero de lo anterior no debe deducirse que el número mayor será siempre aquél que tenga, contada de izquierda a derecha, la primera cifra mayor ya que, según se ha visto, se cumple $1 = 0.\widehat{9}$. Sin embargo, si la parte decimal es finita, la comparación anterior es válida.

EJEMPLO 2.84 La fracción $\frac{2}{5}$ es mayor que $\frac{1}{3}$ ya que

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 - 5 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{1}{15} > 0$$

EJEMPLO 2.85 De las fracciones $\frac{12}{13}$ y $\frac{13}{14}$ la mayor es $\frac{13}{14}$ ya que

$$13 \cdot 13 - 12 \cdot 14 > 0$$

EJEMPLO 2.86 La fracción $\frac{1}{25}$ es mayor que $\frac{1}{50}$; en efecto:

$$\frac{1}{25} = 0.04 > 0.02 = \frac{1}{50}$$

Aquí la comparación de cifras decimales no ofrece ninguna duda ya que la parte decimal es finita.

2.4 NÚMEROS REALES

2.4.1 EL CONCEPTO DE NÚMERO REAL



Figura 2.13: Los números reales expresan magnitudes que se pueden medir.

Las magnitudes físicas, como el tiempo, la distancia, el peso, etc., se miden en la práctica mediante los números racionales que se estudiaron en el apartado anterior. Por ejemplo, se habla de $\frac{3}{4}$ de hora o 1.4 metros. Esta manera de medir permite alcanzar el grado de precisión que se desee, por el sencillo procedimiento de considerar fracciones decimales de la unidad tan pequeñas como sea necesario. Así, 151.4 metros puede ser una aproximación suficiente para medir la longitud de una huerta, pero 1.4 metros puede ser demasiado imprecisa si lo que se mide es un trozo de tela. Cuando una medida aproximada hasta cierta fracción de la unidad no es lo suficientemente precisa, se puede mejorar la medida con una regla que esté graduada más finamente. Así, si para medir la tela se emplea una regla graduada en milímetros, se puede llegar a un resultado más exacto: 1.436 metros, por ejemplo, que corrige en 36 mm $(3 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}\ \text{m})$ la aproximación inicial. No hay ninguna limitación teórica al grado de precisión que se puede alcanzar y, con mejores medios técnicos, se podría afinar la medición hasta la diezmillonésima de metro, obteniendo por ejemplo 1.4358742 metros. Por lo tanto, parece que los números racionales deben permitir expresar con exactitud cualquier magnitud. Sin embargo, no es así. Desde los tiempos de Pitágoras, en la Grecia clásica, se sabe que hay longitudes que no pueden ser expresadas de manera exacta mediante fracciones, es decir, mediante números racionales.

El ejemplo más simple lo proporciona la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1. Si se considera un cuadrado de 1 metro de lado como el que aparece en la figura 2.14, la longitud d de su diagonal cumple, según el conocido teorema de Pitágoras, que se verá en el capítulo de Geometría,

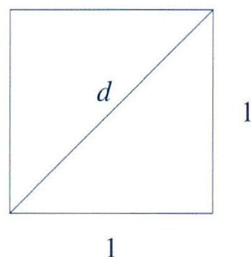


Figura 2.14: La diagonal d del cuadrado es *inconmensurable* con el lado.

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Pero no hay ningún número racional, d, que verifique la igualdad anterior. En efecto, si fuese $d = \dfrac{n}{m}$ con n y m números enteros, debería ser $\dfrac{n^2}{m^2} = 2$ o bien $n^2 = 2 \cdot m^2$. Ahora, la descomposición en factores primos del primer miembro consta de un número par de factores 2, dado que es el doble de los que tiene la descomposición de n; mientras que el segundo miembro tiene un número impar de factores 2, ya que es el doble que los que tiene la descomposición de m y uno más. De manera que la igualdad es imposible. No hay, pues, ningún número racional cuyo cuadrado sea 2 y mida con



exactitud la longitud de la diagonal de un cuadrado, tomando como unidad el lado.

Este razonamiento dejó consternados a los matemáticos griegos, ya que les mostraba que los números racionales, o proporciones, eran insuficientes para tomar la medida de ciertas longitudes y que era forzoso añadir más números, que denominaron **irracionales**. Hoy en día, superada hace tiempo la dificultad, es preciso familiarizarse con este sistema ampliado de números, llamados ahora números **reales**. Sin ellos, no se pueden resolver problemas sencillos como. *"hallar un número que multiplicado por si mismo resulte igual a 7"*, ni evitar que el borde de las reglas esté plagado de "huecos" cuya posición es inexpresable numéricamente; bien entendido que serán "huecos" puntuales puesto que habrá números racionales tan próximos a cualquiera de ellos como se desee.

Lo primero que debe observarse acerca de los números irracionales, es que no tienen una expresión decimal finita ni infinita periódica, puesto que los números que tienen estas expresiones son racionales. No es racional, por ejemplo, el número

$$1.070077000777000077770000077 7\ldots$$

cuyas cifras siguen una regla de formación sencilla, ya que su desarrollo ni es finito, ni es periódico. Desafortunadamente, los números irracionales no obedecerán normalmente a una ley de formación tan clara como la del número anterior y hay que diseñar un procedimiento para especificar uno cualquiera de ellos, sin disponer instantáneamente de todas sus cifras.

La mejor alternativa para especificar un número con infinitas cifras consiste en hacerlo por aproximaciones sucesivas. Por ejemplo, si se quiere medir la longitud d de la diagonal de un cuadrado con una unidad de medida igual a la longitud de su lado, observamos que, en una primera aproximación, d mide más de 1 y menos de 2, es decir, $1 < d < 2$, ya que $1 = 1^2 < d^2 = 2 < 2^2 = 4$. Si se quiere afinar más la medida, tenemos que utilizar las fracciones de la unidad. Con décimas del lado, observamos que $1.4 < d < 1.5$ ya que, igual que antes, $1.96 = (1.4)^2 < d^2 = 2 < (1.5)^2 = 2.25$. Para afinar todavía más, hay que considerar centésimas del lado, con las que $1.41 < d < 1.42$, puesto que $1.9881 = (1.41)^2 < d^2 = 2 < (1.42)^2 = 2.0164$. Si se procede de este modo, con sucesivos refinamientos de la medida, se obtiene una sucesión de aproximaciones que viene reflejada en la Tabla 2.8. Prolongado indefinidamente este procedimiento proporciona dos sucesiones de números racionales que definen sin ambigüedad el número d, puesto que, a la larga, determinarían todas sus cifras decimales,



n	Sucesiones que definen d			Comprobación				
	r_n		r'_n					
1	1	$< d <$	2	1	$= 1^2$	$< d^2 <$	2^2	$= 4$
2	1.4	$< d <$	1.5	1.96	$= (1.4)^2$	$< d^2 <$	$(1.5)^2$	$= 2.25$
3	1.41	$< d <$	1.42	1.9881	$= (1.41)^2$	$< d^2 <$	$(1.41)^2$	$= 2.0164$
4	1.414	$< d <$	1.415	1.999396	$= (1.414)^2$	$< d^2 <$	$(1.415)^2$	$= 2.002225$
5	1.4142	$< d <$	1.4143	1.99996164	$= (1.4142)^2$	$< d^2 <$	$(1.4143)^2$	$= 2.00024449$
6	1.41421	$< d <$	1.41422	1.9999899241	$= (1.41421)^2$	$< d^2 <$	$(1.41422)^2$	$= 2.0000182084$
7	1.414213	$< d <$	1.414214	1.999998409369	$= (1.414213)^2$	$< d^2 <$	$(1.414214)^2$	$= 2.000001237796$
8	1.4142135	$< d <$	1.4142136	1.99999982358225	$= (1.4142135)^2$	$< d^2 <$	$(1.4142136)^2$	$= 2.00000010642496$
$\vdots$		$\vdots$				$\vdots$		
		$\sqrt{2}$				2		

Tabla 2.8: Definición de un número irracional.

al estar d comprendido entre dos números racionales tan próximos como se quiera.

Podría pensarse que el esfuerzo realizado es innecesario. Con un poco de cultura matemática se sabe que el número d es simplemente $\sqrt{2}$ y no merece la pena darle tantas vueltas. Pero debe tenerse en cuenta que antes de la invención de los números reales, $\sqrt{2}$ es un símbolo sin sentido: no hay ningún número cuyo cuadrado sea 2. Después de haberlos creado, $\sqrt{2}$ es un nombre para representar al número definido por el procedimiento anterior.

Lo mismo puede decirse del famoso número π que expresa la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Los griegos sabían que la circunferencia era *"inconmensurable"* con su diámetro. Hoy en día se sabe que se corresponde con un número irracional, cuya representación decimal comienza:

$$\pi = 3.141592653589793\ldots\ldots$$

Hay calculadas más de un millón de cifras de π, lo cual es más que suficiente para cualquier propósito práctico, pero nunca se logrará conocer sus infinitas cifras. De manera que π está definido por desigualdades de la forma

$$3.141592653589793 < \pi < 3.141592653589794$$

junto con la posibilidad de aumentar la precisión tanto como se desee.

En conclusión, éste es el mecanismo que se emplea para definir todos y cada uno de los números reales.

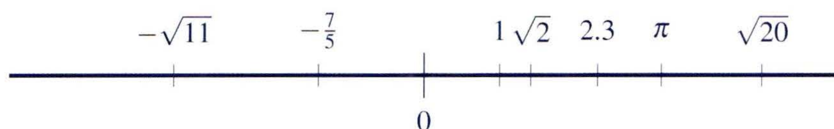


Figura 2.15: Representación gráfica de los números reales.

NÚMERO REAL

Cualquier par de sucesiones de números racionales 2.53

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \cdots \leq r_n \leq \cdots \leq r'_n \leq \cdots \leq r'_3 \leq r'_2 \leq r'_1$$

tales que la diferencia $r'_n - r_n$ llega a hacerse arbitrariamente pequeña, definen un cierto **número real**.

El conjunto de todos los números que pueden definirse de esta manera se denomina **conjunto de los números reales** *y se suele designar por R.*

Hay que advertir que distintas sucesiones de aproximaciones pueden definir el mismo número. Por ejemplo, no cabe duda de que el esquema

$$\begin{array}{lcl} 1.41418 & < d < & 1.4144 \\ 1.414208 & < d < & 1.41423 \\ 1.4142128 & < d < & 1.414215 \\ 1.41421348 & < d < & 1.4142137 \\ & \vdots & \end{array}$$

vuelve a definir el mismo número irracional $\sqrt{2}$, ya que *al final* todas las cifras decimales coincidirían con las del esquema original.

Obviamente el procedimiento será en ocasiones inútil. Por ejemplo, las sucesiones:

$$1.399 < 1.3999 < 1.39999 < \cdots < 1.40001 < 1.4001 < 1.401$$

no definen otra cosa que el número racional 1.4. Pero esto muestra que los números racionales forman parte de R, por su misma definición.

Una vez definidos los números reales, es útil visualizarlos gráficamente. Considérese para ello una longitud arbitraria, como cualquiera de las que aparece en la figura 2.15 Es claro que puede medirse con el grado de aproximación que se desee, tanto por defecto como por exceso, lo cual genera dos sucesiones de racionales, cada vez con una cifra decimal más, que dan



su medida con errores inferiores a una décima, una centésima, una milésima,. . . , una millonésima, etc. Estas aproximaciones sucesivas determinarán un cierto número real, que expresa con exactitud dicha longitud. Se concluye entonces:

RECTA REAL

2.54 *Sobre una recta, en la que se ha señalado un origen (O) y una unidad de medida, a cada punto P le corresponde un número real, racional o irracional, que mide la longitud del segmento OP con la unidad de medida prefijada.*

Dicho más llanamente, los números irracionales llenan todos los "huecos" de la recta que se habían detectado al considerar sólo números racionales.

2.4.2 OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

Puesto que todo número irracional se maneja a través de aproximaciones racionales basta operar con ellas para obtener las aproximaciones que definen el resultado.

Por ejemplo, para sumar $\sqrt{2}$ y π:

$$\begin{array}{lcr}
1.41+3.14=4.55 & <\sqrt{2}+\pi< & 4.57=1.42+3.15 \\
1.414+3.141=4.555 & <\sqrt{2}+\pi< & 4.557=1.415+3.142 \\
1.4142+3.1415=4.5557 & <\sqrt{2}+\pi< & 4.5559=1.4143+3.1416 \\
1.41421+3.14159=4.55580 & <\sqrt{2}+\pi< & 4.55582=1.41422+3.14160 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Para multiplicarlos,

$$\begin{array}{lcr}
1.41\cdot 3.14=4.4274 & <\sqrt{2}\cdot\pi< & 4.4730=1.42\cdot 3.15 \\
1.414\cdot 3.141=4.441374 & <\sqrt{2}\cdot\pi< & 4.44593=1.415\cdot 3.142 \\
1.4142\cdot 3.1415=4.4427093 & <\sqrt{2}\cdot\pi< & 4.44316488=1.4143\cdot 3.1416 \\
1.41421\cdot 3.14159=4.4428679939 & <\sqrt{2}\cdot\pi< & 4.442913552=1.41422\cdot 3.1416 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Naturalmente, si en lugar de la definición teórica del resultado lo que se desea es un valor útil a efectos prácticos, todo se reduce a tomar una aproximación suficientemente precisa de cada irracional y operar con ellas.

La resta y la división se realizan de modo similar. Asimismo se conservan todas las propiedades de las operaciones de números enteros y fraccionarios que se han estudiado en capítulos anteriores. En concreto, se cumplen las propiedades commutativa, asociativa y distributiva y siguen siendo válidas las reglas de los signos de la multiplicación y la división.

2.4.3 ORDENACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

De manera automática, la construcción realizada de los números irracionales extiende la ordenación ya existente entre los racionales al conjunto de todos los reales: si un número irracional x está definido por el esquema de aproximaciones racionales

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \cdots \leq r_n \leq \cdots \leq r'_n \leq \cdots \leq r'_3 \leq r'_2 \leq r'_1$$

debe ser

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \cdots \leq r_n \leq \cdots \leq x \leq \cdots \leq r'_n \leq \cdots \leq r'_3 \leq r'_2 \leq r'_1.$$

Ello sitúa a x entre los números racionales y, por consiguiente, ordena completamente a los números reales.

ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES

2.55

El conjunto de los números reales es un conjunto completamente ordenado; se cumple por tanto que dados dos números reales distintos, x e y, siempre se verifica que $x < y$ o bien $x > y$

Dicha ordenación estaba ya reflejada en la representación gráfica de los números reales sobre la recta y en la práctica, para comparar dos números, basta comparar una aproximación racional suficientemente precisa de cada uno. Pese a lo sencillo de esta idea, es interesante explicitar las reglas para el manejo de desigualdades, cuando se combinan con las operaciones aritméticas.

PROPIEDADES DEL ORDEN DE $\mathbb{R}$

2.56

Sean a, b, c y d números reales. Se cumple:

1) Si $a < b$ *entonces* $\begin{cases} a+c < b+c, \\ a-c < b-c. \end{cases}$

2) Si $a < b$ *y* $c < d$ *entonces* $\begin{cases} a+c < b+d, \\ a-d < b-c. \end{cases}$

3) Si $a < b$ *y* $c > 0$ *entonces* $ac < bc$.

4) Si $a < b$ *y* $c < 0$ *entonces* $ac > bc$.

EJEMPLO 2.87 Se verifican las desigualdades siguientes:

a) Como $3 < 5$, se deduce $3+2 < 5+2$.

b) Como $\frac{2}{7} < \frac{2}{5}$ se tiene $\frac{2}{7} - \sqrt{2} < \frac{2}{5} - \sqrt{2}$.

c) Como $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ y $2 < 3$, se deduce $\frac{1}{3} + 2 < \frac{1}{2} + 3$.

d) Como $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ y $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$, se deduce $\frac{1}{3} - \frac{3}{4} < \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$.

e) Como $\pi > 0$, de $\pi < 5$ se deduce $\pi^2 < 5\pi$.

f) Como $3.1 < \frac{15}{4}$, se deduce $-2 \cdot \frac{15}{4} < -2 \cdot 3.1$

g) Como $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, se deduce $\sqrt{2} - \sqrt{5} < \sqrt{3} - \sqrt{5}$.

h) Como $\sqrt{5} < \sqrt{7}$ y $-2 < 0$, se deduce $-2\sqrt{5} > -2\sqrt{7}$.

2.4.4 POTENCIAS

Dentro del conjunto de los números reales tiene ya sentido hablar de $\sqrt{2}$, o sea, el número cuyo cuadrado es 2, o del número $\sqrt[3]{5}$, es decir, aquél que elevado al cubo es igual a 5. Antes de estudiar la cuestión sistemáticamente conviene repasar las reglas del cálculo con potencias.

POTENCIA CON EXPONENTE NATURAL

Aunque en capítulos anteriores ya hemos utilizado algunos casos de potencias, comenzamos definiendo el concepto de potencia en general.

2.57 *Si a es un número real y n es un número natural no nulo, el producto*

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{(n \text{ veces})}$$

se representa por a^n y se denomina **potencia** *n-ésima de a ó potencia de* **base** *a y* **exponente** *n ó, simplemente, a elevado a n. Si $n = 0$, se interpreta $a^0 = 1$.*

EJEMPLO 2.88 Algunos ejemplos de potencias son los siguientes:

a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

b) $(5.2)^3 = 5.2 \cdot 5.2 \cdot 5.2$.

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$.

d) $\pi^2 = \pi \cdot \pi$.

De la definición de potencia n-ésima se deducen inmediatamente las siguientes propiedades:

Si a es un número real y n y m son números naturales, se cumple: 2.58

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

2) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

EJEMPLO 2.89 Los ejemplos siguientes ilustran las propiedades anteriores:

a) $7^2 \cdot 7^3 = (7 \cdot 7)(7 \cdot 7 \cdot 7) = 7^5$.

b) $4^3 \cdot \pi^3 = (4 \cdot 4 \cdot 4)(\pi \cdot \pi \cdot \pi) = (4 \cdot \pi)(4 \cdot \pi)(4 \cdot \pi) = (4 \cdot \pi)^3$.

c) $\left(5^2\right)^3 = (5 \cdot 5)(5 \cdot 5)(5 \cdot 5) = 5^6$.

EJEMPLO 2.90 La aplicación repetida de las propiedades de las potencias permite simplificar expresiones complejas, como se ve en el siguiente caso:

$$\left(2^3 3^4 4\right)^2 = \left(2^3 3^4 2^2\right)^2 = \left(2^5 3^4\right)^2 = \left(2^5\right)^2 \left(3^4\right)^2 = 2^{10} 3^8.$$

En la definición de potencia se ha exigido que el exponente sea un número natural. El propósito es ahora extender la definición de potencia a un exponente entero, contemplando la posibilidad de que el exponente pueda ser también un número negativo. Consideremos la división $\frac{3^6}{3^2}$. Al aplicar la definición de potencia y la simplificación de fracciones, resulta:

$$\frac{3^6}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 3^{(6-2)}.$$

Esto indica que para dividir potencias con la misma base basta con restar los exponentes:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Pero si $n < m$, el exponente sería un número negativo, que es una potencia cuyo significado todavía no conocemos. Ahora bien, para la división $\frac{3^2}{3^6}$, la misma manera de proceder da

$$\frac{3^2}{3^6} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3^4}.$$

Y una notación coherente con la situación anterior, igual a la utilizada en la sección 2.3.3, lleva a denotar esta última fracción como:

$$\frac{1}{3^4} = 3^{(2-6)} = 3^{-4}.$$

POTENCIA CON EXPONENTE ENTERO

Esto sugiere la siguiente definición de potencia con exponente negativo:

2.59 *Si a es un número real distinto de cero y n es un número natural no nulo, se tiene*

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}.$$

Con esta definición la igualdad $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ no es más que una consecuencia de la propiedad 1) de las potencias ya que:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n+(-m)} = a^{n-m}.$$

Es sencillo comprobar también que las tres propiedades de las potencias siguen siendo válidas para exponentes enteros.

EJEMPLO 2.91 Los siguientes ejemplos ilustran las propiedades de las potencias con exponentes enteros.

a) $2^3 \cdot 2^{-4} = \frac{2^3}{2^4} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$.

b) $7^2 \cdot 7^{-3} \cdot 7^5 = 7^{2-3+5} = 7^4$.

c) $2^3 \cdot 3^{-3} = 2^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

d) $\left(4^2\right)^{-1} = \frac{1}{4^2} = 4^{-2}$.

e) $\left(11^{-2}\right)^3 = \left(\frac{1}{11^2}\right)^3 = \frac{1}{11^6} = 11^{-6}$.

f) $\left(5^2\right)^{-2} = \left(\frac{1}{5^2}\right)^2 = \frac{1}{5^4} = 5^{-4}$.

g) $\frac{\left(a^3\right)^{-2}}{\left(a^{-5}\right)^3}. = \frac{a^{-6}}{a^{-15}} = a^{15}a^{-6} = a^9$.

2.4.5 RAÍCES

Pasemos ahora al estudio de las raíces que, en realidad, no es muy diferente de lo anterior.

RAÍZ

Dado un número natural n no nulo y un número real positivo a, siempre existe un número real positivo b tal que 2.60

$$b^n = a.$$

Se dice que b es la **raíz** *n-ésima de a y se escribe*

$$b = \sqrt[n]{a} \quad \text{o mejor} \quad b = a^{\frac{1}{n}}.$$

Las notaciones $\sqrt[n]{a}$ y $a^{\frac{1}{n}}$ son equivalentes. Salvo en casos muy simples, es aconsejable abandonar la primera notación y utilizar sólo la segunda porque se presta a un manejo más sencillo. En los casos más usuales, con $n = 2$ ó $n = 3$ se habla de raíz cuadrada, que se representa simplemente por $\sqrt{b}$, y cúbica respectivamente. Las demás son raíces cuartas, quintas, sextas, etc.

Podemos preguntarnos si, efectivamente, dado un número real positivo a y un número natural n no nulo es siempre posible encontrar un número real b tal que su potencia n-ésima sea igual a a. La respuesta es sí y puede comprobarse acudiendo a la definición de número real, es decir, construyendo el número buscado mediante un par de sucesiones de números racionales que lo aproximen. Veamos mediante un ejemplo de qué manera habría que proceder. Supongamos que deseamos buscar un número real x tal que $x = \sqrt[3]{5}$, es decir, $x^3 = 5$. Para encontrarlo debemos considerar dos sucesiones de números racionales que lo aproximen. Comenzando por tanteo y buscando unas cuantas aproximaciones encontraríamos sucesiones como las reflejadas en la Tabla 2.9. Concluimos entonces que es posible encontrar el número $\sqrt[3]{5}$. Esta idea es válida para una raíz cualquiera por lo que la definición de raíz que hemos empleado es correcta.

EJEMPLO 2.92 $\sqrt[3]{7}$ es un número real positivo que cumple $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = 7$. Cuando no sea necesario trabajar con valores numéricos la especificación anterior es suficiente. Si se desea su valor aproximado, lo mejor es disponer de una calculadora de bolsillo, lo suficientemente completa para que permita calcularlo. En otro caso, no queda más solución que tantear aproximaciones.

La notación propuesta conduce de forma natural a la definición de potencia con exponente igual a un número fraccionario:

n	Sucesiones que definen x r_n				r'_n	Comprobación					
1	1.7	$<$	x	$<$	1.8	4.913	$= 1.7^3$	$< x^3 <$	1.8^3	$= 5.832$
2	1.709	$<$	x	$<$	1.710	4.991443829	$= (1.709)^3$	$< x^3 <$	$(1.710)^3$	$= 5.000211$
3	1.7099	$<$	x	$<$	1.7100	4.999333821299	$= (1.7099)^3$	$< x^3 <$	$(1.7100)^3$	$= 5.000210000000$
4	1.70997	$<$	x	$<$	1.70998	4.999947835616973	$= (1.70997)^3$	$< x^3 <$	$(1.70998)^3$	$= 5.000035556051992$
5	1.709975	$<$	d	$<$	1.709976	4.999991...	$= (1.709976)^3$	$< x^3 <$	$(1.709975)^3$	$= 5.0000004...$
$\vdots$			$\vdots$					$\vdots$		
			$\sqrt[3]{5}$					5		

Tabla 2.9: Definición del número $\sqrt[3]{5}$.

POTENCIA CON EXPONENTE FRACCIONARIO

2.61 *Si a es un número real positivo y m, n son números naturales se tiene*

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}.$$

La coincidencia de las expresiones $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ y $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ se comprenderá fácilmente con un ejemplo.

EJEMPLO 2.93 El número $x = (2^3)^{\frac{1}{4}}$ es, por definición, aquel que elevado a la cuarta potencia es igual a 2^3, es decir, tal que $x^4 = 2^3$. Ahora bien, por la propiedad 3) de las potencias

$$\left[\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^3\right]^4 = \left[\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^4\right]^3.$$

Pero, habida cuenta que $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 2$ resulta

$$\left[\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^4\right]^3 = 2^3$$

Luego efectivamente $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^3 = (2^3)^{\frac{1}{4}}$.

Veamos algunos ejemplos adicionales de la definición de potencia con exponente fraccionario, observando que la utilización de fracciones equivalentes conduce a expresiones más simples.

EJEMPLO 2.94

a) $(3^8)^{\frac{1}{12}} = 3^{\frac{8}{12}} = 3^{\frac{2}{3}}$.

b) $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^9 = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3.$

c) $(3^{-4})^{\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{4}{2}} = 3^{-2}.$

d) $\left(5^{\frac{1}{6}}\right)^{-3} = 5^{-\frac{3}{6}} = 5^{-\frac{1}{2}}.$

No es necesario reformular nuevas propiedades de las potencias; basta interpretar que n y m pueden ser números racionales, para que se sigan verificando las ya conocidas para exponentes naturales y enteros.

EJEMPLO 2.95 Se cumple:

$$2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

Podemos comprobar que este resultado es correcto elevando a 6 los dos miembros de la igualdad y aplicando la definición de potencia:

$$\left(2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{6}}\right)^6 = 2^2 2 = 2^3 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6.$$

EJEMPLO 2.96 Se cumple:

$$\pi^{\frac{9}{10}}\pi^{\frac{3}{5}} = \pi^{\frac{9}{10}+\frac{3}{5}} = \pi^{\frac{15}{10}} = \pi^{\frac{3}{2}}.$$

Al igual que en el ejemplo anterior puede comprobarse la validez del resultado elevando a 10 los dos miembros de la igualdad y aplicando la definición de potencia:

$$\left(\pi^{\frac{9}{10}}\pi^{\frac{3}{5}}\right)^{10} = \pi^9\pi^6 = \pi^{15} = \left(\pi^{\frac{3}{2}}\right)^{10}.$$

EJEMPLO 2.97 Los exponentes negativos no causan ninguna dificultad:

$$3^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{1}{3}} = 3^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)} = 3^{\frac{1}{6}}$$

ya que, como en los ejemplos anteriores, comprobamos que

$$\left(3^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{1}{3}}\right)^6 = 3^3 3^{-2} = 3 = \left(3^{\frac{1}{6}}\right)^6.$$

EJEMPLO 2.98 Se cumple:

$$(3\ 5)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{2}}$$

ya que el cuadrado del segundo miembro:

$$\left(3^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3 \cdot 5$$

coincide con el cuadrado del primer miembro.

EJEMPLO 2.99 Se cumple:

$$\left(2\ 5^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}5^{-\frac{1}{3}}$$

ya que el cubo del segundo miembro:

$$\left(2^{\frac{1}{3}}5^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3\left(5^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = 2\ 5^{-1}$$

coincide con el cubo del primero.

EJEMPLO 2.100 Se cumple:

$$2^{\frac{3}{2}}5^{\frac{3}{2}} = 10^{\frac{3}{2}}$$

puesto que

$$\left(2^{\frac{3}{2}}5^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 2^3 5^3 = 10^3 = \left(10^{\frac{3}{2}}\right)^2.$$

EJEMPLO 2.101 Se cumple:

$$\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{6}}$$

puesto que

$$\left[\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^6 = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 7 = \left(7^{\frac{1}{6}}\right)^6.$$

Puede comprobarse que la aplicación sistemática de las reglas conduce a la simplificación de las expresiones con potencias y radicales de números reales, como se ve en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 2.102

a) $5^{-\frac{3}{4}}10^{\frac{3}{4}} = \left(5^{-3}10^3\right)^{\frac{1}{4}} = \left[\left(\frac{10}{5}\right)^3\right]^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}.$

b) $8^{-\frac{5}{3}} = \left(2^3\right)^{-\frac{5}{3}} = 2^{-5}.$

c) $\dfrac{5^2\sqrt[3]{5}}{5^{-\frac{2}{3}}} = 5^2 5^{\frac{1}{3}}5^{\frac{2}{3}} = 5^3.$

d) $3^{\frac{1}{4}}\left(3^{\frac{3}{4}} - 3^{\frac{7}{4}}\right) = 3^{\frac{1}{4}}3^{\frac{3}{4}} - 3^{\frac{1}{4}}3^{\frac{7}{4}} = 3 - 3^2 = 3 - 9 = -6.$

e) $5^{\frac{3}{5}}\left(5^{\frac{7}{5}} + 5^{\frac{2}{5}}\right) = 5^{\frac{3}{5}}\left(5^{\frac{2}{5}}(5+1)\right) = \left(5^{\frac{3}{5}}5^{\frac{2}{5}}\right)6 = 5\cdot 6 = 30.$

f) $\sqrt{5^3} + \sqrt{5^5} = \sqrt{5^3}\left(1 + \sqrt{5^2}\right) = \sqrt{5^2 5}\,(1+5) = 5\sqrt{5}\cdot 6 = 30\sqrt{5}.$

g) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32} = \sqrt{2^3} + \sqrt{3^2 2} - \sqrt{4^2 2} = (2+3-4)\sqrt{2} = \sqrt{2}.$

2.5 ECUACIONES

2.5.1 LA IDEA DE ECUACIÓN

Muchos problemas que se plantean en la vida real consisten en hallar el número, o los números, que cumplen ciertas condiciones. Las Matemáticas nos ofrecen un arma muy útil para enfrentarnos con este tipo de situaciones: las ecuaciones. El pilar en que descansa esta poderosa herramienta práctica ya se ha encontrado anteriormente al estudiar los cálculos con expresiones literales, esto es, los cálculos donde algunas letras sustituyen a números desconocidos.

La mejor manera de comprender qué es una ecuación y qué tipo de problemas resuelve es presentar un ejemplo extraído de la vida cotidiana. Supongamos que una cuenta a plazo produce un 12 % de interés anual. Una cuestión directa que podemos plantearnos es calcular cuál será el interés que obtenemos si depositamos en dicha cuenta 10000 euros. Esta cuestión se responde fácilmente con los conocimientos adquiridos en los capítulos precedentes: basta recordar que 12 % es un número fraccionario, que equivale al quebrado $\frac{12}{100}$ y efectuar la multiplicación $10000 \times \frac{12}{100} = 1200$, para encontrar que el rendimiento del depósito será de 1200 euros.

Pero hay otro tipo de cuestiones que podemos plantearnos sobre dicha cuenta, que exigen un razonamiento más sutil. Por ejemplo, supongamos que deseamos saber cuánto dinero debería ingresarse para obtener unos intereses anuales de 900 euros. No se sabe qué cantidad habrá que ingresar. Como también sabemos calcular con letras, podemos recurrir a denominar x a la cantidad desconocida y actuar como en el caso anterior. Si se ingresan x euros, el interés que producen será el 12 % de x, es decir, $\frac{12}{100} \cdot x = 0.12x$ Así, para que ese interés sea igual a 900 euros, debe cumplirse que el número $0.12x$ debe ser precisamente el número 900, es decir, ha de cumplirse la igualdad $0.12x = 900$. Recordando las operaciones con números fraccionarios, encontramos que el único número x que puede cumplir la igualdad anterior es $x = \frac{900}{0.12}$, o equivalentemente, el número $x = 7500$. Averiguamos así que la cantidad que hay que depositar en la cuenta al 12 %, para obtener unos intereses de 900 euros, es justamente 7500 euros.

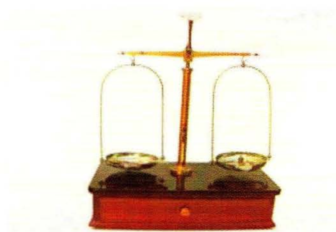


Figura 2.16: Las ecuaciones representan un cierto equilibrio entre los dos miembros separados por el signo 'igual'.

Si se repasa el caso que acabamos de exponer, se encontrarán las siguientes características:

1. El problema plantea *calcular un número*, la cantidad de dinero que hay que depositar en una cuenta, a fin de que se *cumpla cierta condición*: que el interés percibido sea igual a 900 euros.

2. El método utilizado para enfrentarse con el problema consiste en designar con una *letra*, en este caso x, al número que se quiere calcular y *traducir a símbolos* –letras, números y signo igual– la condición que estaba expresada con palabras.

3. La traducción de la condición tiene cierto carácter de *balance*. En un platillo se pone el interés que se percibirá por depositar x euros, $0.12x$; en el otro platillo, la cantidad que se quiere recibir, 900 euros. Para que ambos platillos estén en equilibrio, las dos expresiones han de ser iguales: $0.12x = 900$. Luego se tendrá $x = 7500$ euros.

La igualdad $0.12x = 900$ se denomina **ecuación** y traduce completamente la condición que resume el problema: *hallar un número tal que su 12 % sea igual a* 900. En una ecuación como $0.12x = 900$ el número x que se quiere hallar se denomina **número incógnita**, **cantidad incógnita** o simplemente **incógnita**.

Por otra parte, si examinamos la solución del caso anterior, encontramos dos pasos bien distintos:

1. Primero se establece la ecuación que traduce al lenguaje matemático las condiciones del problema. En el ejemplo sería

$$\underbrace{\text{Hallar un número}}_{¿x?} \text{ tal que } \underbrace{\text{su } 12\,\%}_{0.12x} \; \underbrace{\text{sea igual a}}_{=} \; \underbrace{900 \text{ euros}}_{900}$$

   Esta traducción de las condiciones literales a símbolos matemáticos se denomina **planteamiento** de la ecuación.

2. Una vez planteada la ecuación, se trata de hallar el valor que debe tener la incógnita para que se verifique la ecuación. Esta fase se denomina **resolución** de la ecuación.

ECUACIONES

2.62 *Se llama* **ecuación** *a toda igualdad que relacione números con letras que representan cantidades desconocidas denominadas* **incógnitas** *y que se quieren hallar.*

- **Plantear** *una ecuación es traducir las condiciones literales a símbolos matemáticos.*

- **Resolver** *una ecuación es hallar el valor que deben tener las incógnitas para que se verifique la ecuación.*

EJEMPLO 2.103 Una herencia de 120000 euros se reparte entre dos personas, de forma que uno de los herederos recibe 30000 euros más que el otro. Queremos saber cuánto recibe cada heredero. El problema consiste en hallar dos números que representan las cantidades de dinero percibidas por cada uno. Para plantear la ecuación, designamos por x a la cantidad que recibe el más favorecido. Por la condición del reparto, el otro heredero recibirá 30000 euros menos; simbólicamente: $x - 30000$. Puesto que toda la herencia se reparte entre ambos, la suma de las cantidades que reciben individualmente será igual a 120000. Esto se traduce en la ecuación:

$$x + (x - 30000) = 120000.$$

Podemos simplificar la expresión del lado izquierdo de la igualdad y obtenemos una traducción equivalente:

$$2x - 30000 = 120000.$$

Para resolver la ecuación anterior podemos razonar en términos de estado de equilibrio: si sumamos a los dos lados de la igualdad una misma cantidad, el balance no cambia; entonces, nada impide sumar a los dos miembros 30000 euros:

$$2x - 30000 + 30000 = 120000 + 30000.$$

Si efectuamos las operaciones indicadas resulta una ecuación más simple:

$$2x = 150000.$$

Ahora es muy sencillo resolver la ecuación, ya que el único número que multiplicado por 2 resulta igual a 150000 es:

$$x = \frac{150000}{2} = 75000.$$

Así pues, el reparto consiste en dar 75000 euros a uno y $75000 - 30000 = 45000$ euros al otro. Ambas cantidades suman $75000 + 45000 = 120000$ euros que es el total de la herencia.

Sobre el planteamiento de ecuaciones no hay reglas fijas; es, más bien, cuestión de práctica. En cuanto a la resolución de ecuaciones es posible dar algunos métodos generales según el tipo de ecuación. Ello exige una labor previa de clasificación de las ecuaciones.

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES

2.63 *Las ecuaciones pueden clasificarse atendiendo a diversos criterios:*

1. *Según el* **número de incógnitas** *que aparecen: una, dos, tres, etc.*

2. *Según el* **mayor exponente** *al que están elevadas las incógnitas. Este número se denomina* **grado** *de la ecuación. Las ecuaciones de grado uno se suelen denominar* **lineales**. *Para los grados restantes se suele hablar de ecuaciones de segundo grado, tercer grado, etc. y son todas ellas ecuaciones* **no lineales**.

3. *Según el* **número de ecuaciones**. *En ocasiones, un problema conduce a plantear varias ecuaciones que deben ser satisfechas, a la vez, por las soluciones. A estos conjuntos de ecuaciones que deben verificar, simultáneamente, las incógnitas se denominan* **sistemas de ecuaciones**; *así por ejemplo, hay sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, de dos ecuaciones con tres incógnitas, de tres ecuaciones con tres incógnitas, etc.*

EJEMPLO 2.104 La ecuación $x^2 - 4x + 2 = 0$ tiene una incógnita y es de segundo grado, puesto que el mayor exponente de x es 2.

EJEMPLO 2.105 La ecuación $x - 2y - 3 = 0$ tiene dos incógnitas y grado igual a uno, ya que el mayor exponente al que están elevadas las incógnitas es 1; por lo tanto, es una ecuación lineal.

EJEMPLO 2.106 La ecuación $x^3 - 2x = y + 1$ tiene dos incógnitas y es de tercer grado, porque la incógnita x está elevada a exponente 3; por tanto, es una ecuación no lineal.

EJEMPLO 2.107 Las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 4 \\ -4x & + & 2y & = & -3 \end{array}\right\}$$

forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

EJEMPLO 2.108 Las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 1 \\ 4x & - & 2y & = & 3 \\ 3x & - & y & = & -1 \end{array}\right\}$$

forman un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.

EJEMPLO 2.109 Las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ 4x & - & 2y & + & 2z & = & 3 \\ 3x & - & y & - & 4z & = & -1 \end{array}\right\}$$

forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

2.5.2 SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN

ECUACIONES CON UNA ÚNICA INCÓGNITA

Resolver una ecuación es hallar números tales que al reemplazar por ellos las incógnitas se cumple la igualdad de los dos miembros. Estos números se denominan **soluciones** de la ecuación. De lo anterior se deduce que para comprobar si un número es solución de una ecuación debe reemplazarse la incógnita por el número y, si la expresión numérica que resulte es cierta, entonces el número será solución de la ecuación.

EJEMPLO 2.110 El número 3 es solución de la ecuación $2x-5=1$, ya que si se sustituye x por 3 se cumple la igualdad de los dos miembros $2\cdot 3-5=1$. Por el contrario, el número 2 no es solución de la ecuación, puesto que si se sustituye x por 2 no son iguales los dos miembros $2\cdot 2-5=-1\neq 1$.

EJEMPLO 2.111 El número 2 es solución de la ecuación $x^2-4=0$, puesto que se cumple $2^2-4=0$. El número -2 es otra solución de la ecuación, dado que se verifica $(-2)^2-4=0$. Sin embargo, 3 no es solución, puesto que $3^2-4=9-4=5\neq 0$.

EJEMPLO 2.112 Cada uno de los números 1, 0 y -2 es una solución de la ecuación $x^3+x^2=2x$, puesto que se cumple:

$$\begin{aligned} 1^3+1^2=2 &= 2\cdot 1, \\ 0^3+0^2=0 &= 2\cdot 0, \\ (-2)^3+(-2)^2=-4 &= 2\cdot(-2). \end{aligned}$$

ECUACIONES CON MÁS DE UNA INCÓGNITA

Cuando la ecuación tiene más de una incógnita, las soluciones no consisten en un número sino en varios: tantos como incógnitas haya. En estos

casos, es preciso escribir de manera ordenada los números que componen la solución para saber a qué incógnita corresponden.

EJEMPLO 2.113 La ecuación $3x-2y=5-2x$ tiene dos incógnitas x, y. Sus soluciones serán *pares ordenados* de números. Por ejemplo, $(1,0)$. El primer número del par es el valor que corresponde a x, y el segundo, el valor que corresponde a y. Para comprobar que $(1,0)$ es una solución, se reemplaza en la ecuación x por 1 e y por 0 y se comprueba que ambos miembros son iguales: $3\cdot1-2\cdot0=3=5-2\cdot1$. La expresión par ordenado indica que no es igual $(1,0)$ que $(0,1)$. En efecto: el par $(1,0)$ es solución mientras que $(0,1)$ no es solución, pues, al sustituir x por 0 e y por 1, la ecuación no se verifica: $3\cdot0-2\cdot1=-2\neq5=5-2\cdot0$. A menudo, para evitar confusiones en el orden de los números que componen la solución, se escribe de manera explícita $x=1$, $y=0$, pero debe entenderse que esta expresión de dos valores, uno para cada variable, define una única solución de la ecuación.

EJEMPLO 2.114 El par de números $x=1$, $y=-2$ es una solución de la ecuación $2x+y^2=6$, puesto que se tiene: $2\cdot1+(-2)^2=6$. De igual manera puede comprobarse que el par $x=3$, $y=0$, también es solución. Mientras que el par $x=2$, $y=1$, no es solución.

EJEMPLO 2.115 La terna de números $x=1$, $y=-2$, $z=-1$ es una solución de la ecuación $-3x-2y+z=0$. En efecto: $-3\cdot1-2\cdot(-2)+(-1)=0$.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Por lo que a sistemas de ecuaciones se refiere, se denomina **solución de un sistema** a un conjunto ordenado de números —tantos como incógnitas tenga el sistema— que es solución de todas las ecuaciones del sistema.

EJEMPLO 2.116 El par de números $x=2$, $y=-3$, es una solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & -1 \end{array}\right\}$$

porque si se reemplaza x por 2 e y por -3 en el sistema, se verifican las dos ecuaciones de éste.

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2\cdot2 & + & (-3) & = & 1 \\ 2 & + & (-3) & = & -1 \end{array}\right\}$$

EJEMPLO 2.117 La terna de números $x = -2$, $y = 1$, $z = -1$, es una solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} & x & + & y & - & z & = 0 \\ & x & + & 2y & & & = 0 \\ - & x & + & 2y & + & z & = 3 \end{array}\right\}$$

porque si se reemplaza x por -2, y por 1 y z por -1 en el sistema, se verifican todas las ecuaciones de éste.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} & -2 & + & 1 & - & (-1) & = 0 \\ & -2 & + & 2\cdot 1 & & & = 0 \\ - & (-2) & + & 2\cdot 1 & + & (-1) & = 3 \end{array}\right\}$$

Podemos resumir todo lo anterior en la definición siguiente:

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

2.64

- *Se llama* **solución** *de una ecuación a todo conjunto ordenado de números —tantos como incógnitas haya— tales que si se sustituye la primera incógnita por el primer número, la segunda por el segundo, etc., el valor del primer miembro de la ecuación es igual al del segundo.*
- *Se llama* **solución de un sistema de ecuaciones** *a un conjunto ordenado de números —tantos como incógnitas tenga el sistema— que es solución de todas las ecuaciones del sistema.*

2.5.3 REGLAS GENERALES PARA RESOLVER ECUACIONES

Como sabemos, una ecuación puede entenderse como una condición que deben cumplir ciertos números. En el lenguaje ordinario, es posible expresar una misma condición con términos diferentes. Otro tanto ocurre en el lenguaje de ecuaciones; puede haber diferentes ecuaciones que expresen una misma condición. Por ejemplo, es lo mismo decir que el doble de un número es 3 que decir que su cuádruple es 6. La ecuación que representa la primera expresión es $2x = 3$, mientras que la ecuación que representa la segunda es $4x = 6$. Pero parece evidente que no hay nada esencialmente diferente entre una y otra ecuación. En ambos casos, el número que resuelve la ecuación es $3/2$, que es el número que cumple cualquiera de las dos expresiones literales. De modo análogo, es lo mismo decir que el doble de un número más uno es cinco que, directamente, decir que el doble de dicho número es cuatro. La traducción, en forma de ecuaciones de estas



expresiones es, respectivamente, $2x+1=5$ y $2x=4$. Nuevamente, comprobamos que $x=2$ resuelve cualquiera de las dos ecuaciones. Esta idea de ecuaciones que comparten las mismas soluciones es clave para resolver ecuaciones.

ECUACIONES EQUIVALENTES

2.65 *Dos ecuaciones se dicen* **equivalentes** *si tienen las mismas soluciones.*

La resolución de ecuaciones consiste, básicamente, en encontrar otras ecuaciones equivalentes a las dadas que sean más simples y, por tanto, más sencillas de resolver. Por ello, tienen particular importancia las reglas que vamos a estudiar a continuación, ya que permiten obtener ecuaciones equivalentes a la dada.

REGLA 1

2.66 *Si se suma o resta a ambos miembros de una ecuación un mismo número, o una misma expresión donde intervengan las incógnitas de la ecuación, se obtiene una ecuación equivalente.*

EJEMPLO 2.118

a) Si a cada miembro de la ecuación $2x-3=7$ se le suma el número 3, es decir:

$$2x-3+3=7+3$$

se obtiene la ecuación $2x=10$ equivalente a la primera.

b) Si a cada miembro de la ecuación $2x-3=7-x$ se le suma la expresión $3+x$, es decir:

$$(2x-3)+(3+x)=(7-x)+(3+x)$$

se obtiene la ecuación $3x=10$ equivalente a la primera.

En particular, si se quiere cambiar de miembro alguno de los términos que aparecen en una ecuación, basta con sumar el opuesto de dicho término a cada miembro de la ecuación. Por ejemplo, en la ecuación $2x-3=5-3x$, para pasar al primer miembro el término $-3x$ del segundo, se suma su opuesto $3x$ a cada miembro; así resulta la ecuación equivalente $(2x-3)+3x=(5-3x)+3x$ o bien, la ecuación $5x-3=5$. Este tipo de transformaciones son frecuentes y se resumen en la siguiente regla:

REGLA 2

2.67 *Se puede pasar cualquier término de una ecuación de un miembro a otro sin más que cambiarle el signo.*

EJEMPLO 2.119 En la ecuación $3x-8=2x+4$, el sumando $2x$ pasa del segundo miembro al primero con signo *menos*, $3x-8-2x=4$ y la ecuación que resulta, $x-8=4$, es equivalente a la primera.

Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, *la ecuación que resulta es equivalente a la primera.* 2.68

EJEMPLO 2.120 Si cada miembro de la ecuación $4x+5=2-6x$ se multiplica por 3, se obtiene la ecuación $3(4x+5)=3(2-6x)$, o bien la ecuación $12x+15=6-18x$, que es equivalente a la primera.

EJEMPLO 2.121 Si cada miembro de la ecuación $18x-6=12$ se divide por 6 se obtiene la ecuación $\frac{1}{6}(18x-6)=\frac{1}{6}(12)$, o bien la ecuación $3x-1=2$, que es equivalente a la primera.

EJEMPLO 2.122 La exigencia de que el número por el que se divida o multiplique cada miembro de la ecuación sea distinto de cero es imprescindible. El mal uso de la Regla 3 conduce a "demostraciones" paradójicas. Pensemos, por ejemplo, en la ecuación $2x=x$. Si se divide por x cada miembro, resultará la "paradoja" $2=1$. El error está en que se ha dividido por cero cada miembro, puesto que si $2x=x$, necesariamente $x=0$; luego dividir por x equivale a dividir por cero.

EJEMPLO 2.123 Otro ejemplo de las paradojas a que conduce el mal uso de la Regla 3 es el siguiente:

se parte de la igualdad	3^2	$=$	$3\cdot 3$
se resta 3^2 a cada miembro	3^2-3^2	$=$	$3\cdot 3-3^2$
entonces	$(3+3)(3-3)$	$=$	$3(3-3)$
se divide cada miembro por $(3-3)$	$3+3$	$=$	3
luego	6	$=$	3

Otra vez el error consiste en dividir por cero.

2.5.4 ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

La ecuación más sencilla que puede plantearse es una ecuación en la que aparece una única variable elevada a exponente 1; esta ecuación es la ecuación lineal, o de primer grado, con una incógnita. Un ejemplo de este tipo de ecuaciones es la ecuación $5x+4=9-2x$. La forma de resolver este tipo de ecuaciones es sencilla. La idea consiste en tratar de poner a un lado de la igualdad todos los términos que contienen a la incógnita y al otro lado a los términos que no la contienen. Ello se consigue aplicando

de forma adecuada las reglas estudiadas anteriormente. En este caso, para lograr que todos los términos que tienen x estén en el primer miembro de la ecuación y los demás términos en el segundo miembro aplicamos la Regla 2, de forma que pasamos $2x$ al primer miembro, sumando, y 4 al segundo miembro, restando. Así se llega a la ecuación equivalente $5x+2x=9-4$. Ahora podemos operar en cada miembro para obtener una nueva ecuación equivalente, $7x=5$. La ecuación anterior es muy sencilla de resolver. Basta dividir los dos miembros de la ecuación por el número 7 que está multiplicando a la incógnita para obtener $x=\frac{5}{7}$.

La ecuación lineal con una incógnita $7x=5$, equivalente a la de origen, tiene una forma peculiar: a un lado del signo igual está la incógnita, en este caso x, multiplicada por un número real, en este caso 7; al otro lado del signo igual está únicamente un número real. Esta forma de la ecuación lineal con una incógnita recibe un nombre especial.

FORMA NORMAL DE LA ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA

2.69 *Si a y b son dos números reales, una ecuación lineal con una incógnita x de la forma*

$$ax=b$$

se dice que está en la **forma normal** .

- *El número a se denomina* **coeficiente** *de la incógnita.*
- *El número b se denomina* **término del lado derecho** *de la ecuación.*

Como hemos visto, dada una ecuación lineal con una incógnita es sencillo encontrar una ecuación equivalente a ella que esté en la forma normal. Esto se consigue pasando todos los términos donde aparezca la incógnita a un miembro y todos los términos numéricos a la otra. Luego se divide cada miembro por el coeficiente de la incógnita. Este proceso de aislar una incógnita en uno de los miembros de la ecuación se llama **despejar** la incógnita. Entonces, la solución de la ecuación lineal con una incógnita en forma normal puede encontrase de manera general en función del coeficiente a y del término del lado derecho b.

Dada la ecuación 2.70

$$ax = b$$

donde a, b son números reales y x es la incógnita, se cumple:

- *Si $a \neq 0$ la ecuación tiene una única solución*

$$x = \frac{b}{a}$$

- *Si $a = 0$ hay que distinguir dos casos:*
  - *Si $b = 0$, la ecuación tiene infinitas soluciones, ya que cualquier número x cumple $0 \cdot x = 0$.*
  - *Si $b \neq 0$, no hay solución, ya que ningún número x puede cumplir $0 \cdot x = b$.*

EJEMPLO 2.124 Resolver la ecuación

$$5x + 3 = 3x + 3.$$

Para poner la ecuación en la forma normal, en primer lugar se pasa $3x$ al primer miembro y 3 al segundo, obteniendo la ecuación $5x - 3x = 3 - 3$. Luego se efectúan las operaciones en los dos miembros, a fin de simplificar las expresiones, y se obtiene $2x = 0$. Por lo tanto, $x = 0$.

EJEMPLO 2.125 Resolver la ecuación

$$2(3x - 1) + 5 = 1 - 2x + 4(1 + x).$$

Aplicando las reglas repetidamente obtenemos la siguiente serie de ecuaciones equivalentes que conducen a una ecuación en la forma normal:

$$\begin{aligned} 2(3x - 1) + 5 &= 1 - 2x + 4(1 + x) \\ 6x - 2 + 5 &= 1 - 2x + 4 + 4x \\ 6x + 3 &= 5 + 2x \\ 6x - 2x &= 5 - 3 \\ 4x &= 2. \end{aligned}$$

Entonces $x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 2.126 Resolver la ecuación:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 9 - \frac{x}{4}.$$



Primero se pasa el término $\frac{x}{4}$ al primer miembro:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+\frac{x}{4}=9.$$

Luego, se calcula el primer miembro:

$$\frac{9x}{12}=9.$$

Después, se divide cada miembro por 9,

$$\frac{x}{12}=1$$

y se multiplica cada miembro por 12. Resulta así $x=12$.

2.5.5 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Consideremos el siguiente sistema de de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & 4y & = & 6 \\ & & y & = & 2 \end{array}\right\}$$

Este sistema no parece muy difícil de resolver: en la segunda ecuación tenemos $y=2$; si se reemplaza este valor en la primera, resulta $x-8=6$; esto es, $x=14$. El sistema ha resultado fácil de resolver porque una incógnita, la y, ya estaba despejada en una de las ecuaciones y ha bastado con sustituir su valor en la otra ecuación para convertir a ésta en una ecuación con una sola incógnita, la x, que ya sabemos resolver. Este ejemplo nos sugiere el camino para resolver los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se trata de conseguir despejar una incógnita en una de las ecuaciones para poder llevar su valor a la otra ecuación, que será entonces una ecuación con una incógnita, para la que disponemos de una forma general de solución. Veamos cómo podemos llevar adelante esta idea. Consideremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas más complicado:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 5 \\ 3x & - & y & = & 10 \end{array}\right\}$$

Si en la primera ecuación se pasa el término $2y$ al segundo miembro, resultará $x=5+2y$. Ahora, se reemplaza x en la segunda ecuación por su valor equivalente $5+2y$ y resulta el sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 5 \\ 3(5+2y) & - & y & = & 10 \end{array}\right\}$$

que es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 5 \\ 15+6y & - & y & = & 10 \end{array}\right\}$$

o bien, al sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 5 \\ & & 5y & = & -5 \end{array}\right\}$$

Este último sistema también se resuelve de inmediato; de la segunda ecuación se obtiene $y = -1$ y, al sustituir este valor en la primera, se tiene $x+2 = 5$; por lo cual $x = 3$. Así pues, la solución es:

$$x = 3, \;\; y = -1.$$

Este procedimiento para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se suele denominar **método de sustitución**.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

2.71

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales E1 *y* E2 *con dos incógnitas x, y se procede del modo siguiente:*

Paso 1

1.1 Se despeja en la ecuación E1 *la incógnita x en función de y.*

1.2 Se sustituye en E2 *el valor despejado de x; resulta una ecuación en y que llamamos* $E2'$.

1.3 Se resuelve $E2'$ *y se obtiene el valor de y.*

Paso 2

Se sustituye el valor de y que se ha obtenido en el Paso 1.3 en el valor despejado de x del Paso 1.1.

EJEMPLO 2.127 Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 4 \\ x & - & y & = & 3 \end{array}\right\}$$

Paso 1:

1.1 En la primera ecuación se despeja x: $x = 4 - y$.

1.2 Se sustituye este valor en la segunda ecuación: $4 - y - y = 3$.

1.3 Se resuelve la ecuación en y:

$$\begin{array}{rcl} -2y & = & -1, \\ y & = & \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}. \end{array}$$

Paso 2
Se reemplaza el valor de y en el valor despejado de x: $x = 4 - y = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

EJEMPLO 2.128 Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 1 \\ x & - & 4y & = & 6 \end{array}\right\}$$

Aunque se ha aconsejado despejar una incógnita en la primera ecuación, no hay ninguna razón por la que no pueda hacerse esta operación en la segunda, especialmente si ello puede facilitar los cálculos. Como es evidente, si se invierte el orden de las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & 4y & = & 6 \\ 2x & + & 3y & = & 1 \end{array}\right\}$$

se tiene el mismo sistema. Así pues, es lo mismo despejar de la primera y sustituir en la segunda como despejar en la segunda y sustituir en la primera.

En este ejemplo resulta más simple despejar x en la ecuación $x - 4y = 6$; así, se tiene:

$$x = 4y + 6.$$

Al reemplazar este valor en la otra ecuación, resulta:

$$2(4y + 6) + 3y = 1,$$

esto es, $11y + 12 = 1$, o bien, $11y = -11$; por lo cual $y = -1$. Si se reemplaza este valor en la primera ecuación, resulta $2x - 3 = 1$, de donde $x = 2$. La solución es: $x = 2$, $y = -1$.

El método de sustitución permite resolver cualquier sistema de ecuaciones pero no es siempre el más simple. En la práctica, según cual sea el problema concreto son preferibles unos métodos a otros. La habilidad para resolver sistemas de ecuaciones, como tantas otras habilidades, se adquiere con la práctica de resolver ejercicios.

SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

El método de sustitución, que se ha empleado con los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, también permite resolver los de tres ecuaciones y tres incógnitas. Los pasos a seguir son:

1. Despejar una incógnita, por ejemplo x, en una de las ecuaciones.

2. Sustituir esa expresión en las restantes ecuaciones; se llegará a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, *que ya se sabe resolver.*

EJEMPLO 2.129 Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ & & 3y & + & z & = & 4 \end{array}\right\}$$

En la primera ecuación se despeja x; resulta:

$$x = 3 - y + z.$$

Ahora, se sustituye esta expresión en las dos ecuaciones restantes. En este sistema basta sustituir en la segunda ecuación, puesto que la tercera no tiene términos en x; resulta así, el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3 - y + z & + & 2y & - & z & = & 4 \\ & & 3y & + & z & = & 4 \end{array}\right\}$$

o bien, si se agrupan los términos, resulta el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} & & y & = & 1 \\ 3y & + & z & = & 4 \end{array}\right\}$$

En general, se resolverá por sustitución el sistema que resulte; en este caso de la primera ecuación se tiene $y = 1$; al sustituir este valor en la segunda, se tiene $z = 1$ y, si se reemplazan estos valores en la expresión:

$$x = 3 - y + z,$$

se tiene $x = 3$.

EJEMPLO 2.130 Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 3 \\ x & - & 4y & + & z & = & -1 \end{array}\right\}$$

Primero, se despeja x en la primera ecuación; es decir:

$$x = 1 - 2y + z;$$

luego, se reemplaza esta expresión en las restantes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2(1 - 2y + z) & + & 3y & - & 2z & = & 3 \\ 1 - 2y + z & - & 4y & + & z & = & -1 \end{array}\right\}$$

y, tras agrupar los términos, resulta:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} -y & & & = & 1 \\ -6y & + & 2z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Ahora, se resuelve este sistema para calcular y y z. De la primera ecuación, $y = -1$; al sustituir este valor en la segunda, resulta $z = -4$ y, si se reemplazan ambos valores en la ecuación $x = 1 - 2y + z$, se tiene $x = -1$.

Como se anticipó en el apartado anterior, el método de sustitución no siempre es el procedimiento más simple para resolver un sistema de ecuaciones. En ocasiones, interesa reemplazar algunas ecuaciones por otras más sencillas; esto puede hacerse siempre que la ecuación que se introduzca sea equivalente a la suprimida. La aplicación sistemática de estas simplificaciones se suele denominar **método de eliminación**, ya que trata de eliminar variables. Por ejemplo, para resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 12 \\ -x & + & y & + & z & = & 18 \\ x & + & 2y & - & z & = & 4 \end{array}\right\}$$

se pueden sumar las dos primeras ecuaciones; el sistema que resulte será equivalente al primero y tendrá una segunda ecuación sin término en x.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 12 \\ & & 2y & + & 2z & = & 30 \\ x & + & 2y & - & z & = & 4 \end{array}\right\}$$

A continuación, con la intención de eliminar el término en x de la tercera ecuación, se resta a la tercera ecuación la primera.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 12 \\ & & 2y & + & 2z & = & 30 \\ & & y & - & 2z & = & -8 \end{array}\right\}$$

El resultado de estos dos pasos ha sido eliminar la incógnita x de las dos últimas ecuaciones. Este proceso puede repetirse eliminando la segunda incógnita y de la tercera ecuación. Para ello, se multiplica por 2 la tercera ecuación; resulta así:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 12 \\ & & 2y & + & 2z & = & 30 \\ & & 2y & - & 4z & = & -16 \end{array}\right\}$$

y, luego, se resta a la tercera la segunda; se obtendrá:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 12 \\ & & 2y & + & 2z & = & 30 \\ & & & - & 6z & = & -46 \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación, se tiene $z = \frac{23}{3}$; al sustituir este valor en la segunda, resulta $y = \frac{22}{3}$ y, por último, al sustituir los dos valores anteriores en la primera se obtiene $x = -3$.

MÉTODO DE ELIMINACIÓN

2.72

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales, E1, E2 *y* E3, *con tres incógnitas, x, y, z se procede del modo siguiente:*

Paso 1

1.1 Se multiplica la ecuación E1 *por un número convenientemente elegido y se suma con la ecuación* E2 *eliminando de ésta la incógnita x; resulta una ecuación en y, z que llamamos* $E2'$.

1.2 Se multiplica la ecuación E1 *por un número convenientemente elegido y se suma con la ecuación* E3 *eliminando de ésta la incógnita x; resulta una ecuación en y, z que llamamos* $E3'$.

Las ecuaciones $E2'$ *y* $E3'$ *forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y y z.*

Paso 2

2.1 Se multiplica la ecuación $E2'$ *por un número convenientemente elegido y se suma con la ecuación* $E3'$ *eliminando de ésta la incógnita y; resulta una ecuación en z que llamamos* $E3''$.

2.2 Se resuelve la ecuación $E3''$, *encontrando el valor de la incógnita z.*

Paso 3

Se sustituye en la ecuación $E2'$ *el valor de z encontrado en el Paso 2; resulta una ecuación en y, que se resuelve para encontrar el valor de la incógnita y.*

Paso 4

Se sustituye en la ecuación E1 *el valor de z encontrado en el Paso 2 y el valor de y encontrado en el Paso 3; resulta una ecuación en x que se resuelve para encontrar el valor de la incógnita x.*

Evidentemente, en el procedimiento anterior el nombre de las ecuaciones y variables no es relevante, siendo indiferente cuál sea la ecuación E1, E2 o E3 y cuál sea la incógnita x, y, z, con tal de que, por supuesto, a lo largo del procedimiento no se cambie. Por otra parte, en la práctica es habitual emplear una combinación de los métodos de eliminación y sustitución. Por ejemplo, se elimina x de las dos últimas ecuaciones y se resuelven éstas por el método de sustitución.

EJEMPLO 2.131 Resolver por el método de eliminación el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & 2z & = & 6 \\ x & + & y & - & z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Paso 1

Para eliminar la x de la segunda ecuación se multiplica la primera ecuacion por -1 y se suma a la segunda ecuación, lo que equivale a restar la primera ecuación de la segunda.

$$\begin{array}{rl} -1 & [\ x - 3y + 2z = 6\ ] \\ + & [\ x + y - z = -1\ ] \\ \hline & \quad 4y - 3z = -7 \end{array}$$

Para eliminar $2x$ de la tercera ecuación se multiplica la primera ecuación por -2 y se suma con la tercera, lo que equivale a restar de la tercera dos veces la primera.

$$\begin{array}{rl} -2 & [\ x - 3y + 2z = 6\ ] \\ + & [\ 2x + 3y + z = 0\ ] \\ \hline & \quad 9y - 3z = -12 \end{array}$$

Las dos ecuaciones resultantes forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y, z.

$$\begin{array}{rcrcr} 4y & - & 3z & = & -7 \\ 9y & - & 3z & = & -12 \end{array}$$

Paso 2

Ahora hay que eliminar una de las incógnitas, y o z, en la segunda de las ecuaciones anteriores. Observamos que es más sencillo eliminar la z, ya que para ello basta multiplicar la primera por -1 y sumar con la segunda, o lo que es lo mismo, hay que restar la primera de la segunda.

$$\begin{array}{rl} -1 & [\ 4y - 3z = -7\ ] \\ + & [\ 9y - 3z = -12\ ] \\ \hline & \quad 5y \quad = -5 \end{array}$$

Se resuelve la anterior ecuación en y.

$$\begin{aligned} 5y &= -5 \\ y &= \frac{-5}{5} = -1 \end{aligned}$$

Paso 3

El valor $y = -1$ se sustituye en la primera de las ecuaciones en y y z obtenidas en el Paso 1 y se resuelve la ecuación resultante en z.

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-1) - 3z &= -7 \\ -3z &= -7 + 4 = -3 \\ z &= \frac{-3}{-3} = 1 \end{aligned}$$

Paso 4

El valor $y = -1$ y el valor $z = 1$ se sustituyen en la primera de las ecuaciones del sistema y se resuelve la ecuación resultante en x.

$$x - 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 6$$
$$x = 6 - 3 - 2 = 1$$

Concluimos que la solución del sistema de ecuaciones es

$$x = 1, \qquad y = -1, \qquad z = 1.$$

CUESTIONES DE AUTOEVALUACIÓN

2.1 ¿De las siguientes operaciones, cuál no permite operar cualquier par de números naturales para obtener un resultado natural?

a) La suma.

b) La resta.

c) La multiplicación.

2.2 ¿De las siguientes operaciones, cuál permite operar cualquier par de números naturales par obtener un resultado natural?

a) La división.

b) La multiplicación.

c) La resta.

2.3 ¿Cuánto vale la potencia de base 3 y exponente 4?

a) 64.

b) 81.

c) 12.

2.4 En el sistema de numeración decimal, el símbolo 372 significa

a) $3^7 + 7^2$.

b) $3^{100} + 7^{10} + 2$.

c) $3 \times 10^2 + 7 \times 10 + 2$.

2.5 En el sistema de numeración decimal, el símbolo 60008 significa

a) $6 \times 1000 + 8$.

b) $6 \times 10000 + 8$.

c) $6 \times 10^5 + 8$.

2.6 En el sistema de numeración decimal, el símbolo 20501 significa

a) $2 \times 10^4 + 5 \times 10^2 + 1$.

b) $2 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 1$.

c) $2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 1$.

2.7 ¿Existe un sistema de numeración en base 21?

a) No, porque 21 no es un número primo.

b) No, porque $21 = 2 \times 10 + 1$.

c) Sí, aunque precisa de 21 dígitos distintos.

2.8 En el sistema de numeración en base 6, $(504)_6$ significa

a) $5 \times 36 + 4$.

b) $5 \times 18 + 4$.

c) $504 \div 6$.

2.9 En el sistema de numeración en base 4, $(243)_4$ significa

a) $2 \times 4^2 + 4 \times 4 + 3$.

b) $2 \times 4^2 + 43$.

c) Nada.

2.10 En el sistema de numeración binario, $(1001)_2$ representa el número decimal

a) 9.

b) 11.

c) 7.

2.11 El numero binario $(10100)_2$ es el número decimal

a) 20.

b) 17.

c) 18.

2.12 El número ternario $(102)_3$ representa el número decimal

a) 9.

b) 11.

c) 8.

2.13 En base 3, $(1021)_3$ representa el número decimal

a) 34.

b) 29.

c) 26.

2.14 En base 16, $(190)_{16}$ es el número decimal

a) 612.

b) 476.

c) 400.

2.15 En el sistema hexadecimal, si A es el símbolo para la cifra 10, $A20$ es el número decimal

a) 2592.

b) 4016.

c) No tiene sentido.

2.16 En el sistema binario, el número decimal 311 se expresa

a) $(10100011)_2$.

b) $(100110111)_2$.

c) $(110001101)_2$.

2.17 En base 2, ¿con cuántos dígitos se escribe el número decimal 107?

a) 7.

b) 8.

c) 9.

2.18 El número de dígitos de la expresión binaria del número decimal 56 es

a) 5.

b) 6.

c) 8.

2.19 En base 3, el número decimal 108 tiene

a) 6 cifras.

b) 4 cifras.

c) 5 cifras.

2.20 La expresión en base 7 del número decimal 192

a) contiene la cifra 6.

b) contiene la cifra 4.

c) contiene la cifra 2.

2.21 La expresión en base 30 del número decimal 511 tiene

a) 2 cifras.

b) 3 cifras.

c) 4 cifras.

2.22 ¿Cuál es la expresión en base 7 del número hexadecimal $(18)_{16}$?

a) $(41)_7$.

b) $(36)_7$.

c) $(33)_7$.

2.23 Si a, b y c son números naturales y $c = a \times b$, es incorrecto decir que

a) a divide a c.

b) c es múltiplo de b.

c) a es múltiplo de c.

2.24 121 es un número

a) primo.

b) compuesto.

c) múltiplo de 7.

2.25 131 es un número

a) primo.

b) compuesto.

c) divisible por 7.

2.26 Un número es divisible por 2

a) si la suma de sus cifras es par.

b) si la última cifra es par.

c) si tiene alguna cifra par.

2.27 Un número es divisible por 3

a) si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

b) si la última cifra es múltiplo de 3.

c) si alguna de sus cifras es múltiplo de 3.

2.28 El número de factores primos de 154 es

a) 2.

b) 3.

c) 4.

2.29 Los factores primos de 105 suman

a) 15.

b) 18.

c) 21.

2.30 El número de factores primos diferentes de 117 es

a) 1.

b) 2.

c) 3.

2.31 La descomposición en factores primos de 2548

a) tiene 3 factores distintos.

b) tiene 3 factores iguales.

c) tiene, en total, 4 factores.

2.32 Si el producto de dos números es divisible por 6

a) alguno de ellos es divisible por 6.

b) ambos son divisibles por 6.

c) alguno de ellos es par.

2.33 Si $a \cdot b$ es divisible por 5

a) a es divisible por 5 o b es divisible por 5.

b) a y b son ambos divisibles por 5.

c) $a+b$ es divisible por 5.

2.34 El número de divisores comunes de 18 y 27 es

a) 3.

b) 2.

c) 1.

2.35 Los divisores de 28

a) son 3.

b) suman 56.

c) son todos pares, salvo el 1.

2.36 El máximo común divisor de 60 y 90

a) es primo.

b) tiene dos factores primos.

c) tiene tres factores primos.

2.37 El máximo común divisor de 156 y 204

a) es mayor que 15.

b) es menor que 10 .

c) es menor que 18.

2.38 El mínimo común múltiplo de 465 y 558

a) es mayor que 3000.

b) es menor que 3200.

c) tiene 6 factores primos.

2.39 Dos números naturales son primos entre sí cuando

a) no tienen factores primos comunes.

b) su m.c.d es mayor que 1.

c) alguno es primo.

2.40 El producto de dos números es 486 y su m.c.d es 9. Su m.c.m. será

a) 54.

b) 48.

c) 28.

2.41 El producto del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los números 18 y 62 es igual

a) al mínimo común múltiplo.

b) al doble del mínimo común múltiplo.

c) al triple del mínimo común múltiplo.

2.42 Si el producto de dos números enteros es positivo,

a) son ambos positivos.

b) son ambos negativos.

c) son ambos positivos o ambos negativos.

2.43 Si el producto de dos números enteros es negativo,

a) son ambos negativos.

b) son números opuestos.

c) alguno es positivo.

2.44 Si la diferencia de dos números enteros, $a-b$, es negativa,

a) no puede ser a positivo y b negativo.

b) no pueden ser ambos negativos.

c) no pueden ser ambos positivos.

2.45 El producto de los opuestos de dos números enteros es igual

a) al opuesto del producto de ambos.

b) al producto de sus valores absolutos.

c) al producto de ambos.

2.46 Si a es un número negativo, $-a^2$ es

a) positivo.

b) negativo.

c) positivo o negativo según sea el signo de a.

2.47 Si a y b son números enteros, a^2b-ab^2 es igual a

a) $ab(a-b)$.

b) $(a^2-b^2)(b-a)$.

c) $(a-b)(a+b)$.

2.48 Dos fracciones $\frac{x}{y}$ y $\frac{m}{n}$ son equivalentes si

a) $\frac{x \cdot m}{y \cdot n} = -1$.

b) $\frac{x \cdot n}{y \cdot m} = 1$.

c) $\frac{x \cdot m}{y \cdot n} = 1$.

2.49 La fracción $78/91$ es equivalente o igual a

a) $6/7$.

b) $4/7$.

c) $7/9$.

2.50 La fracción $17/9$ no es equivalente a

a) $119/63$.

b) $238/135$.

c) $323/171$.

2.51 La suma de las fracciones $5/14$ y $8/21$ vale

a) $20/28$.

b) $40/54$.

c) $31/42$.

2.52 La diferencia de las fracciones $8/35$ y $11/42$ vale

a) $-1/30$.

b) $-3/84$.

c) $-7/212$.

2.53 El producto $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)$ es igual a

a) $9/24$.

b) $13/36$.

c) 0.361.

2.54 El cociente $\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{8}\right)\div\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\right)$ es igual a

a) 1.367.

b) $43/24$.

c) $41/30$.

2.55 La expresión decimal de la fracción $11/81$

a) tiene un período compuesto por 9 cifras.

b) tiene un período compuesto por 10 cifras.

c) tiene un período compuesto por 12 cifras.

2.56 El número $2.051051051\ldots$ es la expresión decimal de una fracción con numerador

a) 321.

b) 683.

c) 911.

2.57 El número $3.5233233233\ldots$ es la expresión decimal de una fracción con denominador

a) 1645.

b) 2325.

c) 4995.

2.58 El precio de cierto producto subió un 4 % durante el verano y un 6 % más durante el otoño. La subida total en ambas estaciones ha sido del

a) 10 %.

b) 10.24 %.

c) 4.6 %.

2.59 Si un producto costaba 1350 euros hace seis años y ahora cuesta 899 euros, la variación en el precio ha sido del

a) $-50.16\,\%$.

b) $-33.4\,\%$.

c) $-45.1\,\%$.

2.60 Cierta cantidad de dinero se reparte en tres sobres. El primero contiene una proporción $16/49$, el segundo $21/62$ y el tercero el resto. ¿Cuál de los tres sobres contiene una cantidad intermedia entre los otros dos?

a) el primero.

b) el segundo.

c) el tercero.

2.61 ¿Cuál de los siguientes números es irracional?

a) $\sqrt{3}/\sqrt{48}$.

b) $\sqrt{49}/\sqrt{100}$.

c) $\sqrt{5}/\sqrt{40}$.

2.62 ¿Cuál de los siguientes números no es irracional?

a) $\sqrt{8/9}$.

b) $\sqrt{16/25}$.

c) $\sqrt{8/36}$.

2.63 Si x e y son números reales tales que $x<y$, la desigualdad $3x<5y$

a) es cierta.

b) es falsa.

c) depende de los valores de x e y.

2.64 Si x e y son números reales tales que $x<y$, la desigualdad $x-3/7<y-2/5$

a) es cierta.

b) es falsa.

c) depende de los valores de x e y.

2.65 Si x e y son números reales tales que $x < y$, la desigualdad $x - 7/4 < y - 9/5$

a) es cierta.

b) es falsa.

c) depende de los valores de x e y.

2.66 $2^5 \cdot 5^5$ es igual a

a) 7^5.

b) 10^5.

c) 10^{10}.

2.67 $(5^2)^4 \cdot (6^4)^2$ es igual a

a) 30^6.

b) 30^8.

c) 11^6.

2.68 $2^4 \cdot 4^3$ es igual a

a) 2^{10}.

b) 8^7.

c) 6^{12}.

2.69 $(8^{-2})^{-4}/(4^2)^{-2}$ es igual a

a) 2^4.

b) 2^{12}.

c) 2^{32}.

2.70 $3^{2/3} \cdot 9^{1/6}$ es igual a

a) 3.

b) $3^{1/2}$.

c) $3^{3/2}$.

2.71 $\sqrt{20} + \sqrt{80} - \sqrt{45}$ es igual a

a) $\sqrt{55}$.

b) $\sqrt{45}$.

c) $4\sqrt{5}$.

2.72 $24^{5/2} \cdot 6^{-3/2}$ es igual a

a) $4^5 \cdot \sqrt{3}$.

b) $4(6^{5/2} - 6^{3/2})$.

c) $2^6 \cdot 3$.

2.73 La solución de la ecuación $\dfrac{6x-2}{3} = \dfrac{4x+1}{8}$

a) es igual a 0.527.

b) es mayor que 0.52.

c) es menor que 0.51.

2.74 Si (x_0, y_0) es la solución del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 4x & - & y & = & 5 \\ -2x & + & 6y & = & 4 \end{array}\right\}$$

a) $x_0/y_0 < 1/2$.

b) $1/2 < x_0/y_0 < 1$.

c) $x_0/y_0 > 1$.

2.75 Si (x_0, y_0) es la solución del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ -3x & + & y & = & 6 \end{array}\right\}$$

a) $x_0 < 0$ e $y_0 > 0$.

b) $x_0 < 0$ e $y_0 < 0$.

c) $x_0 > 0$ e $y_0 < 0$.

2.76 Si (x_0, y_0) es la solución del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & 1 \\ -x & + & 2y & = & -3 \end{array}\right\}$$

entonces $x_0 + y_0$ vale

a) $-1/3$.

b) $-5/2$.

c) $-13/6$.

2.77 Una fracción vale 1/3 si se suma 5 al numerador y al denominador y da 4/5 si se resta 2 al numerador y al denominador. Entonces, la fracción vale

a) 2/3.

b) 3/4.

c) 3/5.

2.78 Si (x_0, y_0, z_0) es la solución del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & -3 \\ x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & 4 \end{array}\right\}$$

a) $x_0 < 0$ e $y_0 > 0$.

b) $x_0 < 0$ y $z_0 < 0$.

c) $y_0 < 0$ y $z_0 > 0$.

2.79 Si (x_0, y_0, z_0) es la solución del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & -1 \\ -2x & + & y & + & z & = & -3 \\ 3x & - & y & - & 2z & = & 2 \end{array}\right\}$$

a) $y_0 + z_0 = 0$.

b) $x_0 + z_0 = 0$.

c) $x_0 + y_0 = 0$.

2.80 Si (x_0, y_0, z_0) es la solución del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2/x & - & 1/y & & & = & 4/3 \\ & & 2/y & - & 1/z & = & -2/3 \\ -1/x & & & + & 1/z & = & 5/2 \end{array}\right\}$$

a) $x_0 y_0 = 2/5$.

b) $y_0 / z_0 = 2$.

c) $x_0 + z_0 = 3/4$.

SOLUCIONES DE LAS CUESTIONES DE AUTOEVALUACIÓN

2.1 *Respuesta correcta: b*

Restar un número natural a otro, para obtener como resultado un número natural, sólo es posible si el primero es menor que el segundo. Por ejemplo, $5-9$ no es un número natural.

2.2 *Respuesta correcta: b*

Sólo la suma y la multiplicación de dos números naturales da siempre un resultado natural. En cambio, la división $9 \div 4$ o la resta $3-7$ no dan como resultado un número natural.

2.3 *Respuesta correcta: b*

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$. En cambio $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ es la potencia de base 4 y exponente 3.

2.4 *Respuesta correcta: c*

Efectivamente $3 \times 100 + 7 \times 10 + 2 = 372$. En cambio, sólo 3^7 da 2187; mientras que $7^{10} = 282475249$.

2.5 *Respuesta correcta: b*

60008 representa el número natural *sesentamil ocho*; es decir $6 \times 10000 + 8$ o bien $6 \times 10^4 + 8$.

2.6 *Respuesta correcta: a*

Es el número natural *veintemil quinientos uno*, que vale $2 \times 10^4 + 5 \times 10^2 + 1$. En cambio, $2 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 1 = 205001$ y $2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 1 = 2501$.

2.7 *Respuesta correcta: c*

Cualquier número natural b permite utilizar un sistema de numeración en base b. Para $b = 21$ bastaría agrupar los elementos de un conjunto en grupos de 21 elementos; éstos a su vez en colecciones de 21 grupos (con $21^2 = 441$ elementos) y así sucesivamente. Sí es cierto que hay que elegir un símbolo o dígito para representar conjuntos con cualquier número de elementos entre 0 y 20; por ejemplo, A para *once*, B para *doce* , C para *trece*, etc.

2.8 *Respuesta correcta: a*

Las potencias de la base $b = 6$ son 1, 6, 36, 216,...; luego,
$(504)_6 = 5 \times 6^2 + 0 \times 6 + 4 = 5 \times 36 + 4$.

2.9 *Respuesta correcta: c*

En el sistema de numeración en base 4 sólo existen los dígitos 0, 1, 2 y 3.

2.10 *Respuesta correcta: a*

Es $(1001)_2 = 1 \times 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$.

2.11 *Respuesta correcta: a*

Es $(10100)_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 = 16 + 4 = 20$.

2.12 *Respuesta correcta: b*

Es $(102)_3 = 1 \times 3^2 + 2 = 9 + 2 = 11$.

2.13 *Respuesta correcta: a*

Es $(1021)_3 = 1 + 2 \times 3 + 1 \times 3^3 = 1 + 6 + 27 = 34$.

2.14 *Respuesta correcta: c*

Es $(190)_{16} = 1 \times 16^2 + 9 \times 16 = 256 + 144 = 400$.

2.15 *Respuesta correcta: a*

En base 16, $(A20)_{16} = 10 \times 16^2 + 2 \times 16 = 2560 + 32 = 2592$.

2.16 *Respuesta correcta: b*

$311 = 155 \times 2 + \mathbf{1}$; $155 = 77 \times 2 + \mathbf{1}$; $77 = 38 \times 2 + \mathbf{1}$; $38 = 19 \times 2 + \mathbf{0}$; $19 = 9 \times 2 + \mathbf{1}$; $9 = 4 \times 2 + \mathbf{1}$; $4 = 2 \times 2 + \mathbf{0}$; $2 = \mathbf{0} + \mathbf{1} \times 2$. Los dígitos en negrita, leídos al revés componen la expresión binaria. Como comprobación: $1 + 1 \times 2 + 1 \times 4 + 0 \times 8 + 1 \times 16 + 1 \times 32 + 0 \times 64 + 0 \times 128 + 1 \times 256 = 311$.
En cambio, $1 + 1 \times 2 + 1 \times 32 + 1 \times 128 = 163$. Y, $1 + 4 + 8 + 128 + 256 = 397$.

2.17 *Respuesta correcta: a*

$107 = 2 \times 53 + \mathbf{1}$; $53 = 2 \times 26 + \mathbf{1}$; $26 = 2 \times 13 + \mathbf{0}$; $13 = 2 \times 6 + \mathbf{1}$; $6 = 2 \times 3 + \mathbf{0}$; $3 = \mathbf{1} + 2 \times \mathbf{1}$. Así que $107 = (1101011)_2$ que tiene 7 dígitos.

2.18 *Respuesta correcta: b*

$56 = 2 \times 28 + \mathbf{0}$; $28 = 2 \times 14 + \mathbf{0}$; $14 = 2 \times 7 + \mathbf{0}$; $7 = 2 \times 3 + \mathbf{1}$; $3 = \mathbf{1} + 2 \times \mathbf{1}$. Luego $56 = (111000)_2$.

2.19 *Respuesta correcta: c*

$108 = 3 \times 36 + \mathbf{0}$; $36 = 3 \times 12 + \mathbf{0}$; $12 = 3 \times 4 + \mathbf{0}$; $4 = \mathbf{1} + 3 \times \mathbf{1}$. Es decir, $108 = (11000)_3$.

2.20 *Respuesta correcta: a*

$192 = 7 \times 27 + \mathbf{3}$; $27 = \mathbf{6} + 7 \times 3$. Por tanto $192 = (363)_7$.

2.21 *Respuesta correcta: a*

$511 = \mathbf{1} + 30 \times \mathbf{17}$. Luego $511 = ([17]\,1)_{30}$, siendo $[17]$ una cifra del sistema de numeración en base 30.

2.22 *Respuesta correcta: c*

$(18)_{16} = 16 \times 1 + 8 = 24$. Y $24 = \mathbf{3} + 7 \times \mathbf{3}$.

2.23 *Respuesta correcta: c*

Es correcto que a y b dividen a c; y, también, que c es múltiplo de a y de b.

2.24 *Respuesta correcta: b*

Como $121 = 11 \times 11$, no es un número primo, sino compuesto. Tampoco es divisible por 7, porque $121 = 7 \times 17 + 2$.

2.25 *Respuesta correcta: a*

131 no es divisible por 2 , ni por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 11. Por tanto es primo. No hay que probar divisores más grandes porque $13^2 = 169$; luego, si hubiese un divisor mayor o igual que 13, habría otro divisor menor que 13.

2.26 *Respuesta correcta: b*

La última cifra es par, significa que termina en 0, 2, 4, 6 u 8. En cambio, 121 no es divisible por 2, a pesar de que la suma de sus cifras es 4. Y 41 no es divisible por 2, aun cuando la primera cifra es par.

2.27 *Respuesta correcta: a*

La razón es que 1, 10, 100, 1000,... dan resto 1 al dividir por 3. Por tanto, si la expresión decimal es de la forma $\ldots dcba$, se tiene

$$\begin{aligned}&\cdots + 1000d + 100c + 10b + a = \\ &= (\cdots + 999d + 99c + 9b) + (\cdots + d + c + b + a)\end{aligned}$$

y el primer paréntesis es divisible por 3. Así que, el número es divisible por 3, si lo es el segundo paréntesis, que contiene la suma de las cifras.

2.28 *Respuesta correcta: b*

La descomposición en factores primos es $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$.

2.29 *Respuesta correcta: a*

La descomposición en factores primos es $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Y $3 + 5 + 7 = 15$.

2.30 *Respuesta correcta: b*

La descomposición en factores primos es $117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$. Entre ellos hay 2 distintos.

2.31 *Respuesta correcta: a*

La descomposición en factores primos es $2548 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 13$. Hay 5 factores, de los que 3 son distintos; pero no hay 3 iguales.

2.32 *Respuesta correcta: c*

$4 \cdot 9 = 36$ es divisible por 6; pero ni 4, ni 9 son divisibles por 6. Alguno tiene que ser par, para que el producto sea par.

2.33 *Respuesta correcta: a*

En caso de que a y b no fuesen divisibles por 5, sus descomposiciones en factores primos no contendrían el 5 y la del producto tampoco. Obsérvese que $3 \cdot 5 = 15$ es divisible por 5, pero 3 no lo es; ni $3 + 5 = 8$ tampoco.

2.34 *Respuesta correcta: a*

Como $18 = 2 \cdot 3^2$ y $27 = 3^3$, los divisores comunes son 1, 3 y 9.

2.35 *Respuesta correcta: b*

La descomposición en factores primos es $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$. Luego los divisores de 28 son 1, 2, 4, 7, 14 y 28. En total hay 6 divisores, que suman 56. Los números cuyos divisores (incluido el mismo) suman el doble del número se denominan *números perfectos*. Sólo se conocen 44 números perfectos; todos pares y se ignora si hay más o alguno impar.

2.36 *Respuesta correcta: c*

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Luego el máximo común divisor es $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

2.37 *Respuesta correcta: c*

$156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$ y $204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$; luego $\text{m.c.d.}(156, 204) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

2.38 *Respuesta correcta: b*

$465 = 3 \cdot 5 \cdot 31$ y $558 = 2 \cdot 3^2 \cdot 31$; luego $\text{m.c.m}(465, 558) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 31 = 2790$.

2.39 *Respuesta correcta: a*

Si no hay ningún factor primo común a ambos, el m.c.d. es 1. En cambio, 9 y 10 no son ninguno de ellos primos, pero son primos entre sí.

2.40 *Respuesta correcta: a*

El producto del m.c.m y el m.c.d ha de ser 486; luego el m.c.m es 54 (los números son 18 y 27).

2.41 *Respuesta correcta: b*

Como $18 = 2 \cdot 3^3$ y $62 = 2 \cdot 31$, es $\text{m.c.d}(18, 62) = 2$. Esto basta para concluir que el producto pedido es el doble del m.c.m. No obstante, obsérvese que $\text{m.c.m}(18, 62) = 2 \cdot 3^3 \cdot 31 = 558$ y $18 \cdot 62 = 1116$.

2.42 *Respuesta correcta: c*

El producto de dos números enteros es positivo tanto en el caso en que ambos son positivos ($4 \cdot 7 = 28$), como cuando ambos son negativos ($(-3) \cdot (-5) = 15$).

2.43 *Respuesta correcta: c*

Sólo puede concluirse que tienen distinto signo; luego uno es negativo y el otro positivo. Por ejemplo $3 \cdot (-5) = -15$. No puede concluirse que sean opuestos. Y no pueden ser ambos negativos, pues el producto sería positivo.

2.44 *Respuesta correcta: a*

Pueden ser ambos positivos; por ejemplo $3 - 5 = -2$. Pueden ser ambos negativos; como $(-7) - (-4) = -3$. Puede ser a negativo y b positivo: $(-8) - (2) = -10$. Lo único que no puede ocurrir es que a sea positivo y b negativo; por ejemplo $1 - (-2) = 3$.

2.45 *Respuesta correcta: c*

Por la regla de los signos, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$. Así, si $a = -3$ y $b = 5$, es $(-a) \cdot (-b) = 3 \cdot (-5) = -15$; $a \cdot b = (-3) \cdot 5 = -15$ y $|a| \cdot |b| = 3 \cdot 5 = 15$.

2.46 *Respuesta correcta: b*

Por la regla de los signos, tanto si a es positivo, como si es negativo, a^2 es positivo y $-a^2$ es negativo. No debe confundirse $-a^2 = -(a \cdot a)$ con $(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = a^2$.

2.47 *Respuesta correcta: a*

Basta aplicar la propiedad distributiva: $ab(a - b) = ab \cdot a - ab \cdot b = a^2b - ab^2$. En cambio $(a^2 - b^2)(b - a) = a^2b - ab^2 - a^3 - b^3$. Y $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

2.48 *Respuesta correcta: b*

Una fracción vale 1 si numerador y denominador son iguales; luego (b) significa $x \cdot n = y \cdot m$ que es la condición para que ambas fracciones sean equivalentes. En cambio, $x \cdot m = y \cdot n$ y $x \cdot m = -y \cdot n$ son condiciones diferentes.

2.49 *Respuesta correcta: a*

Basta observar que $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$ y $91 = 7 \cdot 13$.

2.50 *Respuesta correcta: b*

Si se multiplica el numerador y el denominador de $17/9$ por 7, resulta $119/63$; y, si se multiplica por 19, se obtiene $323/171$. En cambio, $238 = 2 \cdot 7 \cdot 17$ y $135 = 3^3 \cdot 5$, de modo que $238/135$ es una fracción irreducible.

2.51 *Respuesta correcta: c*

$5/14$ es equivalente a $15/42$ y $8/21$ a $16/42$. El resultado es, por consiguiente, $15/42 + 16/42 = 31/42$.

2.52 *Respuesta correcta: a*

El m.c.m de 35 y 42 es 210 y las fracciones son equivalentes a $48/210$ y $55/210$. Resulta entonces $48/210 - 55/210 = -7/210 = -1/30$.

2.53 *Respuesta correcta: b*

El primer factor vale $13/15$ y el segundo $5/12$. Multiplicados dan $13/36$, cuya expresión decimal es $0.36\overset{\frown}{1}$.

2.54 *Respuesta correcta: c*

La primera diferencia vale $41/24$ y la segunda $5/4$. Multiplicando la primera por la inversa de la segunda, resulta $41/24 \cdot 4/5 = 41/30$. Su expresión decimal es $1.3\widehat{6}$.

2.55 *Respuesta correcta: a*

Al hacer la división de 11 entre 81, aparecen como restos sucesivos: 29, 47, 65, 2, 38, 56, 74 y, nuevamente, 11. Hasta que el resto no coincida con alguno de los anteriores, no se vuelve a empezar con las mismas cifras de una segunda repetición del período. La expresión concreta es $0.135802469\,135802469\ldots$.

2.56 *Respuesta correcta: b*

Puesto que, si $x = 2.051051051$, es $1000x = 2051.051051\ldots$, resulta $999x = 2049$ o bien $x = 2049/999 = 683/333$.

2.57 *Respuesta correcta: c*

Puesto que, si $x = 3.5233233\ldots$, es $10000x = 35233.233233\ldots$ y $10x = 35.233233\ldots$, resulta $9990x = 35198$ o bien $x = 35198/9990 = 17599/4995$.

2.58 *Respuesta correcta: b*

El precio del producto se multiplicó por 1.04 en verano y por 1.06 en otoño. Después de ambas subidas, se ha multiplicado por $1.04 \cdot 1.06 = 1.1024$; o sea que ha subido el 10.24 %.

2.59 *Respuesta correcta: b*

La disminución ha sido de 451 euros, lo cual supone un $451/1350 \times 100 = 33.4\,\%$ de disminución (respecto al precio anterior).

2.60 *Respuesta correcta: c*

Como $16 \cdot 62 = 992$ es menor que $21 \cdot 49 = 1029$, el primer sobre contiene menos que el segundo. El tercero contiene una proporción $1 - \frac{16}{49} - \frac{21}{62} = \frac{1017}{3038}$, que es menor que el segundo puesto que $1017 \cdot 62 = 63054$ es menor que $3038 \cdot 21 = 63798$; pero es mayor que el primero porque $1017 \cdot 49 = 49833$ es mayor que $3038 \cdot 16 = 48608$. Más simplemente, las tres fracciones son $16/49 \simeq 0.32653$, $21/62 \simeq 0.33871$ y $1017/3038 \simeq 0.33476$; la tercera está entre las otras dos.

2.61 *Respuesta correcta: c*

$\sqrt{3}/\sqrt{48} = 1/\sqrt{16} = 1/4$ es racional. $\sqrt{49}/\sqrt{100} = 7/10$ también es racional. Pero $\sqrt{5}/\sqrt{40} = 1/\sqrt{8} = 1/(2\sqrt{2})$ es irracional por serlo $\sqrt{2}$.

2.62 *Respuesta correcta: b*

$\sqrt{8/9} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ es irracional porque lo es $\sqrt{2}$. Lo mismo ocurre con $\sqrt{8/36} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$. En cambio $\sqrt{16/25} = 4/5$.

2.63 *Respuesta correcta: c*

Con $x = 2$ e $y = 3$ es cierto que $3x = 6 < 5y = 15$. Pero con $x = -5$ e $y = -4$ es $3x = -15$ y $5y = -20$, así que no es cierto que $3x < 5y$.

2.64 *Respuesta correcta: a*

Como $2/5 < 3/7$, al menor valor x se le resta una cantidad mayor (3/7), mientras que al más grande y se le resta una cantidad menor (2/5).

2.65 *Respuesta correcta: c*

Como $7/4 < 9/5$, no se puede concluir que la desigualdad sea cierta. De hecho, para $x = 2$ e $y = 4$, es correcto que $2 - 7/4 = 1/4 < 4 - 9/5 = 11/5$. Pero, si $y = x + 1/40$, es $y - 9/5 = x + 1/40 - 9/5 = x - 71/40 < x - 7/4$, pues $7/4 < 71/40$.

2.66 *Respuesta correcta: b*

Es $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5$.

2.67 *Respuesta correcta: b*

Es $(5^2)^4 \cdot (6^4)^2 = 5^8 \cdot 6^8 = (5 \cdot 6)^8 = 30^8$.

2.68 *Respuesta correcta: a*

Como $4 = 2^2$, resulta $2^4 \cdot 4^3 = 2^4 \cdot 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10}$.

2.69 *Respuesta correcta: c*

$(8^{-2})^{-4} = 8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$ y $(4^2)^{-2} = 4^{-4} = 2^{-8}$. El cociente vale 2^{24+8}.

2.70 *Respuesta correcta: a*

Es $3^{2/3} \cdot (3^2)^{1/6} = 3^{2/3} \cdot 3^{1/3} = 3^1$.

2.71 *Respuesta correcta: b*

Como $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ y $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, queda $(2 + 4 - 3)\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

2.72 *Respuesta correcta: c*

Como $24^{5/2} = 4^{5/2} \cdot 6^{5/2} = 2^5 \cdot 6^{5/2}$, el resultado es $2^5 \cdot 6 = 2^6 \cdot 3$.

2.73 *Respuesta correcta: b*

Multiplicando ambos miembros por 3 y por 8 se obtiene $48x - 16 = 12x + 3$; es decir $36x = 19$ o bien $x = 19/36 = 0.52\widehat{7}$.

2.74 *Respuesta correcta: c*

La primera ecuación proporciona $y = 4x - 5$ que, sustituido en la segunda, da $-2x + 24x - 30 = 4$ o bien $22x = 34$. Por tanto $x_0 = 17/11$, $y_0 = 13/11$ y $x_0/y_0 = 17/13 > 1$.

2.75 *Respuesta correcta: a*

La segunda ecuación indica que $y = 3x + 6$; lo cual, sustituido en la primera, da $x + 6x + 12 = 5$ o bien $7x = -7$. Por consiguiente $x_0 = -1$ e $y_0 = 3$.

2.76 *Respuesta correcta: b*

Despejando x en la segunda ecuación se obtiene $x = 2y + 3$. Al reemplazarlo en la primera, resulta $8y + 12 - 2y = 1$ o bien $6y = -11$. Luego, $y = -11/6$ y $x = -2/3$. Con lo cual $x + y = -5/2$.

2.77 *Respuesta correcta: b*

Si x e y representan el numerador y el denominador respectivamente, por un lado $(x+5)/(y+5) = 1/3$ y, por otro lado, $(x-2)/(y-2) = 4/5$. Ello equivale a que se cumpla el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x + 10 & = & y \\ 5x & = & 4y + 2 \end{array}\right\}$$

Reemplazando en la segunda el valor de y queda $5x = 12x + 42$ o bien $7x = -42$; luego $x = -6$ e $y = -8$. La fracción es $\frac{-6}{-8}$ equivalente a $3/4$.

2.78 *Respuesta correcta: a*

Sumando a la segunda el doble de la primera, se obtiene $5x = -5$, es decir $x = -1$. Sustituido el valor de x en la primera y la tercera queda

$$\left.\begin{array}{rcrcr} -y & + & z & = & -1 \\ 2y & - & z & = & 6 \end{array}\right\}$$

Sumadas ambas ecuaciones resulta $y = 5$ y, por tanto $z = 4$.

2.79 *Respuesta correcta: c*

Sumando a la segunda ecuación la primera y restando a la tercera el doble de la primera, se obtiene el sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & -1 \\ x & + & 3y & & & = & -4 \\ -3x & - & 5y & & & = & 4 \end{array}\right\}$$

Ahora, la segunda multiplicada por 3 sumada a la tercera, da $4y = -8$, es decir $y = -2$. Entonces, $x = 2$ y, por fin, $z = 3$. También se pueden sumar la segunda y la tercera para obtener $-2x - 2y = 0$, lo cual equivale a $x + y = 0$.

2.80 *Respuesta correcta: a*

Llamemos $x' = 1/x$, $y' = 1/y$ y $z' = 1/z$, con lo cual el sistema de ecuaciones se reduce a

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x' & - & y' & & & = & 4/3 \\ & & 2y' & - & z' & = & -2/3 \\ -x' & & & + & z' & = & 5/2 \end{array}\right\}$$

Sumando a la segunda ecuación el doble de la primera, se obtiene $4x' - z' = 2$. Y sumada esta y la última $3x' = 9/2$; es decir $x' = 3/2$. Por tanto, $z' = 4$ e $y' = 5/3$. Las incógnitas originales valen entonces $x = 2/3$, $y = 3/5$ y $z = 1/4$.

TEMAS COMPLEMENTARIOS

2.6 EXPONENCIALES
2.7 LOGARITMOS
2.8 CÁLCULOS FINANCIEROS
2.9 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

2.6 EXPONENCIALES

En el apartado 2.4.4 se ha definido a^r para cualquier base $a > 0$ y cualquier exponente racional r. No hay nada que impida seguir adelante y considerar potencias de exponente irracional. Por ejemplo, para dar sentido a $\pi^{\sqrt{2}}$, basta considerar la sucesión de aproximaciones racionales:

$$
\begin{array}{lcr}
3.14^{1.41} \simeq 5.0 & < \pi^{\sqrt{2}} < & 5.1 \simeq 3.15^{1.42} \\
3.141^{1.414} \simeq 5.04 & < \pi^{\sqrt{2}} < & 5.05 \simeq 3.142^{1.415} \\
3.1415^{1.4142} \simeq 5.047 & < \pi^{\sqrt{2}} < & 5.048 \simeq 3.1416^{1.4143} \\
3.14159^{1.41421} \simeq 5.0474 & < \pi^{\sqrt{2}} < & 5.0475 \simeq 3.1416^{1.41422} \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Las potencias que aparecen en los extremos de cada fila no dan resultados racionales, pero se truncan en la primera cifra decimal que no coincida en ambas, para obtener aproximaciones racionales. Aunque lentamente, el esquema se cierra hacia un valor que define $\pi^{\sqrt{2}}$. El mismo procedimiento se puede usar en cualquier otro caso, lo cual conduce a la siguiente definición:

EXPONENCIAL

2.73

El símbolo a^x, donde $a > 0$ es un número real positivo y x es un número real cualquiera, se denomina a **elevado** *a x,* **potencia de base** *a* **y exponente** *x o* **exponencial de** *x* **con base** *a.*

Obviamente, siempre es $a^x > 0$ y, de forma natural, se cumplen las conocidas propiedades de las potencias:

PROPIEDADES DE LAS EXPONENCIALES

2.74

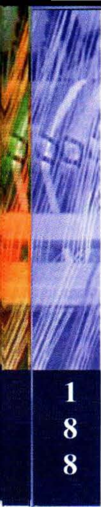
Cualquiera que sea el número real $a > 0$ y los números reales x, y se cumple:

1) $a^x a^y = a^{x+y}$.

2) $a^x b^x = (a \cdot b)^x$.

3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

La denominación de exponencial de x para a^x obedece a que su uso más frecuente consiste en mantener una base fija mientras que los exponentes varían; lo destacable es entonces el exponente. En particular, suele usarse la base 10, de manera que muchas calculadoras cuentan con una tecla rotulada con 10^x, y, por razones que no hacen al caso, la **exponencial natural** cuya base es un número irracional, que se representa por e y cuyo valor



aproximado es $e = 2.71828184\ldots$. Así que, casi siempre hay también una tecla e^x en toda calculadora en que figure 10^x.

EJEMPLO 2.132 Una de las aplicaciones más interesantes del concepto de exponencial es el análisis del crecimiento a lo largo del tiempo. Imaginemos una población biológica, por ejemplo, de seres humanos. Es natural pensar que el tamaño de la población se multiplica cada año por un cierto factor a, que se mantiene más o menos constante a lo largo de un determinado período de tiempo. Supongamos, por ejemplo, que dicho factor es 1.05. Entonces, al cabo de 2 años el tamaño se ha multiplicado por $a^2 = 1.05^2 = 1.1025$, al cabo de 3 años por $a^3 = 1.05^3 = 1.157625$ y, en general, al cabo de un tiempo t por a^t. A medio plazo, el crecimiento aproximado de la población viene reflejado en la tabla siguiente:

t	10	30	50	100	150	200	250
1.05^t	1.628	4.32	11.467	131.5	1507.9	17292.6	198301

Así que, si se crece a un ritmo del 5 % anual, en sólo 150 años la población actual se multiplicará por 1507 y en 200 años por 17292. Esto es lo que se llama un *crecimiento exponencial* y resulta evidente que es insostenible a medio plazo.

Para hacerse cargo del crecimiento de 2^x, nada mejor que la célebre historia según la cual el inventor del ajedrez pidió al rey como pago de su invento 1 grano de trigo por el primer cuadro, 2 por el segundo, 4 por el tercero, 8 por el cuarto,... hasta cubrir los 64 cuadros del tablero. Al rey, inexperto en matemáticas, le pareció justo; pero cuando fue a pagar, su contable descubrió que la cosecha del reino durante numerosos años no permitiría cubrir la deuda. El número de granos necesarios es

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

y, aunque cada grano pesase sólo 0.1 gramos, harían falta del orden de tres billones de toneladas para cubrir el precio. Con un poco más de experiencia en matemáticas, el rey debería haber pensado que sólo por el último cuadro iba a tener que pagar

$$2^{63} = \left(2^{10}\right)^{6.3} = 1024^{6.3} > \left(10^3\right)^6 = 10^{18}$$

es decir, bastante más que un número de 19 cifras.

Evidentemente, en la rapidez del crecimiento influye algo la base que se considere; pero, sin duda, el crecimiento se vuelve desmesurado en cuestión de más o menos tiempo. En estudios demográficos de este tipo, es habitual medir el tiempo en aquellos lapsos que tarda la población en duplicarse, de manera que el crecimiento siga una exponencial de base 2. Así, en el caso de la población anterior con factor de crecimiento igual a 1.05, dado que $1.05^{14.2} \simeq 2$, resulta que

$$1.05^t = 1.05^{\frac{14.2 \cdot t}{14.2}} = \left(1.05^{14.2}\right)^{\frac{t}{14.2}} \simeq 2^{\frac{t}{14.2}} = 2^x$$

donde t es el tiempo medido en años y x el tiempo medido en lapsos de 14.2 años. Si la tasa de crecimiento fuese 1.03 en lugar de 1.05, como $1.03^{23.45} \simeq 2$, la unidad de tiempo se alarga de 14.2 a 23.45, pero sigue siendo $1.03^t = 2^y$ si y es el tiempo medido en lapsos de 23.45 años.

Esto muestra que todas las exponenciales de base mayor que 1 son reducibles a una exponencial de base 2, mediante un cambio oportuno de la unidad de medida del exponente. La siguente tabla muestra la evolución de la exponencial 2^x, para algunos valores de x:

x	5	10	15	20	25
2^x	32	1024	32768	1048576	33554432

De forma que, por ejemplo, en 15 periodos, de longitud más o menos larga según la tasa de crecimiento, el tamaño de la población se multiplica por 32768.

2.7 LOGARITMOS

En la Sección 2.6 ha sido necesario determinar aproximadamente un número x tal que $1.05^x = 2$ ó $1.03^x = 2$. Planteado en general, el problema consiste en determinar, a partir de una base $a > 0$ y de un resultado $y > 0$, el número real x tal que $a^x = y$.

LOGARITMO

Dados los números reales $a > 0$ e $y > 0$, el número real x tal que $a^x = y$ se denomina **logaritmo de base a de y** *y se representa por $\log_a y$.* 2.75

El logaritmo de base a es pues la operación inversa de la exponenciación de base a y nuevamente, en cálculos prácticos, se usan casi exclusivamente los logaritmos de base 10 y de base e, para los que existen sendas teclas en las calculadoras, rotuladas con log y ln respectivamente. Consecuencia inmediata de la definición de logaritmo son las siguientes identidades:

Cualquiera que sean los números reales a, x con $a > 0$ se cumple: 2.76

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{y} \quad \log_a a^x = x.$$

EJEMPLO 2.133 Por definición, $\log_{10} y$ es el número al que hay que elevar 10 para obtener y. Así, por ejemplo, serán

$$\log_{10} 1000 = 3, \qquad \log_{10} 100000000 = 8, \qquad \log_{10} 10^{15} = 15.$$

Como se ve en el ejemplo anterior $\log_{10} x$ crece muy lentamente al crecer x; más precisamente si x tiene n cifras en su expresión decimal, $\log_{10} x$ tiene como parte entera $n-1$. Por ejemplo, utilizando una calculadora podemos comprobar que:

$$\begin{array}{lll} \log_{10} 213 = 2.3283796\ldots & & \log_{10} 2130 = 3.3283796\ldots \\ \log_{10} 500 = 2.69897\ldots & & \log_{10} 5000 = 3.69897\ldots \\ \log_{10} 999 = 2.9995655\ldots & & \log_{10} 9990 = 3.9995655\ldots \end{array}$$

Si consideramos números próximos a 0, obtenemos

$$\log_{10} 0.1 = -1, \qquad \log_{10} 0.001 = -3, \qquad \log_{10} 10^{-7} = -7.$$

El decrecimiento de $\log_{10} x$ al acercarse x a cero es, por tanto, muy rápido; concretamente, si x tiene n ceros después del punto decimal y antes de la primera cifra significativa, $\log_{10} x$ tiene como parte entera $-n$. Así

$$
\begin{array}{llll}
\log_{10} 0.0213 = -1.6716203\ldots & & \log_{10} 0.00213 = -2.6716203\ldots \\
\log_{10} 0.05 = -1.30102\ldots & & \log_{10} 0.005 = -2.30102\ldots \\
\log_{10} 0.0999 = -1.0004344\ldots & & \log_{10} 0.00999 = -2.0004344\ldots
\end{array}
$$

Las cifras decimales que proporciona la calculadora para los números considerados muestran una curiosa coincidencia: las de 0.0213 son las mismas que las de 0.00213 y suman 9 con las de 213 ó 2130. No es por casualidad; la razón está en las propiedades generales de los logaritmos que se exponen a continuación.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

2.77 *Para cualquier base $a > 0$ y siempre que x e y sean números reales positivos, se cumple:*

1) $\log_a a = 1$.

2) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

3) $\log_a x^y = y \log_a x$.

4) $\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$.

Vamos a comprobar que, en efecto, se cumplen las propiedades anteriores.

Hasta hace no muchos años, todo ingeniero, navegante, técnico, etc. disponía de una tabla, en forma de grueso volumen, que le suministraba logaritmos decimales, y leída al contrario la exponencial 10^x. Como ya se ha indicado, hoy en día casi cualquier calculadora hace el mismo papel mediante las teclas log y 10^x.

1) La igualdad $\log_a a = 1$ es una consecuencia inmediata de la definición de logaritmo, ya que $a^1 = a$.

2)
$$
\begin{aligned}
\log_a(x \cdot y) &= \log_a \left(a^{\log_a x}\ a^{\log_a y}\right) && \text{por la definición de logaritmo,} \\
&= \log_a a^{(\log_a x + \log_a y)} && \text{por las propiedades de las potencias,} \\
&= \log_a x + \log_a y && \text{por la definición de logaritmo.}
\end{aligned}
$$

3)
$$
\begin{aligned}
\log_a x^y &= \log_a \left(a^{\log_a x}\right)^y && \text{por la definición de logaritmo,} \\
&= \log_a a^{y \log_a x} && \text{por las propiedades de las potencias,} \\
&= y \log_a x && \text{por la definición de logaritmo.}
\end{aligned}
$$

4)
$$
\begin{aligned}
\log_a \tfrac{1}{x} &= \log_a x^{-1} && \text{por definición de potencia,} \\
&= -1 \cdot \log_a x && \text{por la propiedad 3),} \\
&= -\log_a x
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 2.134 Al aplicar las propiedades anteriores encontramos la razón de las

coincidencias entre las cifras decimales del ejemplo anterior.

$$\begin{aligned}\log_{10} 213 &= \log_{10}(100 \cdot 2.13) \\ &= \log_{10} 100 + \log_{10} 2.13 \\ &= 2 + \log_{10} 2.13.\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\log_{10} 2130 &= \log_{10}(1000 \cdot 2.13) \\ &= \log_{10} 1000 + \log_{10} 2.13 \\ &= 3 + \log_{10} 2.13.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10} 0.0213 &= \log_{10}\left(10^{-2} \cdot 2.13\right) \\ &= \log_{10} 10^{-2} + \log_{10} 2.13 \\ &= -2 + \log_{10} 2.13.\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\log_{10} 0.00213 &= \log_{10}\left(10^{-3} \cdot 2.13\right) \\ &= \log_{10} 10^{-3} + \log_{10} 2.13 \\ &= -3 + \log_{10} 2.13.\end{aligned}$$

Las propiedades anteriores indican que al tomar logaritmos, los productos quedan transformados en sumas y las potencias en productos. Las ventajas para el cálculo son evidentes, siempre que se disponga de un sistema para conocer el logaritmo de cada número —por ejemplo, en base 10— y de un procedimiento para invertir el cálculo —es decir, para calcular 10^x.

EJEMPLO 2.135 Veamos cómo pueden realizarse cálculos complejos recurriendo a los logaritmos y exponenciales. Supongamos que se desea calcular

$$\frac{5^{12} \cdot 7^{\frac{3}{4}}}{2^{26} \cdot 11^{\frac{5}{3}}}.$$

Podemos tomar el logaritmo de base 10 y aplicar las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{5^{12} \cdot 7^{\frac{3}{4}}}{2^{26} \cdot 11^{\frac{5}{3}}}\right) &= 12\log_{10} 5 + \frac{3}{4}\log_{10} 7 - 26\log_{10} 2 - \frac{5}{3}\log_{10} 11 \\ &\simeq 12 \cdot 0.69897 + \frac{3}{4} \cdot 0.845098 - 26 \cdot 0.30103 - \frac{5}{3} \cdot 1.0413927 \\ &\simeq -0.5409707;\end{aligned}$$

luego el valor buscado es

$$\frac{5^{12} \cdot 7^{\frac{3}{4}}}{2^{26} \cdot 11^{\frac{5}{3}}} \simeq 10^{-0.5409707} \simeq 0.2877592.$$

EJEMPLO 2.136 Nótese que no hay manera operativa de expresar el logaritmo de una suma o una diferencia. Así, si se trata de calcular $67^{\frac{1}{9}} + 31^{\frac{3}{5}}$, no hay más remedio que calcular cada sumando y efectuar después la suma:

$$\begin{aligned}67^{\frac{1}{9}} &= 10^{\frac{1}{9}\log_{10} 67} \simeq 10^{0.2028972} \simeq 1.5955014, \\ 31^{\frac{3}{5}} &= 10^{\frac{3}{5}\log_{10} 31} \simeq 10^{0.894817} \simeq 7.8490486;\end{aligned}$$

luego $67^{\frac{1}{9}} + 31^{\frac{3}{5}} \simeq 1.5955014 + 7.8490486 \simeq 9.44455$.

Hay una relación sencilla entre los logaritmos en distintas bases.

RELACIÓN ENTRE LOGARITMOS DE BASES DISTINTAS

2.78 *Si a, b son dos números reales positivos y x es un número real se cumple:*

1) $\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \ \log_b a.$

2) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}.$

El resultado 1) es una consecuencia de la definición de logaritmo, puesto que como $x = a^{\log_a x}$, si se toman logaritmos en cualquier otra base b, se obtiene la primera igualdad, mientras que la segunda igualdad se deduce de la propiedad 3) de los logaritmos. Por su parte el resultado 2) es una consecuencia inmediata del anterior. Las igualdades anteriores permiten calcular logaritmos en una base arbitraria a a partir de los calculados en una base determinada; $b = 10$, por ejemplo. Esto explica por qué las calculadoras no necesitan diversas teclas para los distintos $\log_a x$; sencillamente porque los resultados que suministrarían serían $\log_{10} x / \log_{10} a$.

EJEMPLO 2.137 Veamos cómo calcular logaritmos en una base cualquiera a partir de los logaritmos decimales:

a) $\log_{12} 27 = \dfrac{\log_{10} 27}{\log_{10} 12} \simeq \dfrac{1.431363}{1.079181} \simeq 1.326342.$

b) $\log_2 1000 = \dfrac{\log_{10} 1000}{\log_{10} 2} \simeq \dfrac{3}{0.30103} \simeq 9.965784.$

RELACIÓN ENTRE EXPONENCIALES DE BASES DISTINTAS

Los logaritmos permiten también expresar la relación que liga las diversas exponenciales entre sí.

2.79 *Si a y b son dos números reales positivos, se cumple*

$$a^x = b^{x \log_b a}$$

Este resultado se obtiene sin más que calcular el logaritmo de base b de ambos miembros.

EJEMPLO 2.138

a) $1.05^t = 2^{t \log_2 1.05} \simeq 2^{\frac{t}{14.2}}$ puesto que $\log_2 1.05 \simeq \frac{1}{14.2}$.

b) $2^x = 10^{x \log_{10} 2} \simeq 10^{0.030103x}$ puesto que $\log_{10} 2 \simeq 0.30103$.

c) $10^x = e^{x \log_e 10} \simeq e^{2.302585x}$ puesto que $\log_e 10 \simeq 2.302585$.

2.8 CÁLCULOS FINANCIEROS

Como aplicación de algunos de los conceptos estudiados en este capítulo, se presenta ahora una cuestión con la que, en la sociedad actual, casi todo el mundo tiene que enfrentarse en algún momento: los cálculos financieros.

2.8.1 INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

Supongamos que una persona dispone de una cierta cantidad, C, de dinero que no necesita gastar. Es normal que trate de invertirla en algún tipo de negocio que evite que su ahorro se deprecie. La inversión más sencilla es depositarlo en un banco para obtener unos rendimientos, que dependerán del capital depositado y del interés, i, que el banco aplique. Como las ofertas de los bancos son diversas y pueden necesitar una complicada interpretación, pensemos en un banco ideal. En él, el interés se especificará en *tanto por ciento por unidad de tiempo*, es decir, expresará la cantidad de euros que se obtienen por cada 100 euros que permanezcan depositados durante una unidad de tiempo. Lo más frecuente, es tomar como unidad de tiempo el año. Por ejemplo, si se depositan 1500 euros en este banco al 4 % anual, al cabo de un año, se obtendrá de beneficio $1500 \cdot \frac{4}{100} = 60$ euros. Si se mantiene el depósito durante tres años, y se retira el rédito en cada uno de ellos, el beneficio total es $60 \cdot 3 = 180$ euros.

Con esta forma de actuar, los beneficios no pasan a producir nuevos intereses. Incluso aunque los intereses se dejen depositados en el banco, podría estipularse que no van a producir nuevos intereses en lo sucesivo; se dice entonces que la imposición está a **interés simple**.

INTERÉS SIMPLE

2.80 *Si C es la cantidad depositada, i el tanto por ciento por unidad de tiempo y t el tiempo transcurrido, el beneficio obtenido con interés simple es*

$$\textit{Intereses} = C \cdot \frac{i}{100} \cdot t.$$

En términos del **tanto por uno por unidad de tiempo** $r = \frac{i}{100}$,

$$\textit{Intereses} = C \cdot r \cdot t.$$

EJEMPLO 2.139 Si se depositan 7000 euros durante 3 años en una cuenta al 8 %, los

intereses producidos serán

$$\text{Intereses} = 7000 \cdot 0.08 \cdot 3 = 1680 \text{ euros}$$

Lo normal es que los intereses que se producen en una unidad de tiempo, si se mantienen en depósito, pasen a engrosar el capital disponible y en lo sucesivo también produzcan intereses; en este caso se dice que la imposición es a **interés compuesto**. En tal caso, al cabo de una unidad de tiempo, el capital original se habrá incrementado en Cr y se pasa a tener, por tanto, un total de

$$C + Cr = C(1+r).$$

Una unidad de tiempo después, el capital $C(1+r)$ pasará a ser

$$C(1+r)(1+r) = C(1+r)^2$$

y, razonando de modo similar, se llega a la expresión del rendimiento durante t unidades de tiempo cuando el interés es compuesto:

INTERÉS COMPUESTO

2.81 *Si se acumulan los intereses de un capital C, durante t unidades de tiempo, al r por uno por unidad de tiempo, el capital final de que se dispone será:*

$$C(1+r)^t.$$

Los intereses generados a interés compuesto son

$$C(1+r)^t - C = C\left[(1+r)^t - 1\right].$$

EJEMPLO 2.140 Una persona deposita en el banco 5000 euros el 31 de Diciembre de 2001 y acuerda con el banco un interés del 6 % anual. Si no se retiran los intereses producidos y anualmente se incorporan al depósito, para calcular a cuánto ascenderá el capital a fecha 1 de Enero de 2016, hay que utilizar la fórmula del interés compuesto. Como han transcurrido exactamente 14 años, la fórmula proporciona un capital final igual a

$$5000\,(1+0.06)^{14} = 11304.52 \text{ euros}$$

con lo cual los intereses han sido $11304.52 - 5000 = 6304.52$ euros. Si los rendimientos no se ingresan en cuenta, el interés sería simple:

$$\text{Intereses} = 5000 \cdot 0.06 \cdot 14 = 4200 \text{ euros}.$$

Aunque se ha razonado considerando un número entero de unidades de tiempo, en nuestro banco ideal los resultados son también válidos si el

Período	Períodos por año	Tanto por uno equivalente
Semestre	2	$r_s = (1+r)^{\frac{1}{2}} - 1$
Cuatrimestre	3	$r_c = (1+r)^{\frac{1}{3}} - 1$
Trimestre	4	$r_t = (1+r)^{\frac{1}{4}} - 1$
Bimestre	6	$r_b = (1+r)^{\frac{1}{6}} - 1$
Mes	12	$r_m = (1+r)^{\frac{1}{12}} - 1$
Día	365	$r_d = (1+r)^{\frac{1}{365}} - 1$

Tabla 2.10: Tanto por uno de las fracciones del año equivalente a un tanto por uno anual r.

tiempo t que se mantiene el capital, no es entero. Por ejemplo, si el tanto por uno anual es r, entonces el tanto por uno semestral r_s equivalente a dicho tanto por uno anual r tiene que cumplir:

$$(1+r_s)^2 = (1+r)$$

es decir, una inversión al r_s compuesto semestralmente durante los 2 semestres del año tiene que ser igual a la inversión al r anual. La relación que hay entre r_s y r se encuentra fácilmente si calculamos la raíz cuadrada de los dos miembros de la igualdad:

$$(1+r_s) = (1+r)^{\frac{1}{2}}$$

y por tanto

$$r_s = (1+r)^{\frac{1}{2}} - 1$$

Un razonamiento análogo permite calcular el tanto por uno equivalente a cualquier otra fracción de la unidad de tiempo. La Tabla 2.10 muestra los tanto por uno equivalentes a un tanto por uno anual r, para las fracciones del año más usuales.

EJEMPLO 2.141 Supongamos que el banco ideal oferta un depósito al 10 % anual. El tanto por uno anual será entonces $r = 0.1$. Por consiguiente, el tanto por uno diario es

$$r_d = (1+0.1)^{\frac{1}{365}} - 1 = 0.000261$$

lo cual supone un 0.0261 % de interés diario. Análogamente en un semestre

$$r_s = (1+0.1)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.0488$$

es decir, un 4.88 % de interés semestral, y no un 5 % como se podía pensar a primera vista. El mismo resultado se obtiene si se aplica el tanto por uno diario durante los 182.5 días de un semestre:

$$(1+0.000261)^{182.5}-1=0.0488$$

EJEMPLO 2.142 Una empresa, que tiene que hacer un pago de 8000 euros dentro de 15 días, ingresa el dinero durante ese tiempo en una cuenta del banco ideal al 9 % anual. Queremos calcular el saldo de la cuenta después de realizar el pago. Para ello, calculamos en primer lugar el tanto por uno anual, que será $r=0.09$. Entonces el tanto por uno diario será $r_d=(1+0.09)^{\frac{1}{365}}-1=0.0002361$. Como los 8000 euros pasan en la cuenta 15 días se convierten en:

$$8000(1+r_d)^{15}=8000\cdot 1.0002361^{15}=8028.38 \text{ euros.}$$

Pero también

$$\begin{aligned} 8000(1+r_d)^{15} &= 8000\left[(1+0.09)^{\frac{1}{365}}\right]^{15} \\ &= 8000\,(1+0.09)^{\frac{15}{365}} \\ &= 8028.38 \text{ euros} \end{aligned}$$

de modo que igual da aplicar el interés diario durante 15 días que el interés anual durante 15/365 años. En cualquier caso los intereses serán 28.38 euros.

Debido a múltiples factores como tramos sin remunerar, comisiones, etc., el interés anual que anuncia un banco no coincidirá casi nunca con el concepto ideal de interés anual. Además, la teoría desarrollada se ve perturbada en la práctica por el efecto de las fechas con que el banco da valor a sus intereses, ya que estos no comenzarán a producir sus propios beneficios hasta que no se anoten en cuenta. Evidentemente, no es exactamente lo mismo que los intereses de un día empiecen a generar intereses al día siguiente, a que tarden dos meses en comenzar a hacerlo. A este respecto, el comportamiento más frecuente de los bancos es considerar como interés anual, en el sentido en que se ha utilizado hasta ahora, el denominado **T.A.E. (Tasa Anual Equivalente)**. Para su cálculo, se parte del *interés nominal anual* i, que es el que generalmente anuncia el banco, y del *periodo de liquidación* de intereses que utiliza el banco. Con estos datos se calcula el tanto por uno en el periodo de liquidación, r, dividiendo i por 100 y por el número n de periodos de liquidación de un año.

2.82

Si i es el interés nominal anual y si al año hay n períodos de liquidación, se llama* T.A.E. (Tasa Anual Equivalente) *a:

$$T.A.E. = 100 \cdot [(1+r)^n - 1]$$

siendo $r = \dfrac{i}{100 \cdot n}$ *el* **tanto por uno del período de liquidación.**

EJEMPLO 2.143 Si $i = 15\,\%$ y el periodo de liquidación es el trimestre, se tendrá

$$r = \frac{15}{100 \cdot 4} = 0.0375$$

Entonces

$$\text{T.A.E.} = 100\left[\left(1 + \frac{15}{100 \cdot 4}\right)^4 - 1\right] = 15.865$$

Con el mismo interés nominal, $i = 15\,\%$, si el período de liquidación fuese el mes se tendría

$$r = \frac{15}{100 \cdot 12} = 0.0125$$

y, por tanto,

$$\text{T.A.E} = 100\left[\left(1 + \frac{15}{100 \cdot 12}\right)^{12} - 1\right] = 16.075$$

2.8.2 CAPITALIZACIÓN

Es frecuente que una persona se proponga un plan de ahorro de forma que, en cada unidad de tiempo, ingrese en el banco una cantidad fija, a, a un interés compuesto del $i\,\%$, o del r por uno, por unidad de tiempo, para ir acumulando un cierto capital. Si piensa llevar a cabo este plan durante t unidades de tiempo, estará interesado en conocer el capital acumulado que obtendrá al final. Ahora bien, su primera entrega, ahorrada durante la primera unidad de tiempo, permanecerá en la cuenta $t-1$ etapas y producirá intereses durante todas esas etapas, es decir, en la segunda etapa se convertirá en $a(1+r)$, en la tercera en $a(1+r)^2$, $\cdots$, en la etapa $(t-2)$ en $a(1+r)^{t-3}$, en la etapa $(t-1)$ en $a(1+r)^{t-2}$ y en la etapa t en $a(1+r)^{t-1}$. La segunda entrega producirá intereses durante las $(t-2)$ etapas que permanece en la cuenta y, de modo análogo, se comportarán el resto de las aportaciones. La rentabilidad de cada entrega a lo largo de las etapas y el capital acumulado al final de las t unidades de tiempo viene reflejado en la Tabla 2.11.

	Capital en la etapa					
Etapa	1	2	$\cdots$	$t-2$	$t-1$	t
1	a	$a(1+r)$	$\cdots$	$a(1+r)^{t-3}$	$a(1+r)^{t-2}$	$a(1+r)^{t-1}$
2		a	$\cdots$	$a(1+r)^{t-4}$	$a(1+r)^{t-3}$	$a(1+r)^{t-2}$
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$t-2$				a	$a(1+r)$	$a(1+r)^2$
$t-1$					a	$a(1+r)$
t						a
					Total	S

Tabla 2.11: Rentabilidad de las entregas de un plan de capitalización.

El total de estas t cantidades es:

$$\begin{aligned} S &= a + a(1+r) + a(1+r)^2 + \cdots + a(1+r)^{t-1} \\ &= a\left[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^{t-1}\right] \end{aligned}$$

Si se multiplican los dos miembros de la igualdad por $(1+r)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} S(1+r) &= a\left[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^{t-1}\right](1+r) \\ &= a\left[(1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 + \cdots + (1+r)^t\right] \end{aligned}$$

Restamos ahora, miembro a miembro, de esta igualdad la anterior:

$$\begin{array}{rcl} S(1+r) &=& a\left[(1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 + \cdots + (1+r)^t\right] \\ -S &=& -a\left[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^{t-1}\right] \\ \hline Sr &=& a\left[(1+r)^t - 1\right] \end{array}$$

A partir de esta última igualdad se obtiene la expresión para la cantidad total capitalizada:

CAPITALIZACIÓN

2.83 *La suma total capitalizada en t unidades de tiempo, al r por uno en cada unidad de tiempo, mediante entregas de a unidades monetarias al finalizar cada etapa, es*

$$S = a \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}.$$

EJEMPLO 2.144 Una persona se propone seguir un plan de ahorro, durante tres años, ingresando en un banco 1000 euros todos los meses. El banco le da, realmente, el 9 % anual pagadero mensualmente. Se desea calcular a cuánto ascenderá finalmente el plan de ahorro. Para ello, calculamos el tanto por uno mensual r que corresponde a un 9 % anual:

$$r = (1+0.09)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.0072$$

Entonces la cantidad acumulada en 36 meses será:

$$S = 1000 \cdot \frac{(1+0.0072)^{36}-1}{0.0072} = 40929.18 \text{ euros}$$

en vez de los 36000 euros que ha aportado efectivamente la persona.

De nuevo, el resultado anterior exige conocer el tanto por uno que paga el banco por unidad de tiempo, en el sentido preciso en que viene manejándose y que, como se ha señalado, no suele ser el mismo que anuncia frecuentemente la banca. Además, por ejemplo, si un banco comercial abona los intereses trimestralmente y los ingresos se hacen mensualmente, los intereses de la cantidad ingresada el primer mes de un trimestre no comenzarán a generar sus propios intereses hasta dos meses después. De manera que el comportamiento práctico del banco puede perturbar la fórmula anterior.

2.8.3 AMORTIZACIÓN

Aún es más frecuente tener que amortizar un crédito que ha sido concedido y por el cual se tienen que pagar intereses. Supongamos que se ha prestado una cantidad C al r por uno por unidad de tiempo, para amortizar en n unidades de tiempo. Lo que interesa calcular en este caso es la cantidad, a, denominada *cuota*, que hay que pagar en cada unidad de tiempo para devolver el préstamo. El punto de partida es la igualdad que expresa, en cada unidad de tiempo, el estado del balance del préstamo:

$$\begin{bmatrix} \text{SALDO} \\ \text{PENDIENTE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{SALDO} \\ \text{ANTERIOR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{INTERÉS} \\ \text{PERÍODO} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{CUOTA} \\ \text{AMORTIZADA} \end{bmatrix}$$

El cálculo, paso a paso, será:

- En primer lugar, hay que tener en cuenta que si C es el capital prestado y r el tanto por uno por unidad de tiempo, los intereses del primer período son Cr. Si denotamos con C_1 el saldo de la deuda al finalizar el primer período, el balance del préstamo, después de transcurrir la primera unidad de tiempo y después de efectuar el primer pago, será:

$$C_1 = C + Cr - a = C(1+r) - a$$

- Una unidad de tiempo después, el saldo inicial será C_1 y los intereses $C_1 r$. Entonces el saldo de la deuda, que denotaremos con C_2, será:

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 + C_1 r - a \\ &= C_1(1+r) - a \\ &= [C(1+r) - a](1+r) - a \\ &= \left[C(1+r)^2 - a(1+r)\right] - a \\ &= C(1+r)^2 - a[1 + (1+r)] \end{aligned}$$

- Análogamente, transcurrida otra unidad de tiempo, el nuevo saldo de la deuda, que denotamos con C_3, será:

$$\begin{aligned} C_3 &= C_2 + C_2 r - a \\ &= C_2(1+r) - a \\ &= \left\{C(1+r)^2 - a[1 + (1+r)]\right\}(1+r) - a \\ &= C(1+r)^3 - a\left[1 + (1+r) + (1+r)^2\right] \end{aligned}$$

- En definitiva, generalizando el razonamiento anterior, al transcurrir las n unidades del tiempo previsto, el saldo de la deuda, C_n, será:

$$\begin{aligned} C_n &= C_{n-1} + C_{n-1} r - a \\ &= C_{n-1}(1+r) - a \\ &= \left\{C(1+r)^{n-1} - a\left[1 + (1+r) + \cdots + (1+r)^{n-2}\right]\right\}(1+r) - a \\ &= C(1+r)^n - a\left[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^{n-1}\right] \\ &= C(1+r)^n - a\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} \end{aligned}$$

  siendo la última igualdad una consecuencia de la fórmula de capitalización que hemos obtenido en la sección anterior.

Ahora bien, si se ha dado a a el valor adecuado, la deuda ha tenido que anularse después de las n etapas. Luego C_n tiene que ser igual a cero. Al igualar a cero la expresión anterior tenemos:

$$C(1+r)^n - a\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$$

De aquí, podemos despejar a, para obtener la correspondiente fórmula para la **cuota de amortización** de un capital C en n períodos de tiempo.

La cuota de amortización de una cantidad, C, en n unidades de tiempo, a un r por uno por unidad de tiempo es 2.84

$$a = C\frac{(1+r)^n\, r}{(1+r)^n - 1}\,.$$

EJEMPLO 2.145 Para comprar un coche, un padre ha prestado a su hijo 10000 euros que tenía en una cuenta, ideal, al 7 % de interés anual, pidiéndole que se lo devuelva en 12 mensualidades. Para calcular la cuota de amortización mensual, calculamos primeramente el tanto por uno mensual que corresponde al 7 % anual:

$$r = (1+0.07)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.00565$$

Entonces, la aplicación de la fórmula de la amortización da

$$a = 10000\cdot\frac{(1+0.00565)^{12}\,0.00565}{(1+0.00565)^{12}-1} = 864.28 \text{ euros}$$

como cantidad a reintegrar mensualmente. Podría razonarse de otra manera: en 12 meses, 10000 euros depositados en la cuenta se habrían transformado en

$$10000\cdot(1+0.07) = 10700 \text{ euros}$$

Por otra parte, si se ingresan mensualmente a euros en la misma cuenta, al cabo de un año habría conseguido capitalizar

$$a\cdot\frac{(1+0.00565)^{12}-1}{0.00565} = 12.38\cdot a \text{ euros}$$

Para que el hijo no pierda ni gane nada, ambas cantidades deben coincidir. Al igualarlas se obtiene el mismo resultado, ya que $12.38\cdot 864.28 \simeq 10700$ euros.

En el caso de amortización de préstamos, la práctica más habitual es que los pagos de las cuotas de amortización se efectúen mensualmente; entonces se toma como unidad de tiempo el mes y, consecuentemente, hay que manejar el tanto por ciento mensual. No obstante, igual que en las cuentas corrientes, éste no se expresa así, sino que se da el "tanto por ciento nominal anual" como el producto por 12 del tanto por ciento mensual. El interés anual que efectivamente se aplica es el T.A.E., que no es el anunciado sino algo mayor. Por ejemplo, si un banco dice que cobra por sus préstamos el "17 % nominal anual", con amortizaciones mensuales, en realidad cobra el $\frac{17}{12} = 1.417\,\%$ mensual y eso equivale a un T.A.E. de $100\,(1.01417^{12}-1) = 18.39\,\%$.

EJEMPLO 2.146 Para comprar una casa, una persona ha obtenido un crédito hipotecario por valor de 150000 euros al "4.5 % anual", a amortizar en 20 años en cuotas mensuales iguales. Se quiere saber cuánto debe pagar cada mes. Realmente el dato es que el interés mensual es del $\frac{4.5}{12}\,\% = 0.375\,\%$, de manera que $r = 0.00375$. Dado que el número de períodos de tiempo es $20 \cdot 12 = 240$ meses, la cuota de amortización mensual será de

$$150000 \cdot \frac{1.00375^{240}\,0.00375}{1.00375^{240} - 1} = 948.97 \text{ euros.}$$

EJEMPLO 2.147 La financiera asociada a una marca de automóviles anuncia que su financiación en 24 meses es "al 1 % mensual". Para comprar un coche de 10000 euros el cálculo de la cuota mensual que efectúa es el siguiente:

$$\frac{10000 + 10000 \cdot 0.01 \cdot 24}{24} = 516.67 \text{ euros.}$$

Si el préstamo fuese realmente al 1 % mensual, el tanto por uno mensual sería $r = 0.01$, y, por tanto, la cuota de amortización mensual en 24 meses, por 10000 euros, resultaría

$$a = 10000 \cdot \frac{1.01^{24}\,0.01}{1.01^{24} - 1} = 470.73 \text{ euros}$$

y no los 516.67 euros que calcula la financiera. En un caso se van a pagar $24 \cdot 470.73 = 11297.52$ euros y en el otro $24 \cdot 516.67 = 12400.08$ euros.

Para saber qué tanto por uno mensual real está aplicando la financiera, habría que encontrar un valor r que cumpliese la igualdad.

$$a = 10000 \cdot \frac{(1+r)^{24}\,r}{(1+r)^{24} - 1} = 516.67$$

Si realizamos con el auxilio de una calculadora algunos tanteos encontramos que:

$$\begin{array}{lcl} \text{Para } r = 0.015 & \rightarrow & a = 499.24 \\ \text{Para } r = 0.017 & \rightarrow & a = 510.91 \\ \text{Para } r = 0.018 & \rightarrow & a = 516.80 \end{array}$$

Podemos concluir entonces que la financiera aplica un interés un poco menor del 1.8 % mensual. Los bancos anunciarían estos créditos al $12 \cdot 1.8 = 21.6\,\%$ anual y el T.A.E. sería $(1.018^{12} - 1) \cdot 100 = 23.87\,\%$. Si, utilizando el lenguaje comercial de los bancos, la financiera dijese que sus créditos son al $12 \cdot 1\,\% = 12\,\%$ mensual, la diferencia con el T.A.E. real es de casi el doble.

2.9 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Como ya se ha señalado, al añadir los números irracionales a los racionales se consigue que una amplia gama de ecuaciones pase a tener solución dentro del conjunto de los números reales. Así, en la Sección 2.4.4, se ha mostrado que todas la ecuaciones de la forma $x^n = a$ son resolubles, para cualquier $a > 0$.

Entre las ecuaciones más útiles que se pueden resolver por métodos elementales están las ecuaciones **de segundo grado**.

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

2.85 *Sean a, b y c números reales. La forma general de la ecuación de segundo grado con una incógnita x es*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Nuestro objetivo es encontrar las soluciones de esta ecuación en función de los coeficientes a, b y c. Antes de abordar el estudio de la forma general comenzamos con el caso más sencillo.

2.9.1 CASO PARTICULAR: $x^2 = p$

Consideremos la ecuación

$$x^2 = p$$

donde p es un número real cualquiera. Según sea p caben tres situaciones distintas.

- Si p es un número positivo, la ecuación tiene dos soluciones:

  $$x_1 = \sqrt{p}, \qquad x_2 = -\sqrt{p},$$

  puesto que

  $$(\sqrt{p})^2 = (-\sqrt{p})^2 = p.$$

- Si es $p = 0$, no hay más que una solución, que es $x = 0$.

- Si p es un número negativo, puesto que el cuadrado de cualquier número real es positivo, no existe solución de la ecuación.

2.86 *La ecuación $x^2 = p$ cumple:*

- *Si $p > 0$, tiene dos soluciones reales, $x_1 = \sqrt{p}$ y $x_2 = -\sqrt{p}$.*
- *Si $p = 0$, tiene una única solución real, $x = 0$.*
- *Si $p < 0$, no tiene ninguna solución real.*

2.9.2 CASO GENERAL: $ax^2 + bx + c = 0$

Al resolver la ecuación general de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, cabe esperar que ocurra algo similar a lo obtenido en el caso particular anterior y que las soluciones puedan ser dos, una o ninguna según sean los coeficientes a, b y c.

Observemos, en primer lugar, que siempre puede suponerse $a > 0$, puesto que si a fuese nulo la ecuación se reduciría a una ecuación de primer grado:

$$bx + c = 0$$

ya estudiada en la Sección 2.5.4; y si fuese $a < 0$, se podría multiplicar toda la ecuación por -1 para pasar a considerar la ecuación

$$-ax^2 - bx - c = 0$$

en la cual el coeficiente de x^2 ya sería positivo.

Consideremos ahora la expresión

$$\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Desarrollando el paréntesis resulta:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c &= \left(\sqrt{a}x\right)^2 + 2\sqrt{a}x\frac{b}{2\sqrt{a}} + \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= \left(\sqrt{a}\right)^2 x^2 + \frac{2\sqrt{a}\,x\,b}{2\sqrt{a}} + \frac{b^2}{4\left(\sqrt{a}\right)^2} - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= ax^2 + bx + c.\end{aligned}$$

Entonces, la ecuación ax^2+bx+c puede ponerse de la forma

$$\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$$

y es posible reducirla a la forma simple estudiada anteriormente, $X^2=p$, si se hace

$$X=\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

y

$$p=\frac{b^2}{4a}-c=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Observamos que el signo de p es el mismo que el signo del numerador b^2-4ac, ya que hemos supuesto que el denominador $4a$ es siempre positivo. Entonces la discusión anterior acerca de las ecuaciones de la forma $X^2=p$ proporciona la solución:

- Si $b^2-4ac>0$, la ecuación $X^2=p$ tiene dos soluciones

  $$X_1=\sqrt{p}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}} \quad \text{y} \quad X_2=-\sqrt{p}=-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

  que permiten obtener dos soluciones de la ecuación original sin más que sustituir X_1, X_2 por sus valores

  $$\sqrt{a}x_1+\frac{b}{2\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}$$

  $$\sqrt{a}x_2+\frac{b}{2\sqrt{a}}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}$$

  y despejar x_1, x_2. Se obtienen así

  $$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

- Si $b^2-4ac=0$, la ecuación $X^2=0$ sólo tiene la solución $X=0$, es decir,

  $$\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}=0;$$

  por consiguiente, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene también una única solución que se obtiene al despejar x en la expresión anterior:

  $$x=-\frac{b}{2a}.$$

- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación $X^2 = p$ no tiene ninguna solución real y por tanto tampoco la tiene la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN $ax^2 + bx + c = 0$

En resumen, las conclusiones obtenidas afirman:

2.87

La ecuación de segundo grado con una incógnita $ax^2 + bx + c = 0$,

- *si $b^2 - 4ac > 0$, tiene dos soluciones:*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

- *si $b^2 - 4ac = 0$, tiene una única solución:*

$$x = -\frac{b}{2a};$$

- *si $b^2 - 4ac < 0$, no tiene ninguna solución real.*

Obsérvese que $b^2 - 4ac$ no varía al multiplicar la ecuación por -1, de manera que aunque fuese $a < 0$, puede aplicarse el mismo criterio para conocer el número de soluciones. Asimismo, en caso de que existan soluciones, el valor que proporcionan las fórmulas es el mismo si se cambian de signo a, b y c; luego no es necesario obligar a que sea $a > 0$ para que los resultados finales sean válidos. Lo que sí es conveniente es ordenar los términos de la ecuación para no confundir los coeficientes; por ejemplo, en la ecuación $7x - 9 - x^2 = 0$ a no es 7 sino -1 (el coeficiente de x^2), b es 7 y c es -9.

EJEMPLO 2.148

a) Para la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$, como $b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$ es positivo, existen dos soluciones

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2} = -2 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2} = -3.$$

b) La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ cumple $b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ luego la única solución es

$$x = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1.$$

c) La ecuación $x^2 + x + 1 = 0$, como $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$, no tiene ninguna solución real.

Cuando existen, es posible calcular cuánto vale la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1\cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= \frac{(-b)^2+b\sqrt{b^2-4ac}-b\sqrt{b^2-4ac}-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}. \end{aligned}$$

SUMA Y PRODUCTO DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN $ax^2+bx+c=0$

Si las soluciones, x_1 y x_2, de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ existen, su **suma** *y su* **producto** *valen:* 2.88

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.149 Para determinar dos números x_1 y x_2 cuya suma sea 7 y cuyo producto sea 10 basta observar que, según lo anterior, son las soluciones de la ecuación $x^2-7x+10=0$. Dichas soluciones son

$$\frac{7+\sqrt{49-4\cdot 10}}{2}=5 \quad \text{y} \quad \frac{7-\sqrt{49-4\cdot 10}}{2}=2.$$

Y efectivamente $2+5=7$ y $2\cdot 5=10$.

3

GEOMETRÍA

CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

La Geometría —etimológicamente *medida de la tierra*— es sin duda una de las actividades matemáticas más antiguas, ya que fue iniciada por las civilizaciones egipcia y babilónica, y alcanzó un notable desarrollo en la cultura griega; culminando con Euclides, cuyos *"Elementos"* aún se reeditan y se consideran un hito en la historia de la Matemática.



Euclides de Alejandría (325-265 AC).

Basándose en el trabajo de sus predecesores, el propósito y el gran logro de Euclides consistió en deducir a partir de un pequeño número de postulados o axiomas, tomados como verdades evidentes, gran número de teoremas que expresan propiedades de diversas figuras geométricas simples: rectas, ángulos, triángulos, círculos,. . . ; describen las relaciones que existen entre ellas y analizan las transformaciones a que pueden ser sometidas: traslaciones, simetrías, giros, etc. Durante siglos, y hasta época bien reciente, ha sido materia de estudio este tipo de geometría que puede calificarse de intrínseca, en el sentido de que no tiene apenas relaciones explícitas con otras ramas de las matemáticas y no utiliza en su metodología nada ajeno a su propio campo de estudio.



René Descartes (1596-1650).

La conexión de la geometría con otras disciplinas matemáticas, en particular el álgebra o, dicho con otras palabras, la introducción sistemática de los números en el quehacer geométrico, fue algo que tuvo que esperar hasta el siglo XVII, cuando Descartes, en un apéndice a su *"Discurso sobre el método"*, propuso utilizar un sistema de referencia, ahora llamado en su honor *cartesiano*, para referir a él los puntos, mediante coordenadas numéricas y, a través de los puntos, cualquier figura geométrica. Mediante tal procedimiento, los problemas de geometría elemental adquieren un tratamiento unificado, que consiste en gran parte en la resolución de ecuaciones y no exige el ingenio que es a menudo necesario en la utilización de los métodos intrínsecos.

De esta auténtica revolución, con la que Descartes inició lo que se ha conocido desde entonces como geometría analítica, en contraposición a la intrínseca, se ocupa este capítulo.

Al comienzo de la unidad didáctica se pone de manifiesto la mencionada contraposición geometría analítica–geometría intrínseca, mediante la demostración del famoso teorema de Pitágoras, en el que se basan diversos

conceptos posteriores. El primer objetivo de la unidad didáctica es exponer la idea de sistema de referencia que permite expresar cada punto mediante sus coordenadas numéricas. El segundo objetivo es la introducción de las rectas y las ecuaciones que las representan, así como el estudio de las posiciones relativas que pueden ocupar dos rectas, lo que abre paso a los conceptos de perpendicularidad y paralelismo. Se aborda a continuación el estudio de las figuras planas: polígonos y circunferencias.



Pitágoras (s. VI-V AC).

La unidad didáctica se complementa con el estudio de los ángulos y las razones trigonométricas con las que es posible resolver numerosos problemas prácticos.

3.1 GEOMETRÍA ANALÍTICA

3.1.1 EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Para poner en evidencia el interés de los cálculos algebraicos en el campo de la Geometría, puede servir la siguiente demostración de uno de los teoremas más importantes de la Historia: el famoso teorema de Pitágoras.

TEOREMA DE PITÁGORAS

3.1 *El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene área igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo. Es decir*

$$h^2 = b^2 + c^2$$

donde h es la longitud de la hipotenusa y b y c son las longitudes de los catetos.

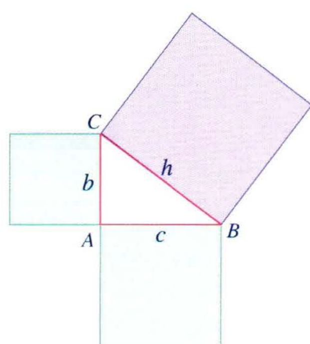


Figura 3.1: El teorema de Pitágoras.

La figura 3.1 muestra, de manera gráfica, la interpretación del teorema de Pitágoras: el área del cuadrado azul, que tiene como lado la hipotenusa del triángulo ABC, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados verdes que tienen como lado cada uno de los catetos. El teorema de Pitágoras permite calcular la longitud h de la hipotenusa a partir de las longitudes b y c de los catetos:

$$h = \sqrt{b^2 + c^2}$$

o la longitud de cualquier lado a partir de las de los otros dos.

La figura 3.2 muestra el triángulo rectángulo ABC, el cuadrado construido sobre la hipotenusa y otros tres triángulos, iguales al original, que rodean dicho cuadrado. Estos elementos componen un cuadrado mayor, que tiene de lado $b + c$, de modo que su área (véase la sección 3 de este mismo capítulo) es:

$$(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2.$$

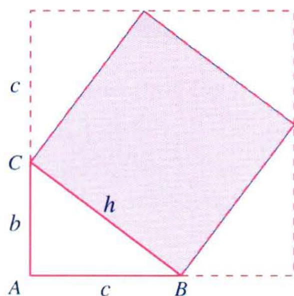


Figura 3.2: Demostración algebraica del teorema de Pitágoras.

Por otro lado, cada uno de los triángulos rectángulos tiene área igual a $bc/2$. Si se resta al área del cuadrado exterior el área de los cuatro triángulos, se obtiene el área del cuadrado interior, construido sobre la hipotenusa. Así pues

$$h^2 = (b + c)^2 - 4\,\frac{bc}{2} = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc = b^2 + c^2$$

que es el resultado que se trataba de establecer.

La sección complementaria al final de este capítulo contiene la demostración original de Pitágoras, por métodos puramente intrínsecos, a fin de que sirva de comparación con el razonamiento algebraico anterior. Fue el descubrimiento de Descartes, que se describe en la siguiente sección, el que permitió emplear de manera sistemática el cálculo algebraico para resolver, de manera unificada, gran número de problemas geométricos de importancia.

3.1.2 SISTEMAS DE REFERENCIA Y COORDENADAS

El procedimiento para identificar cada punto del plano mediante datos numéricos consiste en fijar un **sistema de referencia cartesiano** (figura 3.3).

SISTEMA DE REFERENCIA CARTESIANO

3.2

*Un **sistema de referencia cartesiano** está compuesto por los tres elementos siguientes:*

- *Un punto arbitrario del plano, que se denomina **origen**, O, y que se designa numéricamente por* $(0,0)$.
- *Dos rectas perpendiculares que se cortan en el origen, O, y se denominan **ejes de coordenadas**.*
- *Dos puntos, uno sobre cada eje, equidistantes ambos del origen, que se utilizan para indicar la **unidad de medida** sobre los ejes, además de señalar el **sentido positivo** sobre cada uno de ellos.*
  - *El primer punto, que se designa por* $(1,0)$, *identifica el **eje de abscisas**.*
  - *El segundo punto, que se designa por* $(0,1)$, *identifica el **eje de ordenadas**.*

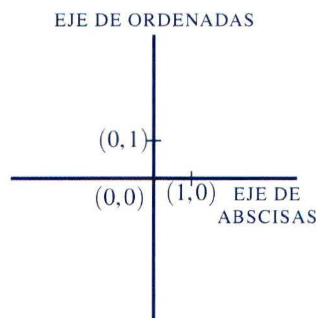


Figura 3.3: Sistema de referencia cartesiano.

Sobre ambos ejes, cualquier longitud se expresa sin más que tomar como unidad de medida el segmento desde el origen hasta el punto señalado sobre él. Es decir, se pueden marcar sobre los ejes diferentes múltiplos de la unidad de medida (..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...) y la posición de cada punto, P, sobre uno de los ejes quedará caracterizada por el número (entero, fraccionario o incluso irracional; positivo o negativo) de veces que el segmento OP contiene a la unidad de medida. La figura 3.4 muestra dos puntos P_1 y P_2, uno sobre cada eje, a distancias $\frac{25}{7}$ y $-\sqrt{3}$ del origen.

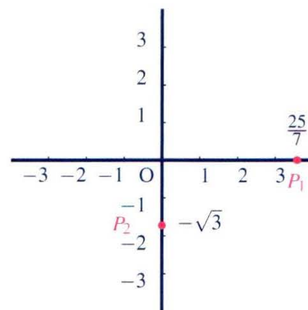


Figura 3.4: Dos puntos situados sobre los ejes.

Habitualmente, el eje de abscisas se representa horizontal y el eje de ordenadas vertical; en el primero, el sentido positivo se toma hacia la derecha, mientras que en el eje de ordenadas el sentido positivo es hacia arriba. Es una convención, útil en la práctica, pero que en el fondo no significa nada: todo depende de como se coloque el papel, derecho o inclinado, de frente o al trasluz. Una vez que se ha fijado un sistema de referencia, ya se puede medir la posición de cualquier punto, respecto a esta especie de regla bidimensional. Para ello se trazan por el punto P en cuestión las rectas paralelas a ambos ejes para determinar los puntos de intersección con ellos, P' y P''. Una vez proyectado así el punto P sobre los ejes, las posiciones de las proyecciones P' y P'' quedan identificadas, según se ha indicado, por un número cada una de ellas, x e y respectivamente. La posición del punto P en el plano queda entonces caracterizada por el par de números, (x,y), que se denominan sus coordenadas.

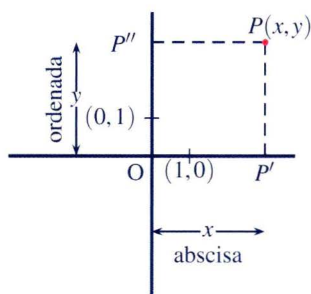


Figura 3.5: Coordenadas de un punto P del plano.

COORDENADAS

3.3

*Las **coordenadas** de un punto en el plano son las longitudes, positivas o negativas, de los segmentos determinados por sus proyecciones sobre los ejes y el origen.*

- *La primera coordenada, que recibe el nombre de **abscisa**, es la longitud x del segmento OP'.*
- *La segunda coordenada, denominada **ordenada**, es la longitud y del segmento OP''.*

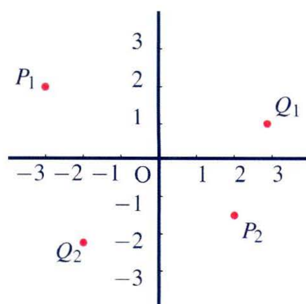


Figura 3.6: Ejemplos de coordenadas.

Ahora debe resultar claro por qué se ha representado por $(1,0)$ al punto que señala la unidad sobre el eje de abscisas y por $(0,1)$ al que señala la unidad sobre el eje de ordenadas. Más en general, el punto del eje de abscisas, situado a distancia x del origen, tiene por coordenadas $(x,0)$; mientras que el punto del eje de ordenadas, a distancia y del origen, tiene por coordenadas $(0,y)$. En cuanto al punto de coordenadas (x,y) está, por construcción, situado en la vertical del punto $(x,0)$ y en la horizontal del punto $(0,y)$.

EJEMPLO 3.1 Las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 respecto al sistema de referencia de la figura 3.6 son $(-3,2)$ y $(2,-1.5)$ respectivamente. Los puntos de coordenadas $\left(\frac{23}{8},1\right)$ y $\left(-2,-\sqrt{5}\right)$, respecto a dicho sistema de referencia, están en las posiciones Q_1 y Q_2 que se indican en la figura 3.6 .

Es útil observar que el sistema de referencia divide el plano en cuatro cuadrantes, caracterizados por los signos de las coordenadas, tal y como se indica en la figura 3.7. Nótese también la importancia del orden de las coor-

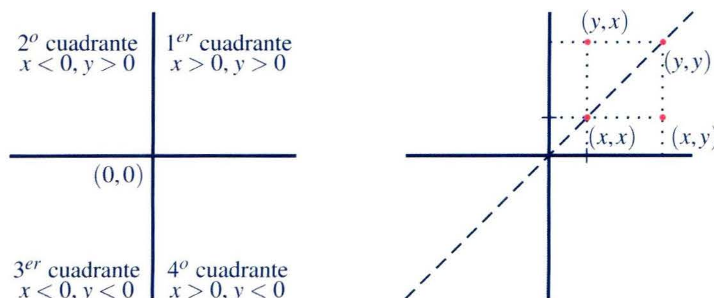


Figura 3.7: Los cuadrantes del plano y la diagonal principal.

denadas, en el sentido de que (x,y) e (y,x) corresponden a puntos distintos; exactamente simétricos uno de otro respecto a la diagonal de los cuadrantes primero y tercero. De hecho, la diagonal está constituida por los puntos del plano que tienen ambas coordenadas iguales y, por otra parte, (x,y) e (y,x) son vértices opuestos de un cuadrado cuyos otros dos vértices: (x,x) e (y,y), están sobre la diagonal (ver figura 3.7).

La importancia de la representación cartesiana, mediante coordenadas, no se debe sólo a su utilidad práctica. Como cuestión de fundamentos, si para la geometría intrínseca el *punto* era un concepto primitivo, indefinible, que se describía como "lo que no tiene dimensiones", para la geometría analítica, un punto se identifica con *un par ordenado de números*. Por supuesto es necesario apelar al concepto geométrico de sistema de referencia para dotar de interpretación a tal definición; pero basta con ella para desarrollar técnicas de cálculo que respondan a las preguntas que puedan hacerse sobre figuras geométricas entendidas como configuraciones de este tipo de puntos.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La configuración de puntos más sencilla que puede imaginarse es un una pareja de ellos, que delimita un **segmento**. No hay muchas cosas que preguntarse acerca de una configuración tan simple, pero sí hay una de importancia: su longitud o, con otras palabras, la **distancia** entre sus dos extremos.

En la figura 3.8 aparecen representados dos puntos P y Q de coordenadas (x,y) y (x',y') respecto de un sistema de referencia fijado. Por la propia definición de las coordenadas, el segmento $P'Q'$ tiene longitud $|x'-x|$, es decir, el valor absoluto de la diferencia $x'-x$, sin tener en cuenta el signo,

La manera de fijar la posición de un punto respecto a un sistema de referencia es de uso corriente en la vida cotidiana. Es frecuente, por ejemplo, que en los mapas figure una cuadrícula numerada que permite expresar la localización de cada accidente geográfico. Si el mapa es de una región relativamente pequeña, las rectas de la cuadrícula son paralelas a los bordes del plano y se emplea el método cartesiano para expresar las coordenadas de cada punto. El sistema de referencia está constituido, en esta caso, por el *Ecuador terrestre* y el *meridiano de Greenwich*, y lo que expresa la cuadrícula no son realmente la abscisa y la ordenada del punto, sino las coordenadas geográficas: *longitud* y *latitud*, que usualmente se miden en grados.



El hecho de que los mapas representen, no una superficie plana, sino la superficie esférica del globo terráqueo establece algunas diferencias con el método cartesiano, apreciables solamente en mapas de grandes regiones. En tal caso, las líneas de la cuadrícula, representación de los meridianos y paralelos terrestres, no son rectas sino que están ligeramente curvadas. Con todo, la idea es en esencia la misma que en la representación cartesiana, y no es fácil ingeniar un procedimiento sustancialmente distinto, para que, por ejemplo, un barco comunique su posición en alta mar.

para obtener en cualquier caso una cantidad positiva; mientras que el segmento $P''Q''$ tiene longitud $|y'-y|$. Así pues, dadas las coordenadas de dos puntos, se conocen los catetos del triángulo rectángulo que aparece en la figura y el teorema de Pitágoras permite concluir que la hipotenusa h de dicho triángulo verifica

$$h^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2.$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Encontramos entonces la expresión que nos da la distancia entre dos puntos en función de sus coordenadas.

3.4 *La* **distancia** *entre los puntos* (x,y) *y* (x',y') *es*

$$h = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}.$$

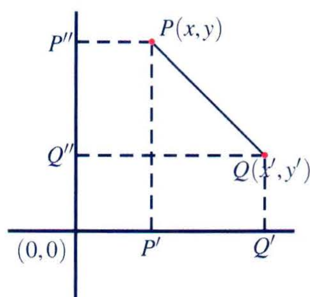


Figura 3.8: Distancia entre dos puntos.

EJEMPLO 3.2 La distancia entre los puntos P y Q, de coordenadas $(1,5)$ y $(-3,1)$ respecto de un mismo sistema de referencia, es igual a

$$\overline{PQ} = \sqrt{((-3)-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

EJEMPLO 3.3 Los lados del triángulo ABC de la figura 3.9 tienen por longitudes

$$\begin{aligned}
\overline{AB} &= \sqrt{(4-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \simeq 4.47,\\
\overline{AC} &= \sqrt{(-3.5-2)^2 + (-2.5-3)^2} = \sqrt{30.25+30.25} = \sqrt{60.5} \simeq 7.78,\\
\overline{BC} &= \sqrt{(-3.5-4)^2 + (-2.5-(-1))^2} = \sqrt{56.25+2.25} = \sqrt{58.5} \simeq 7.65.
\end{aligned}$$

expresadas obviamente en las unidades de medida fijadas sobre los ejes.

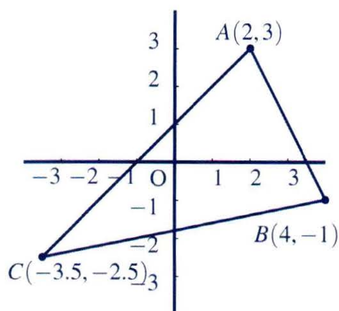


Figura 3.9: Un triángulo en el plano.

3.2 RECTAS EN EL PLANO

Al igual que ocurre con el punto, en geometría intrínseca, el concepto de recta no tiene definición, sino que constituye otro de sus conceptos iniciales, indefinibles. Desde luego se trata de *un conjunto de puntos alineados*, pero inmediatamente surge la pregunta de que significa que varios puntos estén *alineados*... y la única respuesta posible, al menos en geometría intrínseca, es que son aquellos que se encuentren sobre una recta; lo cual cierra el círculo vicioso y hace la definición inservible. Intuitivamente, la imagen de una recta es la de un hilo tenso, indefinidamente largo e infinitamente delgado.

En la geometría analítica, se dispone del recurso de representar cada punto por sus coordenadas (x, y) respecto a un sistema de referencia fijado, y puede definirse una recta como el conjunto de puntos que cumplen cierta relación entre ambas coordenadas. La clave está en elegir cuál debe ser la relación de manera que el resultado responda a nuestra idea intuitiva de recta.

RECTA

3.5

*Una **recta** es el conjunto de todos los puntos, cuyas coordenadas (x, y) satisfacen una ecuación del tipo*

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son números reales que identifican la recta.

EJEMPLO 3.4 La ecuación $2x - 3y - 3 = 0$ es la ecuación de una recta.

De acuerdo con la definición, un punto pertenece a una recta si, al sustituir x por la abscisa del punto e y por su ordenada, se satisface la ecuación.

EJEMPLO 3.5

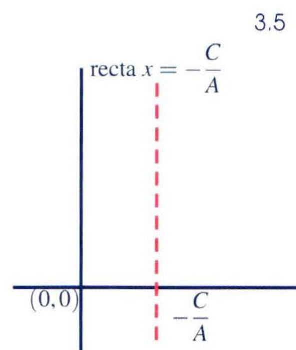
a) El punto $(1, 3)$ pertenece a la recta $4x - y - 1 = 0$ por ser $4 \cdot 1 - 3 - 1 = 0$.

b) El punto $(2, 3)$ no pertenece a la recta, ya que $4 \cdot 2 - 3 - 1 \neq 0$.

Antes de interpretar la definición, conviene distinguir dos casos para evitar ciertas anomalías en los razonamientos (ver figura 3.10):

1. **Recta paralela al eje de ordenadas.** Si $B = 0$, la ecuación anterior se reduce a

$$x = -\frac{C}{A}$$



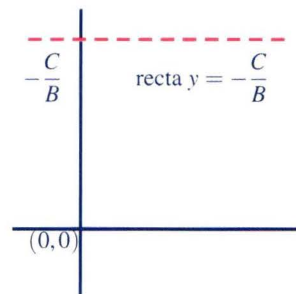
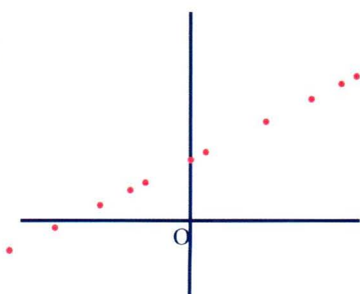


Figura 3.10: Rectas paralelas a los ejes de coordenadas.

"ALGUNOS" PUNTOS



"TODOS" LOS PUNTOS

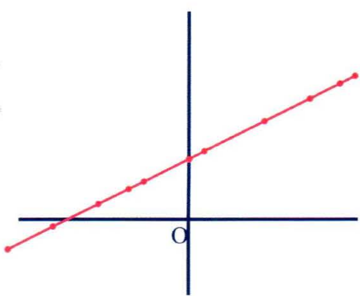


Figura 3.11: Representación de la recta $y = \frac{x}{2} + 4$.

es decir, el conjunto de puntos de abscisa constante, igual a $-\frac{C}{A}$, que representa la recta paralela al eje de ordenadas, situada a distancia $-\frac{C}{A}$ del origen.

2. **Recta paralela al eje de abscisas.** Si $A = 0$, la ecuación anterior se reduce a

$$y = -\frac{C}{B}$$

que representa el conjunto de puntos de ordenada constante, igual a $-\frac{C}{B}$, es decir, la recta paralela al eje de abscisas situada a distancia $-\frac{C}{B}$ del origen.

EJEMPLO 3.6

a) La ecuación $2x - 5 = 0$ tiene $B = 0$ y es una recta vertical, es decir, paralela al eje de ordenadas, formada por los puntos de abscisa constante $x = \dfrac{5}{2}$.

b) La ecuación $3y + 1 = 0$ tiene $A = 0$ y es la recta horizontal, es decir, paralela al eje de abscisas, formada por los puntos de ordenada fija $y = -\dfrac{1}{3}$.

Cuando $B \neq 0$ la ecuación se puede expresar

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

que representa una recta del plano, no vertical. Si se hace $a = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$, resulta:

ECUACIÓN EXPLÍCITA DE LA RECTA

3.6

Las coordenadas (x, y) de los puntos de una recta, no paralela al eje de ordenadas, satisfacen la relación

$$y = ax + b$$

para algún par de números reales a y b, que identifican la recta.

Los puntos de una recta que tienen la abscisa o la ordenada igual a un valor dado, se obtienen mediante substitución en la ecuación. Por ejemplo, si se considera la recta definida por $y = \frac{1}{2}x + 4$ pueden hallarse los puntos correspondientes a ciertos valores de la abscisa, sin más que calcular, mediante la ecuación, el valor de sus ordenadas. Así, para $x = 1$, el valor de y es $y = \frac{1}{2} \cdot 1 + 4 = 4.5$, de modo que el punto $(1, 4.5)$ está sobre la recta. Repetido este cálculo para diversos valores de x se obtienen, por ejemplo, los puntos de la recta que figuran en la tabla siguiente:

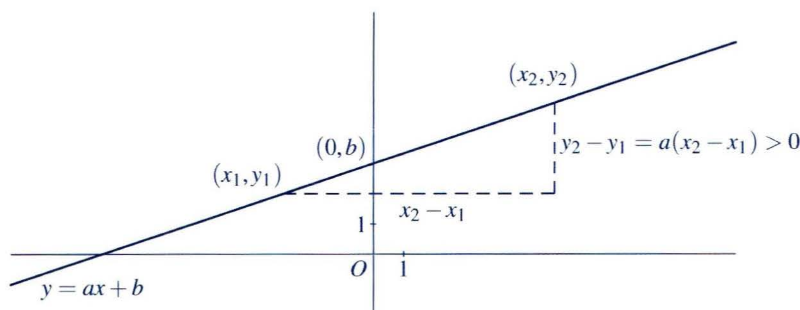


Figura 3.12: Recta con pendiente positiva $a > 0$.

x	-12	-9	-6	-4	-3	0	1	5	8	10	11
y	-2	-0.5	1	2	2.5	4	4.5	6.5	8	9	9.5

La representación gráfica de los puntos de la tabla, tal y como aparece en la figura 3.11, da una justificación intuitiva de que la ecuación representa una recta, pues la configuración geométrica obtenida parece responder a la idea intuitiva de puntos alineados. Puede imaginarse que se representan *todos* los puntos de la recta, sea cual sea la abscisa, con la ordenada calculada a partir de la expresión $\frac{1}{2}x+4$. Se obtendría así la gráfica de la recta que está representada en la parte inferior de la figura 3.11. El resultado es similar cualquiera que sean las constantes a y b, si bien la recta obtenida depende de los valores que toman estas constantes y su apariencia gráfica varía. Es decir, según sean a y b, la recta es más o menos inclinada y corta al eje de ordenadas en un punto más o menos alejado del origen. Más concretamente:

3.7 PENDIENTE Y ORDENADA EN EL ORIGEN DE UNA RECTA

- *La constante a se denomina* **pendiente** *de la recta e indica su inclinación, puesto que expresa lo que crece, o decrece, la ordenada y de los puntos de la recta por cada unidad que aumente la abscisa x.*

- *La constante b representa la* **ordenada en el origen**, *en el sentido de que la recta de ecuación $y = ax + b$ pasa por el punto $(0,b)$ y b es, por tanto, el nivel al cual la recta corta al eje de ordenadas.*

La figura 3.12 muestra una recta con pendiente positiva y la figura 3.13 muestra otra con pendiente negativa. Cuanto más grande sea $|a|$, más incli-

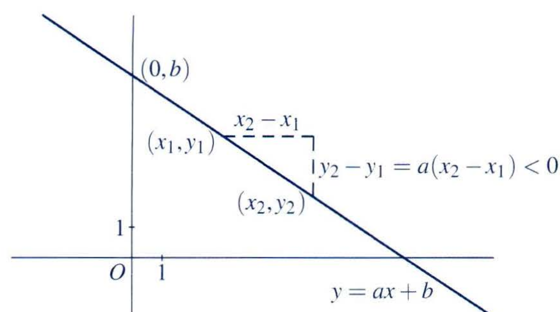


Figura 3.13: Recta con pendiente negativa $a < 0$.

nada es la recta; mientras que valores de a próximos a cero, corresponden a rectas *casi horizontales*. Además el signo de a indica si la recta es creciente o decreciente; es decir si y aumenta o disminuye al aumentar x. Observamos que puesto que una recta queda geométricamente determinada por dos puntos, para trazar la gráfica de una recta de ecuación dada, basta determinar el valor de y para un $x \neq 0$ arbitrario, y unir (x,y) con $(0,b)$.

EJEMPLO 3.7

a) Las rectas $y = 2x - 1$ e $y = 5x - 3$ tienen pendientes positivas, $a = 2$ y $a = 5$ respectivamente. Ambas son crecientes pero, como la segunda pendiente es superior a la primera, la primera recta está menos inclinada hacia arriba.

b) En cambio, la recta $y = -3x + 2$ tiene pendiente negativa y su inclinación es hacia abajo.

Las tres rectas están representadas en la figura 3.14, en un sistema de referencia en que la unidad del eje x es doble de la del eje y.

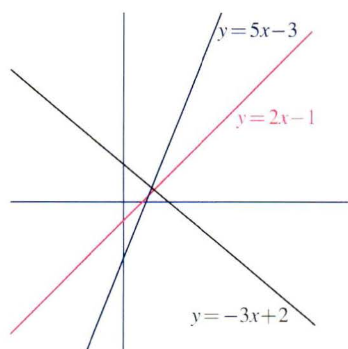


Figura 3.14: Las gráficas de tres rectas.

3.2.1 ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Dados dos puntos de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), existe una única recta que pasa por ambos. Podemos preguntarnos cuál será la ecuación de dicha recta o, dicho en otros términos, cuál es la relación que liga la ordenada y la abscisa de cualquier otro punto (x,y) alineado con los dos primeros. La respuesta es sencilla: se pretende buscar una ecuación de la forma $y = ax + b$ que se verifique para los valores (x_1, y_1) y también para los valores (x_2, y_2); debe ser pues

$$\begin{cases} y_2 = ax_2 + b \\ y_1 = ax_1 + b \end{cases}$$

sistema de ecuaciones lineales que permite determinar a y b. Si se restan ambas ecuaciones resulta $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, de donde

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{y} \qquad b = y_1 - ax_1.$$

El cálculo anterior supone implícitamente que $x_1 \neq x_2$. Si $x_1 = x_2$ la respuesta es todavía más simple, puesto que la recta en cuestión es paralela al eje de ordenadas y su ecuación es simplemente: $x = x_1$. En definitiva:

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

3.8

- *Si los dos puntos tienen abscisas distintas $x_1 \neq x_2$ la ecuación de la* **recta que pasa por los puntos** *(x_1, y_1) y (x_2, y_2) es*

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1.$$

- *Si los dos puntos tienen abscisas iguales $x_1 = x_2$, la ecuación es*

$$x = x_1.$$

EJEMPLO 3.8 La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1,2)$ y $(3,-1)$ es

$$y = \frac{-1-2}{3-1}(x-1) + 2 \qquad \text{o bien} \qquad y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

En cambio, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1,-3)$ y $(-1,2)$ es $x = -1$.

3.2.2 CONDICIÓN DE ALINEACIÓN DE TRES PUNTOS

Conocida la ecuación de la recta determinada por dos puntos, el criterio para saber si tres puntos están alineados es automático; basta comprobar si las coordenadas del tercero verifican la ecuación de la recta determinada por los dos primeros. Es decir, debe verificarse

$$y_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) + y_1$$

lo que, después de restar y_1 y dividir por $x_3 - x_1$, equivale a

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

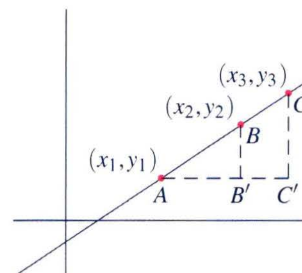


Figura 3.15: Tres puntos alineados.

CONDICIÓN DE ALINEACIÓN DE TRES PUNTOS

3.9 *Tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) están alineados si*

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

o bien $x_1 = x_2 = x_3$.

EJEMPLO 3.9 Los puntos $(1,1)$, $(2,4)$ y $(0,-2)$ están alineados ya que se cumple

$$\frac{-2-1}{0-1} = \frac{4-1}{2-1} = 3\,.$$



Thales de Mileto 624-547 AC.

La condición de alineación de tres puntos, tales como se representan en la figura 3.15, significa que son proporcionales los catetos:

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}.$$

No es difícil deducir que los últimos cocientes coinciden también con $\overline{AC}/\overline{AB}$ y que se cumple por tanto

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

La proporcionalidad de los lados del triángulo ACC' con los lados del triángulo ABB' es la esencia del teorema de Thales, uno de los resultados más antiguos de la geometría griega, cuya demostración intrínseca figura en la sección final de este capítulo.

3.2.3 POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS

La intuición geométrica indica que dos rectas, no paralelas, se cortan en un punto. Desde el punto de vista analítico, se pueden determinar las coordenadas x e y del punto de intersección, sin más que caer en la cuenta de que deben verificar la ecuación de ambas rectas. Para admitir la posibilidad de que alguna de ellas sea paralela al eje de ordenadas, conviene escribir la ecuación en la forma inicial.

INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS

El **punto de intersección** *de las rectas* 3.10

$$Ax+By+C=0 \qquad y \qquad A'x+B'y+C'=0$$

si existe, tiene por coordenadas la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

Desde luego, si el sistema no tiene solución, es que las rectas son paralelas y distintas. En cambio si el sistema tiene infinitas soluciones, ambas rectas coinciden. En ambos casos debe verificarse

$$AB' - A'B = 0$$

que es la condición para que dos rectas sean paralelas o coincidentes que se utilizará de nuevo en el apartado 3.2.3.

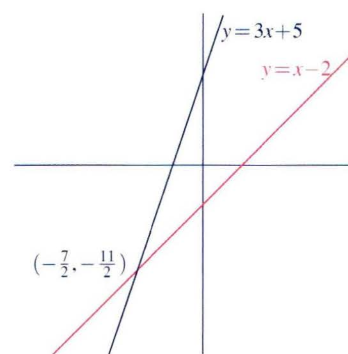


Figura 3.16: Intersección de dos rectas.

EJEMPLO 3.10 Las rectas $y=x-2$ e $y=3x+5$ se cortan en el punto cuyas coordenadas son la solución del sistema formado por ambas ecuaciones. Si se resta la primera ecuación de la segunda, se obtiene $2x+7=0$; luego $x=-\frac{7}{2}$ y, por consiguiente, $y=-\frac{11}{2}$. Así pues el punto de corte es $\left(-\frac{7}{2},-\frac{11}{2}\right)$.

De esta manera, la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, que se estudiaron en el segundo capítulo, adquiere una interpretación geométrica sencilla.

RECTAS PARALELAS

Puesto que la pendiente de una recta marca su inclinación con respecto a los ejes de coordenadas, dos rectas serán paralelas si tienen la misma pendiente.

CONDICIÓN DE PARALELISMO (FORMA EXPLÍCITA)

Las rectas de ecuaciones 3.11

$$\begin{aligned} y &= ax+b \\ y &= a'x+b' \end{aligned}$$

son **paralelas** *si* $a=a'$.

Cuando las ecuaciones de las rectas están en forma general es sencillo encontrar la condición de paralelismo. Se ha visto en el apartado anterior que

dos rectas de ecuaciones $Ax+By+C=0$ y $A'x+B'y+C'=0$ son paralelas, o coinciden, si $AB'-A'B=0$. Salvo en el caso en que ambas fuesen verticales, será $B\neq 0$ y $B'\neq 0$, de manera que de la condición anterior tenemos el siguiente resultado, que nos muestra de nuevo que las pendientes tienen que coincidir.

CONDICIÓN DE PARALELISMO (FORMA IMPLÍCITA)

3.12 *Las rectas de ecuaciones*

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A'x + B'y + C' &= 0 \end{aligned}$$

son **paralelas** *si*

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'} \qquad \text{o lo que es lo mismo} \qquad AB'-A'B=0.$$

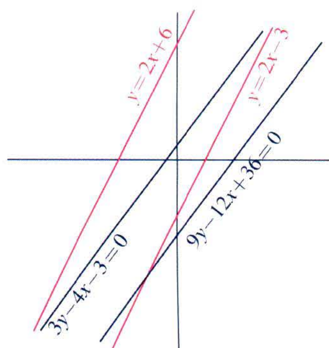


Figura 3.17: Rectas paralelas.

EJEMPLO 3.11 Las rectas $y=2x-3$ e $y=2x+6$ son paralelas porque tienen la misma pendiente $a=2$.

EJEMPLO 3.12 Las rectas $3y-4x-3=0$ y $9y-12x+36=0$ son paralelas, porque se cumple $3\cdot(-12)-9\cdot(-4)=0$. Aunque también puede observarse que sus pendientes $\frac{4}{3}$ y $\frac{12}{9}$ coinciden.

A partir de lo anterior, es sencillo obtener la ecuación de la paralela a una recta dada que pasa por un punto (x_0,y_0) ya que, además de tener pendiente a, la ecuación debe satisfacerse para $x=x_0$ e $y=y_0$. Por otra parte, en el caso de que la recta sea vertical, la paralela por un punto es inmediata.

ECUACIÓN DE LA RECTA PARALELA POR UN PUNTO

3.13 *La ecuación de la* **paralela a la recta** $y=ax+b$ **por el punto** (x_0,y_0) *es*

$$y=a(x-x_0)+y_0.$$

En el caso de una recta vertical $x=k$, la paralela por (x_0,y_0) es la vertical $x=x_0$.

EJEMPLO 3.13

a) La ecuación de la paralela a la recta $y=3x-1$ por el punto $(1,1)$ es:

$$y=3(x-1)+1$$

es decir $y=3x-2$.

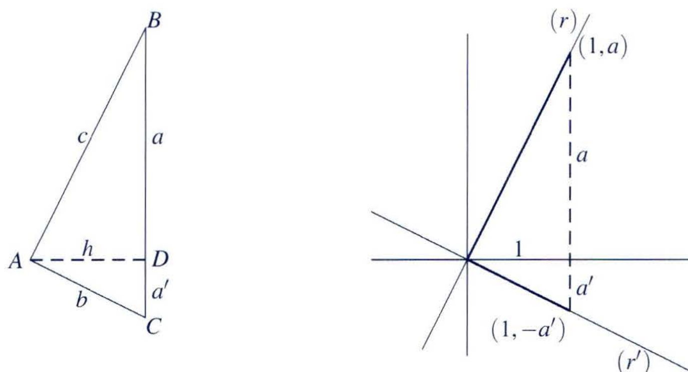


Figura 3.19: La recta $y = ax$ y su perpendicular $y = -a'x$.

b) La forma general de la paralela por un punto también es válida cuando la recta tiene pendiente $a = 0$, es decir, es paralela al eje de abscisas. Por ejemplo, la paralela a la recta $y = 4$ por el punto $(3, -2)$ es $y = -2$.

c) La paralela a la recta $x = -1$, por el punto $(\sqrt{5}, -\pi)$ es igual a $x = \sqrt{5}$.

RECTAS PERPENDICULARES

El concepto de perpendicular a una recta dada es más delicado, porque hay que saber interpretar lo que significa analíticamente la perpendicularidad en términos de las pendientes.

En la figura 3.18 se observa que si una recta (r) es muy inclinada —tiene una pendiente a grande— la perpendicular (r') tiene una pendiente pequeña y de signo contrario. Y al revés, la perpendicular a una recta (r') de pequeña pendiente es una recta (r) de pendiente grande y de signo contrario.

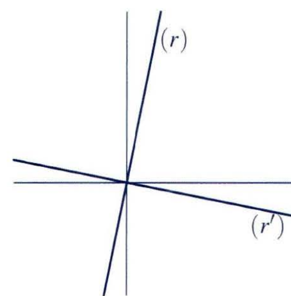


Figura 3.18: Una recta r y su perpendicular r'.

Para deducir con más precisión la relación que existe entre la pendiente de una recta y la de su perpendicular, se considera, como muestra la figura 3.19, un triángulo ABC rectángulo en A, de catetos b y c, y se traza por A la perpendicular a la hipotenusa, para obtener una altura h del triángulo, cuya intersección D con la hipotenusa determina sobre ella dos segmentos de longitudes a y a'. Como resultado de aplicar el teorema de Pitágoras a cada uno de los tres triángulos rectángulos de la figura, se tiene

$$\begin{array}{lrcl} \triangle\, ABD: & a^2 & = & c^2 - h^2, \\ \triangle\, ACD: & a'^2 & = & b^2 - h^2, \\ \triangle\, ABC: & (a+a')^2 & = & b^2 + c^2. \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} b^2+c^2 &= (a+a')^2 && \text{por } \triangle ABC \\ &= a^2+a'^2+2aa' \\ &= c^2-h^2+b^2-h^2+2aa' && \text{por } \triangle ABD \text{ y } \triangle ACD \end{aligned}$$

y por consiguiente al simplificar resulta $aa' = h^2$. Consideremos ahora la recta (r) de pendiente a que pasa por el origen de coordenadas. Su ecuación es $y = ax$ y, evidentemente, pasa por el punto $(1,a)$. Sea (r') la recta perpendicular a (r) que pasa por el origen. Si denotamos a su pendiente por $-a'$, su ecuación es de la forma $y = -a'x$, y, además, pasa por el punto $(1,-a')$. El dibujo de las rectas r y r' proporciona una imagen idéntica a la anterior, como se ve en la parte derecha de la figura 3.19, salvo que, ahora, $h = 1$. Luego, según hemos visto, debe ser $aa' = 1$, o equivalentemente $a' = \frac{1}{a}$. En definitiva, la pendiente $-a'$ de la perpendicular (r') a (r) vale:

$$-a' = -\frac{1}{a}.$$

Más aún, toda perpendicular a (r) —paralela a (r')— tiene pendiente $-\dfrac{1}{a}$.

EJEMPLO 3.14

a) Cualquier perpendicular a la recta $y = 2x+3$ tiene pendiente $-\frac{1}{2}$.

b) Las perpendiculares a la recta $y = -\frac{1}{3}x+2$ tienen todas pendiente 3.

ECUACIÓN DE LA RECTA PERPENDICULAR POR UN PUNTO

Conocida la pendiente de las perpendiculares a una recta dada, para determinar la ecuación de aquella de entre ellas que pasa por un punto dado (x_0,y_0), basta imponer que pase por dicho punto.

3.14 *La ecuación de la perpendicular a la recta $y = ax+b$ por el punto (x_0,y_0) es*

$$y = -\frac{1}{a}(x-x_0)+y_0.$$

EJEMPLO 3.15 La perpendicular a la recta $y = 2x-1$ por el punto $(2,-1)$ tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y su ecuación es $y = -\frac{1}{2}(x-2)-1$, es decir, $2y+x = 0$. Ambas están representadas en la figura 3.20.

Resta por analizar los casos extremos, es decir, encontrar la perpendicular a rectas paralelas a los ejes de coordenadas:

- *Si $a = 0$, la recta es paralela al eje de abscisas y su perpendicular por el punto (x_0, y_0) es la paralela al eje de ordenadas $x = x_0$.*

- *Simétricamente, la perpendicular a la recta vertical $x = k$ por (x_0, y_0) es la paralela al eje de abscisas $y = y_0$.*

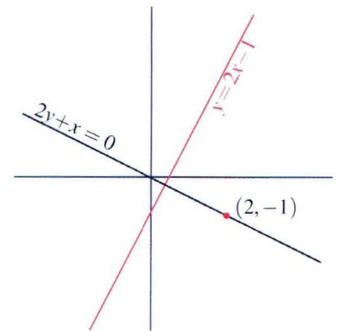


Figura 3.20: Rectas perpendiculares.

EJEMPLO 3.16

a) La perpendicular a la recta $y = -\sqrt{2}$ por el punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{2}{5}\right)$ es la recta de ecuación $x = \frac{3}{2}$.

b) La perpendicular a la recta $x = -4$ por el punto $\left(\sqrt{2}, \pi\right)$ es la recta $y = \pi$.

3.3 FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

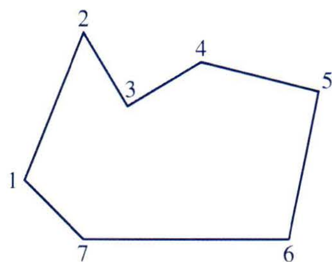


Figura 3.21: Un polígono de siete lados.

3.3.1 POLÍGONOS

A partir de las rectas, se pueden formar infinidad de figuras geométricas planas: triángulos, paralelogramos, cuadriláteros y, en general, cualquier figura poligonal, definida por n puntos consecutivos unidos por segmentos rectilíneos, que no se corten, como la que se representa en la figura 3.21, y que podría esquematizar una parcela de terreno o la forma de un patrón de costura. Los métodos descritos para trabajar con rectas y segmentos rectilíneos permiten, en principio, resolver cualquier cuestión que pueda interesar sobre tales **polígonos**. Sin embargo hay dos cuestiones de especial relevancia, que merecen ser destacadas: los conceptos de perímetro y área de un polígono.

PERÍMETRO DE UN POLÍGONO

3.16 *El **perímetro** de un polígono es la longitud total de su contorno. Se obtiene como suma de las longitudes de cada uno de los segmentos rectilíneos que lo componen*

El **área** de un polígono es un concepto que no se basa en ninguna de las ideas introducidas hasta ahora, de forma que conviene considerar primero las figuras más simples.

ÁREA DE UN RECTÁNGULO

3.17 *El **área de un rectángulo**, con longitud de sus lados a y b, se define como el producto de los lados; es decir*

$$A = a \times b.$$

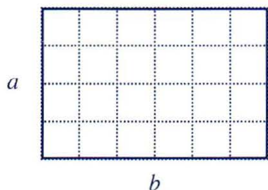


Figura 3.22: El área de un rectángulo.

La razón es que, cuando a y b son enteros, el rectángulo puede dividirse en $a \times b$ cuadrados de lado 1, cada uno de los cuales representa la unidad de medida de área, como se aprecia en la figura 3.22. Así, cuando la unidad de longitud sea el cm, la unidad de área será el cm^2; si es el m será el m^2, etc. Si a y b no fuesen enteros, podría variarse la unidad de longitud, y tomar la correspondiente unidad de área; de modo que el resultado permanece válido.

EJEMPLO 3.17 Considérese el rectángulo formado por los puntos $A(2,0), B(2,5)$, $C(-1,5)$ y $D(-1,0)$. Para calcular su perímetro y su área, calculamos las longitudes de los lados, utilizando la expresión para la distancia entre dos puntos.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &\equiv \sqrt{(2-2)^2+(5-0)^2} = 5,\\ \overline{BC} &\equiv \sqrt{(-1-2)^2+(5-5)^2} = 3.\end{aligned}$$

Perímetro $= 2 \times (5+3) = 16$ unidades de longitud.
Área $= 5 \times 3 = 15$ unidades de área $= 15$ (unidades de longitud)^2.

Para un paralelogramo –cuadrilátero con sus lados opuestos paralelos– la descomposición que muestra la figura 3.23, en la que el triángulo añadido a la izquierda es igual al pico de la derecha, permite concluir que su área es igual a la de un rectángulo de la misma base y de la misma altura.

ÁREA DE UN PARALELOGRAMO 3.18

*El **área de un paralelogramo** es el producto de su* base *por su* altura

$$A = b \times h.$$

EJEMPLO 3.18 Consideremos el paralelogramo de la figura 3.24 formado por los puntos $A(-2,-1)$, $B(2,3)$, $C(3,0)$ y $D(-1,-4)$. Para calcular su perímetro calculamos la longitud de sus lados, utilizando la expresión de la distancia entre dos puntos:

$$\overline{AB} \equiv \sqrt{(2+2)^2+(3+1)^2} = 4\sqrt{2},$$
$$\overline{BC} \equiv \sqrt{(3-2)^2+(0-3)^2} = \sqrt{10}.$$

Entonces

$$\text{Perímetro} = 2\left(4\sqrt{2}+\sqrt{10}\right) = 2\sqrt{2}\left(4+\sqrt{5}\right) \quad \text{unidades de longitud.}$$

Para calcular el área debemos calcular la altura, es decir, el valor del segmento recto que es perpendicular a la base desde un vértice del lado opuesto. Para ello, calculamos en primer lugar la recta (r) que pasa por los vértices A y B, utilizando la expresión de la recta que pasa por dos puntos:

$$(r) \equiv y = \frac{3+1}{2+2}(x+2) - 1 = x+1.$$

El lado opuesto estará sobre la recta paralela a (r) que pasa por el punto $C(3,0)$. Esta recta es la recta:

$$(s) \equiv y = x-3.$$

Ahora calculamos la perpendicular a (r) por el punto $A(-2,-1)$:

$$(r') \equiv y = -(x+2) - 1 = -x-3$$

cuya intersección E con la recta (s) se obtiene resolviendo la ecuación $x-3 = -x-3$, cuya única solución es $x=0$. La ordenada correspondiente es $y = -3$ y el punto E es el punto $(0,-3)$. La longitud de la altura del paralelogramo será la distancia que hay desde el punto A al punto E es decir $\overline{AE} = \sqrt{(-2-0)^2+(-1+3)^2} = 2\sqrt{2}$. Podemos concluir que:

$$\text{Área} = 4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 16 \quad \text{unidades de área.}$$

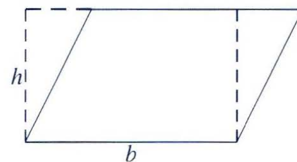


Figura 3.23: El área de un paralelogramo.

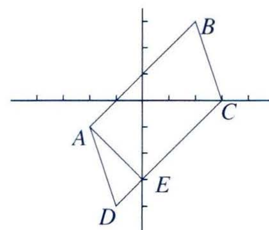


Figura 3.24: Cálculo del área de un paralelogramo.



Para un triángulo arbitrario, basta duplicarlo para obtener un paralelogramo, como se ve en la figura 3.25.

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

3.19

El área de un triángulo *es la mitad del producto de su* base *por su* altura

$$A = \frac{b \times h}{2}.$$

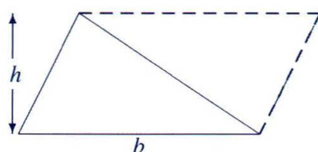


Figura 3.25: El área de un triángulo.

EJEMPLO 3.19 Consideremos el triángulo representado en la figura 3.26 de vértices $A(0,-2)$, $B(3,1)$ y $C(-2,2)$. Para calcular su perímetro tenemos que calcular las longitudes de los lados:

$$\begin{aligned}
\overline{AB} &\equiv \sqrt{(3-0)^2+(1+2)^2} &= 3\sqrt{2}, \\
\overline{AC} &\equiv \sqrt{(-2-0)^2+(2+2)^2} &= 2\sqrt{5}, \\
\overline{BC} &\equiv \sqrt{(-2-3)^2+(2-1)^2} &= \sqrt{26}.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\text{Perímetro} \quad = \quad 3\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{26} \quad \text{unidades de longitud.}$$

Para calcular el área debemos calcular la altura, encontrando en primer lugar la recta (r) que pasa por los vértices A y B:

$$(r) \equiv y = \frac{3}{1+2}(x-3)+1 = x-2.$$

Figura 3.26: Cálculo del área de un triángulo.

La perpendicular a (r) por el punto $C(-2,2)$ es:

$$(r') \equiv y = -(x+2)+2 = -x.$$

El punto D intersección de las rectas (r) y (r') tiene como abscisa la solución de la ecuación $x-2=-x$, es decir, $x=1$ y como ordenada $y=-1$. La distancia de $D(1,-1)$ a $C(-2,2)$ es

$$\overline{CD} = \sqrt{(1+2)^2+(-1-2)^2} = 3\sqrt{2}$$

Por tanto:

$$\text{Área} \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD} = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}\right) = 9 \quad \text{unidades de área.}$$

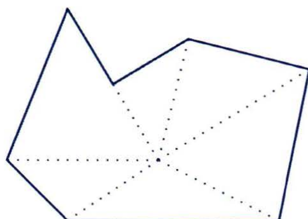


Figura 3.27: Una triangulación de un polígono.

En general —véase la figura 3.27— se puede obtener el área de cualquier polígono sin más que descomponerlo en triángulos de manera arbitraria y sumar las áreas de los triángulos formados. Resulta intuitivamente claro que la triangulación efectuada no influye en el resultado y ello permite calcular sin ambigüedad el área de cualquier polígono.

3.3.2 CIRCUNFERENCIAS

Los polígonos no agotan, ni mucho menos, las figuras geométricas de interés, puesto que no incluyen ninguna figura curva que pueda considerarse dibujada sobre un plano. El trazado de una carretera, la órbita descrita por un satélite, el contorno de una hoja de abedul, son otras tantas figuras geométricas, no compuestas por segmentos rectilíneos, sino descritas por curvas más o menos complicadas. Los métodos para representar y estudiar las propiedades de figuras curvas generales corresponden, más bien que a la Geometría, al Análisis de funciones que se esboza en el capítulo siguiente. Sin embargo hay algunas curvas que, por tradición, forman parte de la Geometría; entre ellas, ninguna con más razón que la circunferencia.

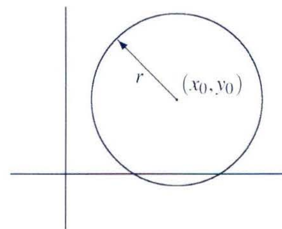


Figura 3.28: Centro y radio de una circunferencia.

CIRCUNFERENCIA

3.20

Una **circunferencia** *es el conjunto de los puntos del plano que están a una distancia fija —llamada* **radio**— *de un determinado punto: el* **centro**.

Según ello, una circunferencia queda identificada por su centro, que será un punto de coordenadas (x_0, y_0), y su radio r. Para que un punto, de coordenadas (x, y), pertenezca a la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r, debe cumplirse la condición

$$\text{distancia de } (x,y) \text{ a } (x_0,y_0) = r$$

es decir, de acuerdo con la fórmula para la distancia entre dos puntos,

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r$$

que, elevada la cuadrado, da lugar a la ecuación de la circunferencia.

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

3.21

La **ecuación de la circunferencia** *de centro (x_0, y_0) y radio r es*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2.$$

EJEMPLO 3.20 La ecuación de la circunferencia de centro $(2, -1)$ y radio 3 es:

$$(x-2)^2+(y+1)^2 = 9.$$

EJEMPLO 3.21 Si se conoce el centro de una circunferencia y un punto por el que pasa es posible encontrar la ecuación de la circunferencia, calculando previamente el radio como la distancia del punto al centro. Por ejemplo, la circunferencia de centro $C(-3, 2)$ y que pasa por el punto $A(1, -1)$ tiene radio igual a

$\overline{CA} = \sqrt{(-3-1)^2+(2+1)^2} = 5$ y, por tanto su ecuación es:

$$(x+3)^2+(y-2)^2 = 25.$$

En la ecuación de la circunferencia, al desarrollar los cuadrados resulta:

$$x^2+y^2-2x_0\,x-2y_0\,y+x_0^2+y_0^2-r^2 = 0$$

es decir

$$x^2+y^2+ax+by+c = 0$$

con $a=-2x_0$, $b=-2y_0$ y $c=x_0^2+y_0^2-r^2$. Pero no todas las ecuaciones de la forma anterior representan una circunferencia, pues es preciso que r^2 sea positivo; es decir, los números a,b y c tienen que ser tales que

$$r^2 = x_0^2+y_0^2-c = \left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c = \frac{a^2+b^2-4c}{4} > 0.$$

CENTRO Y RADIO DE UNA CIRCUNFERENCIA

En resumen:

3.22

Sean a, b y c números reales tales que $a^2+b^2-4c>0$. Entonces la ecuación de la forma

$$x^2+y^2+ax+by+c = 0$$

representa una circunferencia con:

- *Centro:* $C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$,
- *Radio:* $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$.

EJEMPLO 3.22 La ecuación $x^2+y^2-4x+2y-4=0$, representa a una circunferencia de centro

$$C\left(-\frac{-4}{2},-\frac{2}{2}\right) = (2,-1)$$

y radio

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+2^2+4\cdot 4} = 3.$$

Un círculo es la región de plano encerrada por una circunferencia; esto es:

3.23

Dada la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r, se denomina **círculo** *a la región del plano constituida por los puntos con distancia al centro menor o igual que el radio, es decir, aquellos puntos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la desigualdad*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

Es evidente que la circunferencia es una curva cerrada, y parece lógico, por tanto, que tenga una longitud determinada y encierre una determinada área. No obstante, los conceptos de longitud y de área encerrada por una curva son conceptos que, matemáticamente, entrañan gran dificultad y no pueden manejarse sólo a partir de la ideas intuitivas de adaptar un metro flexible a la curva o de medir la cantidad de pintura utilizada para colorearla.

El método general para tratar de asignar longitud a una curva, consiste en considerar todas las poligonales con vértices sobre ella y tomar como longitud, el mayor perímetro de todos estos polígonos. De manera semejante, para tratar de obtener el área de la región encerrada por una curva, se consideran todos los polígonos que la recubren y se toma el área mínima de todas ellas.

Para la circunferencia no es difícil establecer, por los procedimientos indicados, que su longitud es proporcional a su radio, mientras que el área del círculo lo es al cuadrado del radio. Quiere ello decir que el cociente entre la longitud de una circunferencia y su radio es un valor fijo (2π), independiente de la circunferencia considerada; igualmente, el cociente entre el área de un círculo y el cuadrado de su radio es una constante (π), para todos los círculos.

LONGITUD Y ÁREA DE UNA CIRCUNFERENCIA

3.24

- *La* **longitud** *de la circunferencia de radio r es* $L = 2\pi r$.
- *El* **área** *del círculo de radio r es* $A = \pi r^2$.

EJEMPLO 3.23 La circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$ tiene centro:

$$C: \left(-\frac{-2}{2}, -\frac{0}{2}\right) = (1, 0)$$

y radio

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 0 + 4 \cdot 2} = \sqrt{3}.$$

Por tanto su longitud es

$$L = 2\pi\sqrt{3} \simeq 10.88 \quad \text{unidades de longitud}$$

y el área del círculo que encierra es:

$$A = \pi\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3\pi \simeq 9.42 \quad \text{unidades de área.}$$

CUESTIONES DE AUTOEVALUACIÓN

3.1 Cualquier punto que se encuentre sobre el eje de abscisas tiene

a) tiene primera coordenada igual a 0.

b) segunda coordenada igual a 0.

c) primera coordenada distinta de 0.

3.2 Si un punto de coordenadas (x, y) verifica $x \cdot y < 0$, no puede pertenecer

a) al primer cuadrante.

b) al segundo cuadrante.

c) al cuarto cuadrante.

3.3 La distancia entre los puntos $(-1/2, 1)$ y $(1/2, -1)$ es:

a) 1.

b) $\sqrt{2}$.

c) $\sqrt{5}$.

3.4 A distancia 5 del punto $(1, -2)$ se encuentra el punto

a) $(4, -1)$.

b) $(5, -5)$.

c) $(4, 1)$.

3.5 El punto $(3, 2)$ se encuentra a igual distancia de $(1, 1)$ que del punto

a) $(3, 3)$.

b) $(1, 2)$.

c) $(5, 1)$.

3.6 El punto $(4, -1)$ pertenece a la recta:

a) $x + 3y - 8 = 0$.

b) $y + 3x + 4 = 0$.

c) $-x + 3y + 7 = 0$.

3.7 El punto $(2, -1)$:

a) no pertenece a la recta $x + 2y = 0$.

b) pertenece a la recta $2x - y - 2 = 0$.

c) no pertenece a la recta $3x + 4y + 1 = 0$.

3.8 La ecuación $2x = -1$:

a) representa una recta paralela al eje de ordenadas.

b) representa una recta paralela al eje de abscisas.

c) no es la ecuación de una recta.

3.9 La ecuación explícita de la recta que tiene como ecuación $4x + 2y - 6 = 0$ es:

a) $y = 2x - 3$.

b) $y = -2x - 3$.

c) $y = -2x + 3$.

3.10 El punto situado en la recta de ecuación $y = 4x - 3$ que tiene abscisa igual a $1/2$ es:

a) $(1/2, -5)$.

b) $(1/2, -1)$.

c) $(1/2, 1)$.

3.11 ¿Por cuál de los siguientes puntos pasa la recta $y = -x - 2$?

a) $(-1, -1)$.

b) $(2, -3)$.

c) $(0, 2)$.

3.12 La pendiente de la recta $y = 3x - 5$ es igual a:

a) 3.

b) -5.

c) $-3/5$.



3.13 La pendiente de la recta $2x + 3y - 5 = 0$ es igual a:

a) $2/3$.

b) $-3/2$.

c) $-2/3$.

3.14 La recta de ecuación explícita $y = 3x - 1$ tiene:

a) pendiente igual a $1/3$.

b) ordenada en el origen igual a $-1/3$.

c) ordenada en el origen igual a -1.

3.15 La recta de ecuación $2x - 3y - 1$ tiene:

a) pendiente igual a $3/2$.

b) ordenada en el origen igual a $-1/3$.

c) ordenada en el origen igual a $-1/2$.

3.16 ¿Cuál de las rectas siguientes tiene menor ordenada en el origen?:

a) $x + y - 1 = 0$.

b) $x - y + 1 = 0$.

c) $x - y - 1 = 0$.

3.17 La ecuación de la recta de pendiente -5 y ordenada en el origen 2 es:

a) $y = 2x - 5$.

b) $y = -5x + 2$.

c) $y = -5x - 2$.

3.18 ¿Cuál de las siguientes rectas tiene mayor ordenada en el origen?

a) $y = 1$.

b) $y = x - 4$.

c) $2x - 3y + 6 = 0$.

3.19 La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,1)$ y $(1,2)$ es:

a) $y = -x + 3$.

b) $y = x - 3$.

c) $y = -x - 2$.

3.20 La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,1)$ y $(0,4)$ es:

a) $y = x - 2$.

b) $x = 0$.

c) $y = 3 - x$.

3.21 La recta que pasa por los puntos $(-1,2)$ y $(2,3)$ tiene pendiente igual a:

a) 1/3.

b) 1.

c) 7/3.

3.22 La recta que pasa por los puntos $(2,-3)$ y $(-2,0)$ tiene ordenada en el origen igual a:

a) $-3/4$.

b) $-3/2$.

c) -1.

3.23 ¿Cuál de los siguientes puntos está alineado con los puntos de coordenadas $(0,2)$ y $(-3,1)$?

a) $(-2,-1)$.

b) $(6,4)$.

c) $(-4,0)$.

3.24 ¿Cuál de los siguientes puntos no está alineado con los puntos de coordenadas $(2,-1)$ y $(1,2)$?

a) $(-1,8)$.

b) $(3,-4)$.

c) $(-2,5)$.

3.25 El punto que tiene abscisa -1 y está alineado con los puntos $(-3,1)$ y $(0,-2)$, tiene ordenada

a) -1.

b) 2.

c) 1.

3.26 El punto de coordenadas $(1,1)$ está alineado con los puntos:

a) $(3,1)$ y $(0,-2)$.

b) $(2,1)$ y $(-1,-1)$.

c) $(3,0)$ y $(5,-1)$.

3.27 Las rectas de ecuaciones $x+y=2$ y $x+2y=2$ se cortan en un punto de:

a) abscisa igual a 0.

b) abscisa igual a 2.

c) ordenada igual a 2.

3.28 Las rectas de ecuaciones $x+2y=1$ y $2x+4y=2$, son:

a) Coincidentes.

b) Paralelas y distintas.

c) Tienen un único punto de intersección.

3.29 Las rectas de ecuaciones $2x-3y=1$ y $-6x+9y=5$, son:

a) Coincidentes.

b) Paralelas y distintas.

c) Tienen un único punto de intersección.

3.30 La recta que pasa por los puntos $(-2,1)$ y $(1,3)$, y la recta que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(2,1)$:

a) Son coincidentes.

b) Son paralelas y distintas.

c) Tienen un único punto de intersección.

3.31 La recta que pasa por los puntos $(-1,2)$ y $(2,3)$, y la recta que pasa por los puntos $(-2,3)$ y $(1,4)$:

a) Son coincidentes.

b) Son paralelas y distintas.

c) Tienen un único punto de intersección.

3.32 La paralela a la recta $y=-2x+1$ por el punto $(4,-1)$ tiene por ecuación:

a) $y=-2x+7$.

b) $y=-2x-3$.

c) $2x-y=9$.

3.33 La paralela a la recta $x-y+5=0$ por el punto $(-2,1)$ pasa por el punto:

a) $(-1,2)$.

b) $(-3,-1)$.

c) $(0,-2)$.

3.34 La paralela a la recta $y=-1$ por el punto $(4,2)$ tiene por ecuación:

a) $y=4$.

b) $y=2$.

c) $y=-2$.

3.35 ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta $y=-2x$?

a) $y=2x$.

b) $x+2y=0$.

c) $y=\frac{1}{2}x$.

3.36 ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta $y=3$?

a) $y=-1$.

b) $x=0$.

c) $y=\frac{1}{2}x-2$.

3.37 ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta $2x-3y=0$?

a) $3x-2y=0$.

b) $y=\frac{1}{2}x+1$.

c) $2y+3x-4=0$.

3.38 Una recta perpendicular a una perpendicular de la recta r es:

a) Paralela a r.

b) Perpendicular a r.

c) Coincidente con r.

3.39 Una recta paralela a una paralela a la recta r es:

a) Paralela a r.

b) Perpendicular a r.

c) Coincidente con r.

3.40 La perpendicular a la recta $y=-\frac{3}{4}x+1$ por el punto $(-1,-2)$ tiene por ecuación:

a) $y=\frac{4}{3}x+4$.

b) $y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$.

c) $y=-\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$.

3.41 Las rectas de ecuaciones $2x=3y+1$ e $3y+2x-2=0$ son:

a) Paralelas.

b) Perpendiculares.

c) No son ni paralelas ni perpendiculares.

3.42 La recta que pasa por los puntos $(-2,-1)$, $(-1,1)$ y la recta que pasa por los puntos $(1,1)$, $(2,3)$, son:

a) Perpendiculares.

b) Paralelas.

c) No son ni paralelas ni perpendiculares.

3.43 La perpendicular a la recta $x-5y-3=0$ por el punto $(0,-1)$ pasa por el punto:

a) $(1,-5)$.

b) $(-1,4)$.

c) $(-2,8)$.

3.44 La recta $2y+x-1=0$ y su perpendicular por el punto $(-1,2)$ se cortan en un punto de ordenada igual a:

a) $7/5$.

b) $6/5$.

c) $-7/5$.

3.45 La perpendicular al eje de ordenadas por el punto $(1,3)$ corta a la recta $2x+3y-1=0$ en el punto:

a) $(-2,1)$

b) $(1,-\frac{1}{3})$

c) $(-4,3)$

3.46 El perímetro de un polígono es:

a) el número de lados que lo componen.

b) la suma de las longitudes de los lados que lo componen.

c) la longitud del lado mayor.

3.47 El perímetro del cuadrilátero formado por los puntos $A(0,3)$, $B(4,0)$, $C(0,-3)$, $D(-4,0)$, es:

a) $6\sqrt{3}$

b) $8\sqrt{2}$

c) 20

3.48 El área de un paralelogramo es igual al producto de:

a) su base por su altura.

b) su base por su altura dividido por dos.

c) las longitudes de dos lados paralelos.

3.49 El área de un triángulo es igual al producto de:

a) su base por su altura.

b) su base por su altura dividido por dos.

c) las longitudes de dos lados paralelos.

3.50 El área de un rectángulo es igual al producto de:

a) las longitudes de sus lados.

b) las longitudes de dos lados perpendiculares.

c) las longitudes de dos lados paralelos.

3.51 La altura del triángulo de vértices $A(0,-1)$, $B(-1,6)$ y $C(-3,1)$, perpendicular por A al lado BC, tiene por ecuación

a) $2y-3x-12=0$.

b) $2y-5x+4=0$.

c) $5y+2x+5=0$.

3.52 La longitud de la altura del triángulo de vértices $A(1,2)$, $B(2,-3)$ y $C(4,0)$, perpendicular al lado AB es:

a) $\sqrt{13}/2$.

b) $\sqrt{26}/2$.

c) $\sqrt{15}/2$.

3.53 El triángulo de vértices $(-3,0)$, $(4,0)$ y $(0,5)$ tiene área igual a

a) 10.

b) 12.5

c) 17.5.

3.54 El cuadrilátero de vértices $A(2,2)$, $B(5,3)$, $C(2,5)$ y $D(1,4)$ tiene área

a) $15/2$.

b) 6.

c) 15.

3.55 La ecuación de la circunferencia de radio 2 y centro $(1,2)$ es:

a) $x^2+y^2-2x-4y+1=0$.

b) $(x-2)^2+(y-1)^2=4$.

c) $(x-1)^2+(y-2)^2=2$.

3.56 La circunferencia de radio $\sqrt{2}$ y centro $(-2,3)$ pasa por el punto

a) $(-2,4)$.

b) $(-3,4)$.

c) $(-1,3)$.

3.57 Si C es la circunferencia de centro $(-1,2)$ y radio 2, el punto $(0,-1)$ está:

a) fuera de C.

b) sobre C.

c) dentro de C.

3.58 La ecuación $(x+1)^2+(y-1)^2=3$ corresponde a la circunferencia

a) de centro $(-1,1)$ y radio 3.

b) de centro $(1,-1)$ y radio $\sqrt{3}$.

c) de centro $(-1,1)$ y radio $\sqrt{3}$.

3.59 La ecuación $x^2+y^2+4x-2y=0$ representa una circunferencia

a) de centro $(-2,1)$ y radio 0.

b) de centro $(-2,1)$ y radio $\sqrt{5}$.

c) de centro $(2,-1)$ y radio 2.

3.60 La ecuación $x^2+y^2+6x+4y=3$ representa una circunferencia cuyo perímetro, aproximado hasta la centésima, es:

a) 12.56.

b) 25.13.

c) 19.73.

SOLUCIONES DE LAS CUESTIONES DE AUTOEVALUACIÓN

3.1 *Respuesta correcta: b*

Los puntos del eje de abscisas tiene por coordenadas $(x,0)$. Su segunda coordenada siempre es 0. La primera coordenada x puede ser igual a 0 ó no. Si $x=0$, el punto es el origen de coordenadas.

3.2 *Respuesta correcta: a*

La condición $x \cdot y < 0$ indica que las dos coordenadas son de signo contrario, propiedad que sólo tienen los puntos del segundo y cuarto cuadrantes, luego no puede pertenecer al primer cuadrante.

3.3 *Respuesta correcta: c*

La distancia entre ambos puntos es

$$\sqrt{(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

3.4 *Respuesta correcta: b*

El punto $(4,-1)$ está a distancia

$$\sqrt{(4-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{10}$$

y el punto $(4,1)$ a distancia

$$\sqrt{(4-1)^2+(1+2)^2}=3\sqrt{2};$$

pero la distancia a $(5,-5)$ es $\sqrt{(5-1)^2+(-5+2)^2}=5$.

3.5 *Respuesta correcta: c*

El punto $(3,2)$ se encuentra a distancia

$$\sqrt{(1-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$$

del punto $(1,1)$. Por otra parte, el punto $(3,2)$ está a distancia

$$\sqrt{(3-3)^2+(3-2)^2}=1$$

de $(3,3)$, a distancia

$$\sqrt{(1-3)^2+(2-2)^2}=2$$

de $(1,2)$ y a distancia

$$\sqrt{(5-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$$

de $(5,1)$, luego $(3,2)$ está a igual distancia de $(5,1)$ que de $(1,1)$.

3.6 *Respuesta correcta: c*

Puesto que $4+3(-1)-8=-7\neq 0$, no pertenece a la recta (a). Puesto que $-1+3\cdot 4+4=15\neq 0$, tampoco pertenece a la recta (b). Dado que $-4+3(-1)+7=0$, pertenece a la recta (c).

3.7 *Respuesta correcta: c*

Se cumple $2+2(-1)=0$, luego pertenece a la recta $x+2y=0$. Se cumple $2(2)-(-1)-2=1\neq 0$, luego no pertenece a la recta $2x-y-2=0$. Se cumple $3(2)+4(-1)+1=3\neq 0$ y no pertenece a la recta $3x+4y+1=0$.

3.8 *Respuesta correcta: a*

Es la ecuación de una recta porque es de la forma $Ax+By+C=0$, con $A=2$, $B=0$ y $C=1$. Todos los puntos de la recta de ecuación $2x=-1$ tienen la misma abscisa, $x=-1/2$, luego es una recta vertical, paralela al eje de ordenadas.

3.9 *Respuesta correcta: c*

Si despejamos la variable y en la ecuación $4x+2y-6=0$, resulta $2y=-4x+6$, o bien $y=-2x+3$, que es la ecuación explícita de la recta.

3.10 *Respuesta correcta: b*

Si el punto está en la recta y $x=1/2$, entonces $y=4(1/2)-3=2-3=-1$, luego es $(1/2,-1)$.

3.11 *Respuesta correcta: a*

Para $x=-1$ la ecuación proporciona $y=-1$; en cambio para $x=2$ se obtiene $y=-4$ y, para $x=0$, resulta

$y = -2$. Sólo el primer punto se encuentra sobre la recta.

3.12 *Respuesta correcta: a*

La pendiente de una recta dada por su ecuación explícita $y = ax + b$ es igual al coeficiente a, luego la pendiente de la recta $y = 3x - 5$ es 3.

3.13 *Respuesta correcta: c*

La ecuación explícita de la recta es $y = -2/3x + 5/3$, luego su pendiente es $a = -2/3$.

3.14 *Respuesta correcta: c*

La pendiente de la recta es 3 y la ordenada en el origen es -1. La única afirmación cierta es (c).

3.15 *Respuesta correcta: b*

La ecuación explícita de la recta es $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$, luego su pendiente $2/3$ y su ordenada en el origen es $-1/3$. La única afirmación cierta es (b).

3.16 *Respuesta correcta: c*

La ecuación explícita de la recta (a) es $y = -x + 1$, luego su ordenada en el origen es 1. La ecuación explícita de la recta (b) es $y = x + 1$, luego su ordenada en el origen es 1. La ecuación explícita de la recta (c) es $y = x - 1$, luego su ordenada en el origen es -1. La ordenada menor es la de la recta (c).

3.17 *Respuesta correcta: b*

La recta (a) tiene pendiente 2 y ordenada en el origen -5; mientras que la recta (c) tiene pendiente -5 pero su ordenada en el origen es -2.

3.18 *Respuesta correcta: c*

La recta (a) pasa por el $(0,1)$ y su ordenada en el origen es 1. La recta (b) está en forma explícita y, de manera inmediata, se tiene que su ordenada en el origen es -4. La ecuación explícita de la recta (c) es $y = \frac{2}{3}x + 2$, luego su ordenada en el origen es 2. Puesto que $-4 < 1 < 2$, la mayor ordenada es la de la recta (c).

3.19 *Respuesta correcta: a*

La recta que pasa por $(2,1)$ y $(1,2)$ tiene ecuación

$$y = \frac{2-1}{1-2}(x-2) + 1$$

es decir $y = -(x-2) + 1 = -x + 2 + 1 = -x + 3$.

3.20 *Respuesta correcta: b*

Los dos puntos tienen abscisas iguales a 0, luego la recta tiene ecuación $x = 0$.

3.21 *Respuesta correcta: a*

La recta que pasa por los puntos $(-1,2)$ y $(2,3)$ tiene ecuación

$$y = \frac{3-2}{2-(-1)}(x-(-1)) + 2$$

es decir $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, luego tiene pendiente $1/3$.

3.22 *Respuesta correcta: b*

La recta que pasa por los puntos $(2,-3)$ y $(-2,0)$ tiene por ecuación

$$y = \frac{0-(-3)}{(-2)-2)}(x-2) - 3$$

es decir $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$, y su ordenada en el origen es $-3/2$.

3.23 *Respuesta correcta: b*

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,2)$ y $(-3,1)$ es $y = \frac{1}{3}x + 2$, que pasa por el punto (6,4) pero no pasa por el punto $(-2,-1)$ ni por el punto $(-4,0)$.

3.24 *Respuesta correcta: c*

La recta que pasa por los puntos $(2,-1)$ y $(1,2)$ tiene por ecuación $y = -3x + 5$ y pasa por los puntos $(-1,8)$ y $(3,-4)$, pero no por el punto $(-2,5)$.

3.25 *Respuesta correcta: a*

La recta que pasa por los puntos $(-3,1)$ y $(0,-2)$ tiene por ecuación $y = -x - 2$. Si $x = -1$, el valor de la ordenada es $y = -(-1) - 2 = -1$.

3.26 *Respuesta correcta: c*

El punto $(1,1)$ no está alineado con los puntos $(2,1)$ y $(-1,-1)$, ya que se tiene

$$\frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1 \neq \frac{1-(-1)}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$$

El punto $(1,1)$ tampoco está alineado con los puntos $(3,1)$ y $(0,-2)$, ya que se tiene

$$\frac{1-(-2)}{1-0} = 3 \neq \frac{1-(-2)}{3-0} = 1$$

El punto $(1,1)$ sí está alineado con los puntos $(3,0)$ y $(5,-1)$, ya que se cumple

$$\frac{1-5}{1-(-1)} = -2 = \frac{0-(-1)}{3-5}$$

3.27 *Respuesta correcta: b*

Las rectas se cortan en el punto solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $x = 2$ e $y = 0$, luego se cortan en el punto $(2,0)$, que tiene abscisa igual a 2.

3.28 *Respuesta correcta: a*

Las rectas cumplen la condición de paralelismo $AB' - A'B = 0$, ya que $1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$. Además son coincidentes, es decir, son la misma recta ya que si se divide por 2 la segunda ecuación es igual a la primera, luego todos sus puntos son comunes y el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones.

3.29 *Respuesta correcta: b*

Las rectas cumplen la condición de paralelismo $AB' - A'B = 0$, ya que $2 \cdot 9 - (-3) \cdot (-6) = 0$. Pero no son coincidentes, ya que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -6x + 9y = 5 \end{cases}$$

no tiene soluciones. Observemos que si multiplicamos por 3 la primera ecuación y la sumamos a la segunda, resulta $0 = 8$, que es imposible.

3.30 *Respuesta correcta: c*

La recta que pasa por los puntos $(-2,1)$ y $(1,3)$ tiene ecuación $2x - 3y + 7 = 0$. La recta que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(2,1)$ tiene ecuación $x - 3y + 1 = 0$. No se cumple la condición de paralelismo, ya que

$$\frac{A}{A'} = \frac{1}{2} \neq \frac{-3}{-3} = \frac{B}{B'}$$

luego las rectas se cortan en un único punto que tiene coordenadas $(-6, -5/3)$.

3.31 *Respuesta correcta: b*

La recta que pasa por los puntos $(-1,2)$ y $(2,3)$ tiene ecuación $x - 3y + 7 = 0$. La recta que pasa por los puntos $(-2,3)$ y $(1,4)$ tiene ecuación $x - 3y + 11 = 0$. Sí se cumple la condición de paralelismo, ya que

$$\frac{A}{A'} = \frac{1}{1} = \frac{-3}{-3} = \frac{B}{B'}$$

Además, las rectas son distintas ya que no se cortan en ningún punto, puesto que el sistema

$$\begin{cases} x - 3y = -7 \\ x - 3y = -11 \end{cases}$$

no tiene soluciones.

3.32 *Respuesta correcta: a*

La ecuación de la recta paralela a $y = -2x + 1$ por el punto $(4,-1)$ es

$$y - (-1) = -2(x - 4)$$

es decir $y + 1 = -2x + 8$ o bien $y = -2x + 7$.

3.33 *Respuesta correcta: a*

La ecuación explícita de la recta $x - y + 5 = 0$ es $y = x + 5$. La ecuación de la recta paralela a $y = x + 5$ que pasa por el punto $(-2,1)$ es

$$y - 1 = x - (-2)$$

o bien $y = x + 3$, esta recta pasa por $(-1,2)$, pero no pasa por los puntos $(-3,-1)$ ni $(0,-2)$.

3.34 *Respuesta correcta: b*

La recta $y = -1$ tiene pendiente igual a 0, es una recta horizontal, paralela al eje de abscisas. La ecuación de su paralela por el punto $(4,2)$ es

$$y - 2 = 0(x - 4)$$

es decir $y = 2$.

3.35 *Respuesta correcta: c*

La pendiente de la recta $y = -2x + 3$ es -2, luego cualquier recta perpendicular tiene pendiente $1/2$. La recta (c) verifica tal condición, mientras que (a) tiene pendiente 2 y (b) pendiente $-1/2$.

3.36 *Respuesta correcta: b*

La recta $y = 3$ es horizontal, paralela al eje de abscisas. Cualquier recta perpendicular debe ser vertical, paralela al eje de ordenada, y tener una ecuación de la forma $x = k$. La única de las tres rectas que tiene esa forma es (b).

3.37 *Respuesta correcta: c*

La recta $2x - 3y - 1 = 0$ tiene pendiente 2/3, de forma que sus perpendiculares tienen pendiente $-3/2$. Por tanto (a) no es perpendicular a la recta dada, ya que tiene pendiente $3/2$, (b) tampoco, puesto que tiene pendiente $1/2$, mientras que (c) si es perpendicular, puesto que tiene pendiente $-3/2$.

3.38 *Respuesta correcta: a*

Si r tiene pendiente a, todas sus perpendiculares tienen pendiente $-1/a$, luego una perpendicular a alguna de sus perpendiculares tiene pendiente

$$-\frac{1}{-1/a} = a$$

igual a la pendiente de r, luego es paralela a r.

3.39 *Respuesta correcta: a*

Si r tiene pendiente a, todas sus paralelas tienen pendiente a, y cualquier paralela a una paralela también tiene pendiente a y es paralela a r. Sin embargo, una paralela a una paralela a r no tiene porqué coincidir con r, ya que hay infinitas paralelas a r distintas.

3.40 *Respuesta correcta: b*

Cualquier recta perpendicular a la recta dada tiene pendiente $4/3$. La ecuación de la perpendicular que pasa por el punto $(-1, -2)$ es

$$y + 2 = \frac{4}{3}(x + 1)$$

o bien $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$.

3.41 *Respuesta correcta: c*

La pendiente de la recta $2x = 3y + 1$ es igual a $2/3$, la pendiente de la recta $3y + 2x - 2 = 0$ es igual a $-2/3$; luego no son paralelas ni perpendiculares.

3.42 *Respuesta correcta: b*

La recta que pasa por los puntos $(-2, -1)$, $(-1, 1)$ tiene ecuación explícita $y = 2x + 3$. La recta que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 3)$ tiene ecuación explícita $y = 2x - 1$; ambas tienen la misma pendiente y son paralelas.

3.43 *Respuesta correcta: b*

La perpendicular por el punto $(0, -1)$ tiene ecuación $5x + y + 1 = 0$ y pasa por el punto $(-1, 4)$.

3.44 *Respuesta correcta: b*

La perpendicular por el punto $(-1, 2)$ tiene como ecuación explícita $y = 2x + 4$ y ambas rectas se cortan en el punto de coordenadas $(-7/5, 6/5)$.

3.45 *Respuesta correcta: c*

Cualquier perpendicular al eje de ordenadas es paralela al eje de abscisas, luego tiene una ecuación de la forma $y = c$. Para que pase por el punto $(1, 3)$, debe ser $c = 3$. La recta $y = 3$ corta a la recta $2x + 3y - 1 = 0$ en el punto solución del sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & 3 & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

que es $(-4, 3)$.

3.46 *Respuesta correcta: b*

El perímetro de un polígono es la longitud total del contorno; por consiguiente es la suma de las longitudes de los lados que lo componen.

3.47 *Respuesta correcta: c*

La longitud de cada lado es la misma. Por ejemplo

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

y

$$\overline{BC} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

El perímetro es igual a $5+5+5+5=20$.

3.48 *Respuesta correcta: a*

El área de un paralelogramo es igual al producto de su base por su altura, $A = b \times h$.

3.49 *Respuesta correcta: b*

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura, $A = \frac{b\times h}{2}$.

3.50 *Respuesta correcta: b*

El área de un rectángulo es igual al producto de las longitudes de dos lados perpendiculares, $A = a \times b$.

3.51 *Respuesta correcta: c*

La recta BC tiene por ecuación $y = \frac{5}{2}x + \frac{17}{2}$, de pendiente $5/2$, luego la perpendicular tiene pendiente $-2/5$ y, si pasa por A, su ecuación es $5y+2x+5=0$.

3.52 *Respuesta correcta: b*

El lado AB está sobre la recta de ecuación $y=-5x+7$. La perpendicular a AB por el vértice C tiene ecuación $y = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$; esta recta corta al lado AB en el punto H de coordenadas $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$; luego la longitud de la altura es $\overline{CH} = \sqrt{(5/2)^2+(1/2)^2} = \sqrt{26}/2$.

3.53 *Respuesta correcta: c*

Tomemos como base la base constituida por el segmento $(-3,0)$, $(4,0)$, este lado está sobre el eje de abscisas y tiene longitud 7. La altura desde el vértice $(0,5)$ hasta la base mide, evidentemente, 5. Luego el área es $\frac{1}{2}7\times 5 = 17.5$.

3.54 *Respuesta correcta: b*

La diagonal AC, de ecuación $x=2$, divide el cuadrilátero en dos triángulos cuya base tiene longitud $\overline{AC} = \sqrt{0^2+3^2} = 3$.

La perpendicular a AC por B es $y=3$, que corta a AC en $H(2,3)$; la altura del triángulo ABC es pues $\overline{BH} = \sqrt{3^2+0^2} = 3$ y su área $3\cdot 3/2 = 9/2$.

La perpendicular a AC por D es $y=4$, que corta a AC en $H'(2,4)$; la altura del triángulo ADC mide $\overline{DH'} = 1$ y su área $\frac{1}{2}3\cdot 1 = 3/2$. En definitiva el área del cuadrilátero es $\frac{3}{2}+\frac{9}{2} = 6$.

3.55 *Respuesta correcta: a*

La ecuación de la circunferencia es $(x-1)^2+(y-2)^2 = 2^2$. Si se desarrolla, resulta

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4=4$$

o bien $x^2+y^2-2x-4y+1=0$.

3.56 *Respuesta correcta: b*

La ecuación de la circunferencia es $(x+2)^2+(y-3)^2=2$. Para el primer punto se tiene $0+1=1\neq 2$, y no pertenece a la circunferencia. Para el segundo punto, se tiene $1+1=2$, luego pertenece a la circunferencia. Para el tercer punto, se tiene $1+0=1\neq 2$, luego no pertenece a la circunferencia.

3.57 *Respuesta correcta: a*

La ecuación de la circunferencia es $(x+1)^2+(y-2)^2=4$. Como es $(0+1)^2+(-1-2)^2=10>4$, la distancia del punto $(0,-1)$ al centro es mayor que el radio, y el punto está fuera de la circunferencia.

3.58 *Respuesta correcta: c*

La ecuación expresa que el cuadrado de la distancia de (x,y) al punto $(-1,1)$ es igual a 3, luego es una circunferencia de centro $(-1,1)$ y radio $\sqrt{3}$.

3.59 *Respuesta correcta: b*

Para calcular las coordenadas del centro y el radio, escribiremos la circunferencia de la forma

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Observemos que la ecuación se puede escribir

$$x^2+4x+4-4+y^2-2y+1-1=0$$

o bien $(x+2)^2+(y-1)^2-5=0$, es decir

$$(x+2)^2+(y-1)^2=5$$

luego tiene centro $(-2,1)$ y radio $\sqrt{5}$.

3.60 *Respuesta correcta: b*

La ecuación equivale a $(x+3)^2+(y+2)^2=16$, de modo que corresponde a una circunferencia de centro $(-3,-2)$ y radio 4. Su longitud es $2\pi r = 8\pi \approx 25.13$.

TEMAS COMPLEMENTARIOS

3.4 ÁNGULOS Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ocupación principal de la Geometría lo constituyen los ángulos y sus características, a cuyo estudio se dedica esta sección. Para empezar, la noción de ángulo es muy intuitiva:

ÁNGULO

3.25 *Si a partir de un punto A se trazan dos semirrectas, la región α del plano comprendida entre ellas es el* **ángulo** *que forman ambas semirrectas. El punto A se denomina el* **vértice** *del ángulo y las dos semirrectas son sus* **lados**.

Por ejemplo, un triángulo cualquiera ABC, como el de la figura 3.30, define tres ángulos internos, α, β y γ, asociados uno a cada vértice.

La relación de igualdad entre ángulos juega un papel importante en la geometría intrínseca griega, principalmente como procedimiento para establecer la igualdad de triángulos. En concreto, los Elementos de Euclides enuncian los *tres casos de igualdad de triángulos*:

IGUALDAD DE TRIÁNGULOS

3.26 *Dos triángulos son iguales si tienen:*

1. *Los tres lados iguales,*
2. *Dos lados iguales e igual ángulo comprendido entre ellos,*
3. *Un lado igual y los dos ángulos adyacentes iguales.*

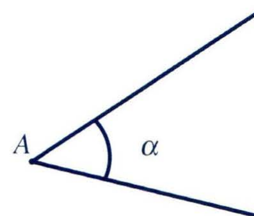


Figura 3.29: Un ángulo α con vértice en A.

Entre otras muchas cosas, los griegos diseñaron una construcción geométrica de la **bisectriz** de un ángulo —la semirrecta que lo divide en dos partes iguales. Sin embargo, fracasaron frente al problema de la *trisección* de un ángulo porque, como se demostró mucho tiempo después, es imposible construir dos semirrectas que dividan un ángulo en tres partes iguales, mediante el uso exclusivo *de la regla y el compás*, como exigían las técnicas intrínsecas propugnadas por la geometría griega.

Por cierto, tampoco tuvieron éxito con el problema de la *cuadratura del círculo*: construir, con regla y compás, un cuadrado que tenga el mismo área que un círculo dado; es decir, si se toma el radio del círculo como unidad de medida, construir un cuadrado de lado $\sqrt{\pi}$.

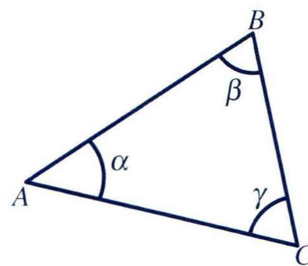


Figura 3.30: Los tres ángulos de un triángulo.

La preocupación por la trisección del ángulo pone de relieve que, en geometría, los griegos rehuían de modo consciente el problema de la *medida* de los ángulos, que otras escuelas más pragmáticas —como los astrónomos de Mesopotamia— no habían tenido reparos en utilizar. Seguramente por ello, ha llegado hasta nosotros la tradición de medir los ángulos en el

sistema de numeración sexadecimal (de base 60) común en tales civilizaciones.

3.4.1 MEDIDA DE ÁNGULOS

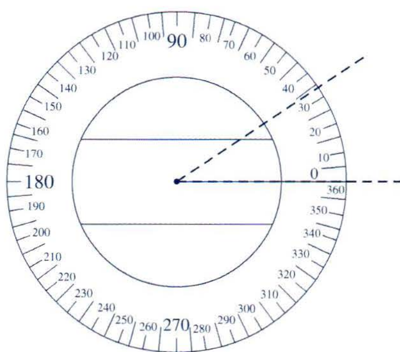


Figura 3.31: Transportador de ángulos.

Resulta natural que, para medir un ángulo, hay que disponer de una regla circular, denominada un **transportador de ángulos**, graduada en ciertas unidades, como la de la figura 3.31.

En la práctica, la circunferencia se divide en 360 *grados sexagesimales* (360°), cada uno de los cuales se subdivide en 60 *minutos de arco* (60') y estos a su vez en 60 *segundos de arco* (60"). De esta forma, un ángulo recto —la cuarta parte de la circunferencia— mide 90° y al ángulo llano —el que forman las dos semirrectas en que cualquier punto divide a una recta— se le atribuye una medida de 180°. Para medir cualquier ángulo, se sitúa el centro del transportador sobre el vértice, se ajusta el radio señalado como origen al primer lado del ángulo, y se lee la graduación que marca el otro lado del ángulo. Por ejemplo, en la figura 3.31 debería leerse 33.69°, si la escala fuese suficientemente precisa; es decir, 33° 41' 24" (pues $0.69 \cdot 60 = 41.4$ y $0.4 \cdot 60 = 24$).

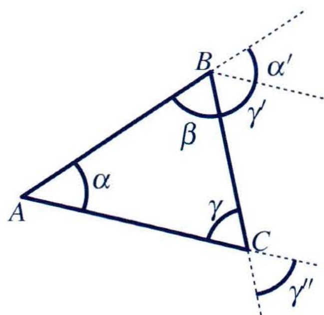


Figura 3.32: La suma de los ángulos de un triángulo.

Es bien sabido que *los tres ángulos de un triángulo suman 180°*. Pero el razonamiento más sencillo para comprobarlo es un razonamiento intrínseco, (ver figura 3.32). Consiste en prolongar uno de los lados del triángulo —por ejemplo AB— y trazar por B la paralela al tercer lado AC. Los ángulos α y α' son iguales por ser sus lados paralelos. Por la misma razón, son iguales γ' y γ'' y, a su vez, γ y γ'' son iguales por ser opuestos por el vértice (los lados de uno de ellos son prolongación de los lados del otro). En resumen, $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta + \gamma'$ y estos tres últimos componen el ángulo llano que forma el lado AB con su prolongación.

Grados	Radianes	Aprox.
30°	$\pi/6$	0.5236
45°	$\pi/4$	0.7854
60°	$\pi/3$	1.0472
90°	$\pi/2$	1.5708
180°	π	3.1416

Tabla 3.1: Algunas equivalencias entre grados sexagesimales y radianes.

La escala en grados sexagesimales habitual no es la más adecuada desde el punto de vista científico. Existen importantes ventajas matemáticas en utilizar una escala en la que la medida de un ángulo coincida con la longitud del arco que determina sobre la circunferencia de radio 1. Dicha unidad de medida se denomina **radián** y todas las calculadoras científicas cuentan con una tecla para indicar si la medida de un ángulo se especifica en grados o en radianes.

Dado que la longitud de la circunferencia de radio 1 es 2π, la equivalencia entre grados y radianes es fácil de establecer: 2π radianes equivalen a 360°, luego 1 radián mide $\frac{360}{2\pi} \simeq 57.296°$. Más en general,

$$x \text{ radianes} = \frac{360 \cdot x}{2\pi} \text{ grados} \qquad \text{y} \qquad \alpha \text{ grados} = \frac{2\pi \cdot \alpha}{360} \text{ radianes.}$$

El transportador de la figura 3.31 podría graduarse en radianes, en vez de en grados, con una escala con divisiones de 0.1 en 0.1 radianes y que tuviese además marcados diversos ángulos de uso frecuente como los que figuran en la Tabla 3.1, en la que aparece su expresión en grados y en radianes respectivamente, junto con la aproximación decimal de este último valor.

Existe una manera de indicar la medida de un ángulo que resulta familiar para los conductores. Cuando una carretera inicia una pendiente pronunciada, suele aparecer una señal de peligro en la que figura un porcentaje: 6 %, por ejemplo. Tal indicación informa de que la ruta asciende o desciende 6 metros en cada 100 metros recorridos por el vehículo. Esto identifica el ángulo que formaría la carretera, si fuese rectilínea, con el plano horizontal; la manera de hacerlo corresponde a conceptos que se estudian en el apartado sobre razones trigonométricas.

3.4.2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Dado un ángulo α, si por diversos puntos $B, C\ldots$ de un lado se trazan perpendiculares al lado contrario, el teorema de Thales indica la proporcionalidad de los lados de los triángulos formados:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \qquad \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} \qquad \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC'}}$$

Los valores comunes de tales cocientes, independientes de la posición de las rectas BB' y CC', son características asociadas al ángulo α. Definen las razones trigonométricas: **coseno**, **seno** y **tangente** que se representan respectivamente por $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS 3.27

En cualquier triángulo rectángulo ABB' formado con el ángulo α, es:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}}$$

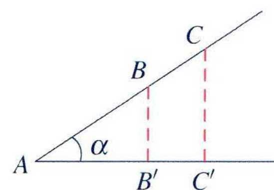


Figura 3.33: Proporcionalidad de los

EJEMPLO 3.24 En un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden $a = 3$ y $b = 4$ cm., la hipotenusa mide $h = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm. El ángulo α adyacente al cateto a verifica

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} = 0.6, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5} = 0.8, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3} = 1.333.$$

En cambio, para el ángulo β opuesto al cateto a, se tiene

$$\cos\beta = \frac{4}{5} = 0.8, \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5} = 0.6, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4} = 0.75.$$

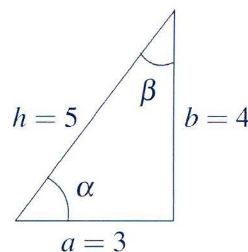


Figura 3.34: Un triángulo rectángulo.

sistema de numeración sexadecimal (de base 60) común en tales civilizaciones.

3.4.1 MEDIDA DE ÁNGULOS

Resulta natural que, para medir un ángulo, hay que disponer de una regla circular, denominada un **transportador de ángulos**, graduada en ciertas unidades, como la de la figura 3.31.

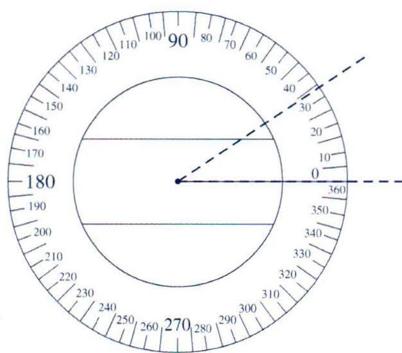


Figura 3.31: Transportador de ángulos.

En la práctica, la circunferencia se divide en 360 *grados sexagesimales* (360°), cada uno de los cuales se subdivide en 60 *minutos de arco* (60') y estos a su vez en 60 *segundos de arco* (60"). De esta forma, un ángulo recto —la cuarta parte de la circunferencia— mide 90° y al ángulo llano —el que forman las dos semirrectas en que cualquier punto divide a una recta— se le atribuye una medida de 180°. Para medir cualquier ángulo, se sitúa el centro del transportador sobre el vértice, se ajusta el radio señalado como origen al primer lado del ángulo, y se lee la graduación que marca el otro lado del ángulo. Por ejemplo, en la figura 3.31 debería leerse 33.69°, si la escala fuese suficientemente precisa; es decir, 33° 41' 24" (pues $0.69 \cdot 60 = 41.4$ y $0.4 \cdot 60 = 24$).

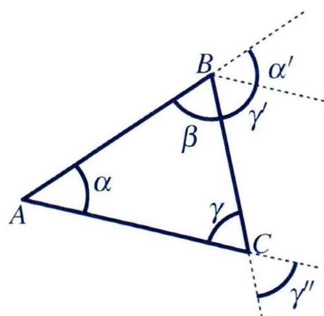


Figura 3.32: La suma de los ángulos de un triángulo.

Es bien sabido que *los tres ángulos de un triángulo suman 180°*. Pero el razonamiento más sencillo para comprobarlo es un razonamiento intrínseco, (ver figura 3.32). Consiste en prolongar uno de los lados del triángulo —por ejemplo AB— y trazar por B la paralela al tercer lado AC. Los ángulos α y α' son iguales por ser sus lados paralelos. Por la misma razón, son iguales γ' y γ'' y, a su vez, γ y γ'' son iguales por ser opuestos por el vértice (los lados de uno de ellos son prolongación de los lados del otro). En resumen, $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta + \gamma'$ y estos tres últimos componen el ángulo llano que forma el lado AB con su prolongación.

La escala en grados sexagesimales habitual no es la más adecuada desde el punto de vista científico. Existen importantes ventajas matemáticas en utilizar una escala en la que la medida de un ángulo coincida con la longitud del arco que determina sobre la circunferencia de radio 1. Dicha unidad de medida se denomina **radián** y todas las calculadoras científicas cuentan con una tecla para indicar si la medida de un ángulo se especifica en grados o en radianes.

Grados	Radianes	Aprox.
30°	$\pi/6$	0.5236
45°	$\pi/4$	0.7854
60°	$\pi/3$	1.0472
90°	$\pi/2$	1.5708
180°	π	3.1416

Tabla 3.1: Algunas equivalencias entre grados sexagesimales y radianes.

Dado que la longitud de la circunferencia de radio 1 es 2π, la equivalencia entre grados y radianes es fácil de establecer: 2π radianes equivalen a 360°, luego 1 radián mide $\dfrac{360}{2\pi} \simeq 57.296°$. Más en general,

$$x \text{ radianes} = \frac{360 \cdot x}{2\pi} \text{ grados} \qquad \text{y} \qquad \alpha \text{ grados} = \frac{2\pi \cdot \alpha}{360} \text{ radianes.}$$

El transportador de la figura 3.31 podría graduarse en radianes, en vez de en grados, con una escala con divisiones de 0.1 en 0.1 radianes y que tuviese además marcados diversos ángulos de uso frecuente como los que figuran en la Tabla 3.1, en la que aparece su expresión en grados y en radianes respectivamente, junto con la aproximación decimal de este último valor.

Existe una manera de indicar la medida de un ángulo que resulta familiar para los conductores. Cuando una carretera inicia una pendiente pronunciada, suele aparecer una señal de peligro en la que figura un porcentaje: 6%, por ejemplo. Tal indicación informa de que la ruta asciende o desciende 6 metros en cada 100 metros recorridos por el vehículo. Esto identifica el ángulo que formaría la carretera, si fuese rectilínea, con el plano horizontal; la manera de hacerlo corresponde a conceptos que se estudian en el apartado sobre razones trigonométricas.

3.4.2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Dado un ángulo α, si por diversos puntos $B, C\ldots$ de un lado se trazan perpendiculares al lado contrario, el teorema de Thales indica la proporcionalidad de los lados de los triángulos formados:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \qquad \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} \qquad \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC'}}$$

Los valores comunes de tales cocientes, independientes de la posición de las rectas BB' y CC', son características asociadas al ángulo α. Definen las razones trigonométricas: **coseno**, **seno** y **tangente** que se representan respectivamente por $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

3.27

En cualquier triángulo rectángulo ABB' formado con el ángulo α, es:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}}$$

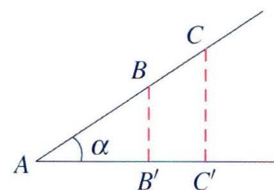


Figura 3.33: Proporcionalidad de los

EJEMPLO 3.24 En un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden $a = 3$ y $b = 4$ cm., la hipotenusa mide $h = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ cm. El ángulo α adyacente al cateto a verifica

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} = 0.6, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5} = 0.8, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3} = 1.333.$$

En cambio, para el ángulo β opuesto al cateto a, se tiene

$$\cos\beta = \frac{4}{5} = 0.8, \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5} = 0.6, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4} = 0.75.$$

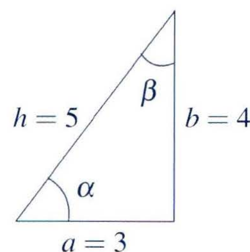


Figura 3.34: Un triángulo rectángulo.

Ángulo	Coseno	Seno	Tangente
α	$\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$90^\circ-\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
$90^\circ+\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
$180^\circ-\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$180^\circ+\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$360^\circ-\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Tabla 3.2: Relación entre las razones trigonométricas de diversos ángulos.

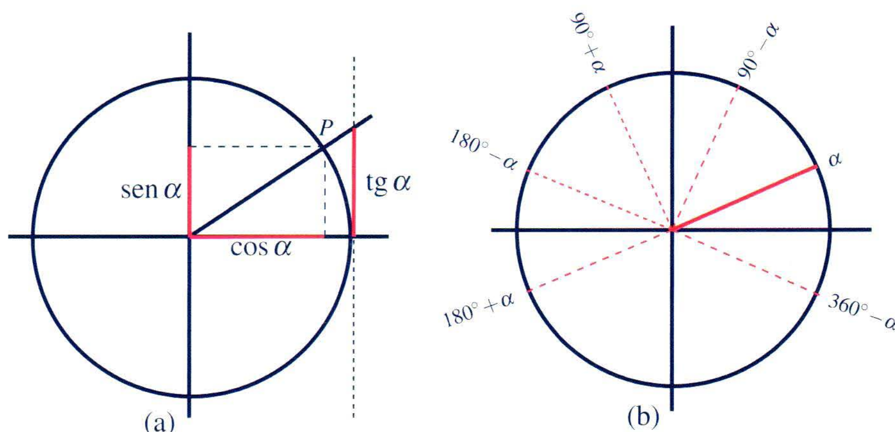


Figura 3.35: Razones trigonométricas.

Una representación adicional de las razones trigonométricas de un ángulo α consiste en situar el ángulo α con vértice en el centro de un círculo de radio 1. Las coordenadas del punto P respecto al sistema de referencia de la figura 3.35 (a) son $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Mientras que $\operatorname{tg}\alpha$ es la longitud del segmento de la recta vertical $x=1$ comprendido entre los lados del ángulo.

Sobre la figura 3.35 (a), cuando el ángulo α varía, el punto P gira sobre la circunferencia. Sus coordenadas $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ varían entre -1 y 1; pero $\operatorname{tg}\alpha$ se hace infinitamente grande cuando α se aproxima a un ángulo recto, con signo positivo si $\alpha \simeq 90^\circ$ y signo negativo si $\alpha \simeq 270^\circ$.

RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO α

Las razones trigonométricas del ángulo α están ligadas por dos relaciones evidentes:

3.28 *Se verifica*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad y \qquad (\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 = 1.$$

La primera se sigue directamente de la definición y la segunda expresa simplemente que el punto P de la figura 3.35 (a) está sobre la circunferencia de radio 1. Entre ambas establecen que, conocida una cualquiera de las tres razones trigonométricas, están determinados los valores de las otras dos. Por razones de simetría, que pueden interpretarse fácilmente sobre la figura 3.35 (a), las razones trigonométricas de diversos ángulos, que aparecen representados en la figura 3.35 (b) están relacionadas entre sí, tal como indica la Tabla 3.2.

Resulta de ello que el valor de una sola de las razones trigonométricas de un ángulo no lo identifica completamente. En concreto:

- La ecuación $\cos\alpha = x$ (donde x es un número entre -1 y 1) tiene dos soluciones, α y $360^\circ - \alpha$, que corresponden a situar el punto P en una u otra de las intersecciones de la circunferencia con la recta vertical de abscisa x. La solución de ordenada positiva está asociada a un ángulo α entre 0° y 180°, denominado $\arccos x$.

- Otro tanto ocurre con la ecuación $\operatorname{sen}\alpha = y$, cuyas dos soluciones, α y $180^\circ - \alpha$, están asociadas a las posiciones del punto P sobre la recta horizontal de ordenada $y \in [-1, 1]$. Se indica entonces $\alpha = \operatorname{arc\,sen} y$.

- Por último, la ecuación $\operatorname{tg}\alpha = z$ (donde z puede ser ahora cualquier número real), tiene también dos soluciones α y $180^\circ + \alpha$, y se escribe $\alpha = \operatorname{arc\,tg} z$.

La topografía, que estudia los relieves del terreno, utiliza con profusión la medida de ángulos, para deducir mediante las razones trigonométricas los desniveles entre diversos puntos. En las obras públicas es habitual observar a los topógrafos, dedicados a la medida de ángulos y distancias, y provistos de su teodolito, instrumento específicamente diseñado para tal fin. Más tarde, informarán al conductor de que accede a una pendiente del 7%; es decir que el ángulo que forma la carretera con la horizontal es $\alpha = \operatorname{arc\,sen} 0.07$.

Las calculadoras científicas tienen teclas para facilitar el seno (sin), el coseno (cos) y la tangente (tan) del ángulo introducido; pero no hay que olvidar precisar si el ángulo se mide en grados o en radianes. Generalmente, la pulsación de una combinación de teclas permite obtener $\arccos x$, $\operatorname{arc\,sen} x$ y $\operatorname{arc\,tg} x$, siempre que el valor de x sea adecuado.

EJEMPLO 3.25 Las razones trigonométricas tienen una gran utilidad práctica. Por ejemplo, imagínese que se desea conocer la altura h de la pirámide de Keops. Tratar de medirla con un metro resulta imposible pero, situándose a cierta distancia conocida x de la base, se puede medir el ángulo α que forman la horizontal y la recta que une la posición elegida con el vértice de la pirámide. De ahí se deduce que la altura es $h = x \operatorname{tg}\alpha$.

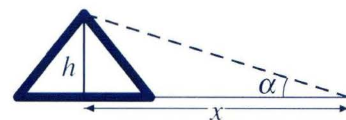


Figura 3.36: Medida de la altura de una pirámide.

3.5 GEOMETRÍA INTRÍNSECA

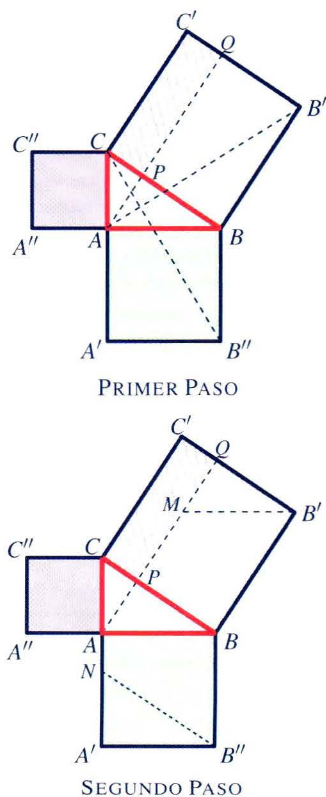


Figura 3.37: Demostración del teorema de Pitágoras.

Se incluyen en esta sección la demostración que Pitágoras dio de su teorema, así como la prueba que realizó Euclides del teorema de Thales. Tienen el interés de mostrar cómo son los razonamientos de la geometría intrínseca que, al fin y al cabo, constituyeron el nacimiento de la Matemática.

3.5.1 LA DEMOSTRACIÓN DE PITÁGORAS

El razonamiento de Pitágoras, ilustrado en la figura 3.37, es el siguiente:

Primer paso:

Se traza por A la perpendicular a BC, que divide al cuadrado $BCC'B'$ en dos rectángulos: $BPQB'$ y $CPQC'$. Si se prueba que el área del rectángulo $BPQB'$ coincide con la del cuadrado $AA'B''B$, y que el área del rectángulo $CPQC'$ coincide con la del cuadrado $AA''C''C$, el teorema estará demostrado.

Se trazan las rectas CB'' y AB'. Los triángulos ABB' y CBB'' son iguales debido a que son iguales los segmentos AB y BB'', por un lado, los segmentos BB' y CB, por otro, y los ángulos $\widehat{CBB''}$ y $\widehat{ABB'}$, por ser suma ambos de un ángulo recto y del ángulo $\widehat{B}$ del triángulo original.

Segundo paso:

Si se traza por B' la paralela a AB y por B'' la paralela a CB, formamos dos paralelogramos: $ABB'M$ y $CBB''N$, cada uno de los cuales dobla al triángulo correspondiente: ABB' y CBB''. Como ambos triángulos son iguales, los paralelogramos son iguales y tienen la misma área.

El área de $ABB'M$ coincide con la del rectángulo $BPQB'$, ya que los triángulos APB y MQB' son iguales. Análogamente, el área de $CBB''N$ coincide con la del cuadrado $ABB''A'$, puesto que los triángulos ABC y $A'B''N$ son iguales. Se obtiene pues la igualdad de las áreas del rectángulo $BPQB'$ y del cuadrado $AA'B''B$.

Un razonamiento semejante, al otro lado de la recta PQ, establece la igualdad de las áreas del rectángulo $CPQC'$ y del cuadrado $AA''C''C$, con lo que el teorema queda probado.

La demostración anterior ilustra los métodos de la geometría griega: trazar rectas, comparar triángulos, sumar y restar áreas,... Al combinar las ideas geométricas con el cálculo algebraico, como se ha hecho en la primera demostración al comienzo de este capítulo, el razonamiento requiere un esfuerzo considerablemente menor.

3.5.2 EL RAZONAMIENTO DE EUCLIDES

Respecto al teorema de Thales, la demostración que dio Euclides en sus *Elementos* supone que dos rectas paralelas BB' y CC' son cortadas por dos secantes AC y AC', como muestra la figura 3.38 (a). Los triángulos BCC' y $B'CC'$ tienen la misma base $\overline{CC'}$ y la misma altura h, puesto que BB' y CC' son paralelas. Luego sus áreas son iguales y las áreas de los triángulos ACB' y ABC', complementarios de BCC' y BCC' respecto al triángulo ABC, también son iguales:

$$\text{Área}\,(ACB') = \text{Área}\,(ABC')$$

de modo que

$$\frac{\text{Área}(ACB')}{\text{Área}(ACC')} = \frac{\text{Área}(ABC')}{\text{Área}(ACC')}.$$

Pero, como muestra la figura 3.38 (b), las áreas de ACB' y de ACC' se expresan en función de la altura h' desde C de dichos triángulos, mientras que las áreas de ABC' y ACC' pueden expresarse mediante sus alturas h'' desde C'. Con ello, la igualdad anterior se transforma en

$$\frac{\overline{AB'}\,h'/2}{\overline{AC'}\,h'/2} = \frac{\overline{AB}\,h''/2}{\overline{AC}\,h''/2} \qquad \text{es decir} \qquad \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

En particular, si se traza la altura AH desde A, como se ha hecho en la figura 3.38 (c), será también

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AH}}.$$

Ahora bien, el área del triángulo ACC' es la suma de las áreas de los triángulos ABB', BCB' y $B'CC'$; esto es

$$\overline{CC'}\cdot\overline{AH} = \overline{BB'}\cdot\overline{AI} + \overline{BB'}\cdot\overline{IH} + \overline{CC'}\cdot\overline{IH}$$

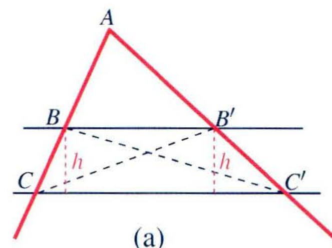
pues $\overline{IH}$ es la altura h de los triángulos BCB' y $B'CC'$. Restando el último sumando y habida cuenta que $\overline{AI}+\overline{IH}=\overline{AH}$, resulta

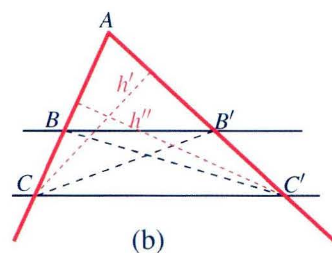
$$\overline{CC'}\cdot\overline{AI} = \overline{BB'}\cdot\overline{AH}$$

o bien

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AH}}.$$

En definitiva, el resultado establece:





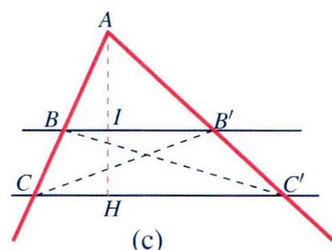


Figura 3.38: El razonamiento de Euclides.

3.29 *Si dos rectas paralelas se cortan por dos secantes, los lados de los triángulos formados son proporcionales; esto es*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}.$$

En el resultado anterior radica la razón profunda por la que las coordenadas de los puntos de una recta responden a una ecuación lineal, como la que se utilizó para definirlas en la sección 2 de este capítulo.

4

ANÁLISIS

CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

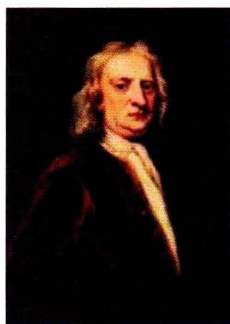
El *Análisis de funciones* es uno de los capítulos más fructíferos de la matemática, tanto por los conceptos que desarrolla, como por la ingente cantidad de aplicaciones que dichos conceptos tienen en la práctica. Conocido también como *Análisis matemático*, *Cálculo infinitesimal* o *Teoría de funciones*, comenzó a desarrollarse de la mano de Newton y Leibniz en el apogeo de la revolución científica que conmovía, a mediados del siglo XVII, los fundamentos de la Astronomía, la Física y la Química y se propagaría más tarde a las Ciencias naturales.



Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716).

Descartes había sentado, poco antes, las bases de la Geometría analítica que hacía posible la representación de una amplia variedad de curvas y la situación era propicia para abordar dos problemas matemáticos básicos: la determinación de la tangente a una curva y el cálculo del área encerrada por una curva.

Casi simultáneamente Newton y Leibniz sentaron las bases para resolver dichos problemas; a partir de ahí, los avances realizados por Jacob y Johann Bernouilli, Taylor, Euler y Lagrange, en el plazo de un siglo, dieron al Análisis matemático un auge que pocas ramas de la matemática habían conseguido nunca. Desde entonces no ha cesado su desarrollo y se ha convertido en la actividad matemática más primordial tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Paradójicamente el concepto de base de la Teoría de funciones —el propio concepto de función— no llegó a aclararse totalmente hasta principios del siglo XX y ello tras controversias, en algunos momentos muy vivas, sobre qué cosas debían recibir tal nombre y, sobre todo, cuáles debían quedar excluidas. Al final la solución fue adoptar una definición muy general que se expondrá en la sección inicial de este capítulo.



Sir Isaac Newton (1643-1727).

Esta unidad didáctica se dedica al estudio de las funciones. Como hemos señalado, el campo es muy amplio, por lo que debemos limitarnos a exponer muy brevemente algunos de los apartados más importantes. Comenzaremos por discutir el concepto de función, destacando que es un caso particular de la idea de aplicación, que hemos visto en la primera unidad didáctica; a continuación se estudian algunas de las características generales de las funciones: intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos

relativos y asíntotas. Posteriormente se introducen, de manera intuitiva, las nociones de límite y continuidad, y se incluyen algunas casos sencillos del cálculo de límites e identificación de las posibles discontinuidades de una función. La sección siguiente se dedica al cálculo diferencial, comenzando por el concepto de derivada y función derivable, para llegar a la ecuación de la recta tangente a una curva. Luego se estudia el cálculo de derivadas y algunas de sus aplicaciones como la determinación de máximos y mínimos relativos, y la convexidad y concavidad de una función.

Como temas complementarios se incluye estudio de algunas funciones elementales y una breve introducción a la idea de integral.

4.1 FUNCIONES

4.1.1 CONCEPTO DE FUNCIÓN

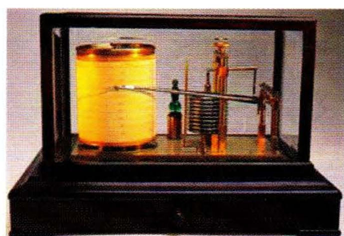


Figura 4.1: Aparato para registrar la temperatura a lo largo del tiempo.

La idea de función no nació en el siglo XVII. Desde la época griega se sabía que el área de un círculo, $A(r) = \pi r^2$, es *función* de la longitud de su radio r. Así mismo, las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 + bx - 1 = 0$, se expresan *en función* del coeficiente b de la ecuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4}}{2}.$$

De este modo ejemplos de funciones habían estado presentes a lo largo de toda la historia de las matemáticas. Lo que supuso una verdadera revolución científica fue el descubrimiento de métodos adecuados para analizar cualquier tipo de función, lo cual permitió su uso permanente en todas las ramas de la ciencia.

Así, por ejemplo, un aficionado puede consultar un termómetro, en determinados instantes, para satisfacer su curiosidad acerca de la temperatura ambiente. Pero un meteorólogo profesional debe realizar un registro continuo de las temperaturas para que su información sea mucho más completa. Contará, sin duda, con un aparato como el representado en en la figura 4.1, en el que los movimientos de la aguja del termómetro quedan registrados sobre una tira de papel graduado, enrollado en un cilindro que gira uniformemente a medida que pasa el tiempo. Al desplegar el papel, al final de cada jornada, encontrará una gráfica que expresa la temperatura en función del tiempo. Por supuesto, dicha función le permite conocer la temperatura registrada en cada momento: podrá saber si se han producido subidas o bajadas bruscas de la temperatura en determinados instantes; la comparación de los diferentes registros diarios, le indicará si las fluctuaciones diarias muestran una cierta periodicidad horaria; también podrá comparar los registros de días de invierno con los del verano, etc. Condensada en la función, dispondrá, en definitiva, de una información exhaustiva acerca del fenómeno meteorológico que le preocupa.

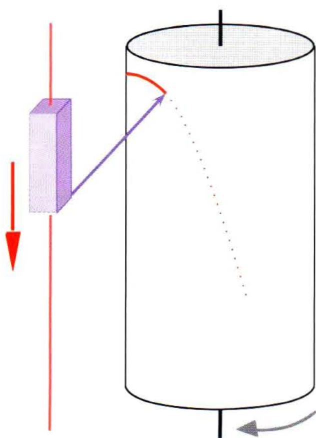


Figura 4.2: Mecanismo para representar la caída de un móvil en función del tiempo.

En Física, el estudio de la caída de los cuerpos se inició con Galileo y fue la base para que Newton descubriese la ley de la gravitación universal. La preocupación de Galileo era saber la distancia recorrida, en función del tiempo, por un objeto que se deja caer en el vacío y, pese a lo rudimentario de sus instrumentos, consiguió descubrir que el movimiento de cualquier proyectil, en el vacío, sigue una trayectoria parabólica.

Más tarde —en torno a 1830— las técnicas de experimentación habían mejorado sensiblemente y se diseñó un mecanismo, como el esquematizado en la figura 4.2, capaz de analizar con precisión el fenómeno: el cuerpo, que cae a lo largo de una guía, lleva unido un lápiz que traza una marca sobre un papel enrollado en un cilindro que gira uniformemente con el paso del tiempo. Al desenrollar la hoja de papel, el lápiz ha dejado una marca, en la forma indicada en la figura 4.3, que proporciona la distancia recorrida por el móvil en función del tiempo de caída que viene medido por la rotación uniforme del cilindro. Se observa que al cabo de 0.5 segundos el cuerpo ha caído 1.25 metros, al cabo de 0.75 segundos la distancia recorrida es de 2.81 metros, y así sucesivamente para cualquier instante anterior a la llegada del móvil a la base del cilindro. La propia apariencia de la curva sugiere que la expresión matemática que proporciona la distancia como función del tiempo es:

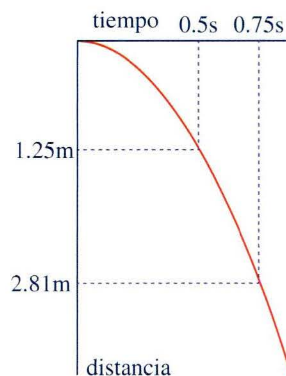


Figura 4.3: Distancia recorrida por un móvil en función del tiempo.

$$\text{distancia} = \text{constante} \times \text{tiempo}^2 = ct^2$$

y tal conjetura se puede confirmar con la comprobación de que los puntos de la curva satisfacen efectivamente dicha expresión, para un cierto valor de la constante c que depende de las unidades de medida del tiempo y la distancia. En concreto, cuando el tiempo se mide en segundos y la distancia en metros, c es aproximadamente igual a 5 m/s^2, que es el valor de la atracción de la gravedad en la superficie de la tierra.

El mismo dispositivo sirve para estudiar el movimiento del cuerpo en otras condiciones. Por ejemplo, imaginemos que el móvil, en vez de caer libremente, está suspendido de un muelle, inicialmente separado de su posición de equilibrio. Al dejarlo en libertad, su posición oscilará abajo y arriba, debido a la acción alternada de su peso y la fuerza recuperadora del muelle. El lápiz dibujará ahora sobre el papel una curva como la de la figura 4.4, que refleja las oscilaciones del móvil a lo largo del tiempo. La gráfica corresponde a la expresión funcional

$$\text{posición} = \text{constante} \times \text{coseno}(t) = A\cos t$$

que depende del valor del coseno del tiempo t, cuyo valor se introdujo en el capítulo de Geometría.

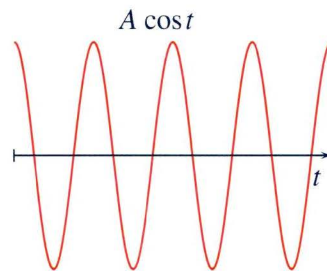


Figura 4.4: Gráfica de las oscilaciones de un móvil suspendido de un muelle, en función del tiempo.

Los ejemplos anteriores ponen de relieve que lo que se pretende al establecer una dependencia funcional es determinar la forma en que una cierta magnitud se relaciona con otra. Puede ser posición y tiempo —como en los casos previos— o longitud de una barra de metal según su temperatura, o intensidad de un campo magnético según la distancia al polo de un imán, o

concentración de un reactivo químico según el nivel de iluminación, o cuota íntegra del impuesto según el nivel de renta, etc. El estudio de infinidad de situaciones de este tipo, en las que una magnitud depende de otra, consiste en precisar la forma exacta de dicha dependencia, mediante una **función matemática**.

IDEA GENERAL DE FUNCIÓN

4.1 *Relacionar dos magnitudes cualesquiera X e Y mediante una* **función**, *consiste en disponer de un método que para cada valor x de la primera permita determinar el correspondiente valor y de la segunda.*

Se considerará aquí exclusivamente el caso en que ambas magnitudes X e Y puedan ser medidas mediante un número real, como ocurre con el tiempo, la longitud, la temperatura, la concentración, la renta, etc., dentro de un determinado intervalo de variación. Por ejemplo, se admite habitualmente que el tiempo y el espacio varían desde $-\infty$ a $+\infty$, lo cual no es más que una manera de decir que pueden tomar valores arbitrariamente grandes, tanto positivos como negativos. En cambio, la temperatura no puede descender por debajo del cero absoluto, $-273°C$, y su rango de variación es pues el intervalo $(-273,\infty)$ medida en dicha unidad. Un ángulo variará entre 0 y 360 grados o entre 0 y 2π radianes, según las unidades de medida elegidas. Y así sucesivamente. Todas estas ideas sugieren el concepto que establecemos a continuación.

RANGO DE VARIACIÓN

4.2 *El* **rango de variación** *de cualquier magnitud numérica puede ser:*

- *Un* **intervalo cerrado**: $[a,b]$, *formado por todos los números reales x que verifican $a \leq x \leq b$.*
- *Un* **intervalo abierto**: (a,b), *formado por todos los números reales x que verifican $a < x < b$.*

  En este caso es posible que sea $a = -\infty$ y $b = +\infty$, lo cual debe entenderse como el siguiente convenio:

  - $(-\infty,b)$ *son todos los números reales x menores que b.*
  - $(a,+\infty)$, *son todos los números reales x mayores que a.*
- *Un* **intervalo semiabierto**: $[a,b)$, *formado por todos los números reales que verifican $a \leq x < b$.*
- *Un* **intervalo semicerrado**: $(a,b]$, *formado por todos los números reales que verifican $a < x \leq b$.*

Con estas precisiones acerca del posible recorrido de las magnitudes numéricas, la idea de función se puede reformular con más exactitud.

FUNCIÓN NUMÉRICA

4.3 *Si la magnitud X tiene por recorrido un determinado intervalo I de números reales, la magnitud Y es* **función** *de X supuesto que, a cada número $x \in I$, se puede asociar un único valor numérico y de Y. Se dice que y es la* **imagen** *de x mediante la función.*

En este sentido el concepto de función no es nuevo, sino que corresponde a un caso particular de la noción de aplicación estudiada en la sección 1.3, en el cual tanto el dominio como el rango de la aplicación son el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, o un subconjunto del mismo. En concreto, se tiene la siguiente definición alternativa:

FUNCIÓN (DEFINICIÓN ALTERNATIVA)

4.4 *Una* **función** *es una aplicación de un cierto intervalo I de números reales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.*

Simbólicamente, para designar una función f definida sobre el intervalo I se utiliza la notación:

$$f : I \mapsto \mathbb{R}$$

que indica que la función f asocia a cada elemento de I un número real. El elemento genérico del intervalo I se denomina **variable independiente** y suele designarse por $x, t, u \dots$ El valor numérico asociado al elemento $x \in I$, mediante la función f, se designa por $f(x)$.

Conviene recalcar la diferencia que existe entre la función f y el número $f(x)$, a pesar de que en muchos casos concretos el lenguaje habitual omita tal distinción: por ejemplo, hablar de *"la función $3x^2 + 1$"* significa *"la función que hace corresponder a cada número real x, el número real $3x^2 + 1$"*.

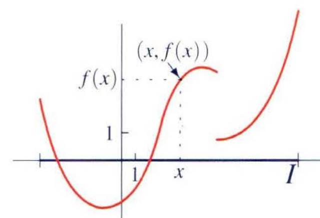


Figura 4.5: Representación gráfica de una función.

EJEMPLO 4.1 Matemáticamente, el método habitual para especificar una función consta siempre de un intervalo de definición I y la expresión que facilita la imagen de cada elemento $x \in I$. Así ocurre en los siguientes casos:

$$I = (-2, 3), \qquad f(x) = 4x^3 - 1;$$
$$I = (0, \infty), \qquad f(x) = \sqrt{2x+1};$$
$$I = [0, 1), \qquad f(x) = 1/(x-1).$$

EJEMPLO 4.2 Hay que poner atención en que la expresión de la función defina sin ambigüedad un único valor asociado a cada $x \in I$. Así, la definición

$$I = [0, 4], \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - x^2}}$$

no es correcta por dos motivos:

a) El número real $3-x^2$ sólo es positivo cuando $x \in (-\sqrt{3},\sqrt{3})$; luego $f(x)$ no proporciona ningún valor cuando $x \in [\sqrt{3},4]$. O bien se modifica la expresión de la función en el intervalo $[\sqrt{3},4]$, o bien se cambia el intervalo I, reduciéndolo a $I=[0,\sqrt{3})$.

b) Para $x \in (-\sqrt{3},\sqrt{3})$, la expresión $\sqrt{3-x^2}$ tiene dos valores: las dos raíces opuestas del número $3-x^2$; hay que precisar cual de las dos se elige para dar el valor de $f(x)$, la positiva o la negativa. Bien es cierto que normalmente se adopta el convenio de que $\sqrt{3-x^2}$ designa la raíz positiva (y la raíz negativa se designa por $-\sqrt{3-x^2}$).

4.1.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Es importante poder visualizar cualquier función mediante su representación gráfica. La idea consiste en utilizar un sistema de ejes cartesianos, sobre los que se ha elegido una determinada unidad de medida, en general distinta sobre cada eje.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

4.5 *La **gráfica** de una determinada función f, definida en un intervalo I, es el conjunto de puntos del plano cuya abscisa es un valor $x \in I$ y ordenada $f(x)$.*

EJEMPLO 4.3 La figura 4.5 muestra la gráfica de una función.

Hoy en día existen programas de ordenador capaces de trazar la gráfica de cualquier función especificada e, incluso, algunas calculadoras de bolsillo, como la de la figura 4.6, incorporan una pequeña pantalla en la que pueden mostrar las gráficas de las funciones que se le indiquen, en la escala que se seleccione.



Figura 4.6: Una calculadora con prestaciones gráficas.

Para hacerlo "manualmente" hay que proceder como muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4.4 Consideremos la función

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \qquad \text{en el intervalo} \qquad I=(-\sqrt{3},\sqrt{3})$$

Convengamos en que siempre proporciona un valor $f(x)>0$. Cuando x sea próximo a $\sqrt{3}$ o a $-\sqrt{3}$, será muy pequeño $\sqrt{3-x^2}$ y, por consiguiente, el inverso $f(x)$ será muy grande; en concreto, como $\sqrt{3}\simeq 1.7320508$, se puede calcular

$$f(1.732)\simeq 75.38, \qquad f(1.73205)\simeq 597.88, \qquad f(1.7320507)\simeq 1638.18,\ldots$$

de modo que $f(x)$ crece muy rápidamente al acercarse x hacia $\sqrt{3}$.

Es de señalar que $f(-x) = f(x)$, puesto que en la expresión de f sólo aparece x^2. Y ello significa que f es *simétrica* respecto del eje $x = 0$: lo mismo sucede cuando x aumenta de 0 a $\sqrt{3}$ que cuando x disminuye de 0 a $-\sqrt{3}$. Además, a medida que x se aleja de 0, x^2 aumenta, $3 - x^2$ disminuye y $1/\sqrt{3 - x^2}$ crece. Es decir, los valores de $f(x)$ son progresivamente más grandes cuanto más grande sea x. Consecuentemente, el mínimo valor de $f(x)$ se alcanzará para $x = 0$, en cuyo caso el denominador de la expresión es lo más grande posible. Para más exactitud: $f(0) = 1/\sqrt{3} \simeq 0.577$.

Calcular algunos otros valores concretos de la función, como por ejemplo

$$f(1/2) \simeq 0.603, \qquad f(1) = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707, \qquad f(\sqrt{2}) = 1,$$

permite trazar el gráfico de la figura 4.7 en el que se aprecian de un vistazo toda las observaciones realizadas.

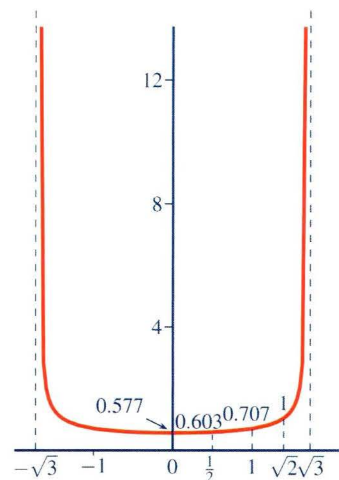


Figura 4.7: Representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - x^2}}$ en el intervalo $I = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

4.1.3 CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES

Algunas de las características observadas en la curva del ejemplo anterior merecen ser elevadas a categorías.

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

FUNCIÓN CRECIENTE

4.6

Una función f es **creciente** *en un intervalo J si, cuando x aumenta dentro de J, el valor de $f(x)$ aumenta.*

En símbolos:

f es creciente en J si se verifica

$$f(x_1) \le f(x_2) \qquad \textit{siempre que} \quad x_1 < x_2 \ \text{ y } \ x_1, x_2 \in J.$$

FUNCIÓN DECRECIENTE

4.7

Una función f es **decreciente** *en un intervalo J si, cuando x aumenta dentro de J, el valor de $f(x)$ disminuye.*

En símbolos:

f es decreciente en J si se verifica

$$f(x_1) \ge f(x_2) \qquad \textit{siempre que} \quad x_1 < x_2 \ \text{ y } \ x_1, x_2 \in J.$$

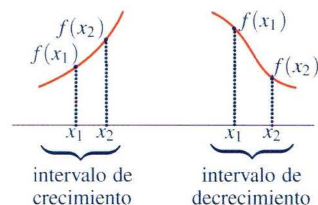


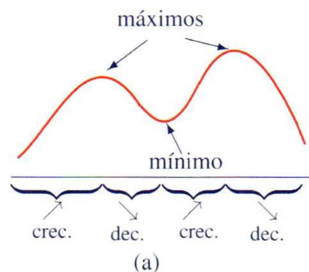
Figura 4.8: Funciones creciente y decreciente.

La imagen genérica de ambos casos se muestra en la figura 4.8.

EJEMPLO 4.5 La función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \qquad \text{en el intervalo} \qquad I = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

es creciente en el intervalo $[0, \sqrt{3})$ y decreciente en el intervalo $(-\sqrt{3}, 0]$, como puede verse en la figura 4.7.



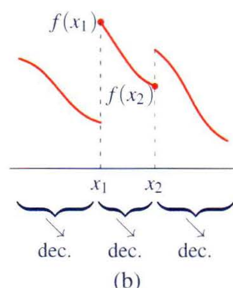


Figura 4.9: Máximos y mínimos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS

Intuitivamente, un **máximo relativo** de una función es un punto que separa un intervalo de crecimiento, situado a su izquierda, de un intervalo de decrecimiento, situado a su derecha. Análogamente, un **mínimo relativo** de una función es un punto que separa un intervalo de decrecimiento, situado a su izquierda, de un intervalo de crecimiento, situado a su derecha. Esta manera de considerar los máximos y los mínimos es útil y esencialmente correcta cuando la función carece de saltos, como puede verse en la figura 4.9(a). Sin embargo, cuando hay discontinuidades un máximo relativo puede separar dos intervalos de decrecimiento. En la figura 4.9(b), x_1 es un máximo relativo y x_2 un mínimo relativo, a pesar de que delimitan tres intervalos de decrecimiento. Para incluir situaciones de este tipo, la definición de máximo relativo adopta la forma precisa siguiente:

MÁXIMO RELATIVO

4.8

Una función f tiene un **máximo relativo** *en el punto x_0 si se pueden encontrar $a < x_0$ y $b > x_0$ de modo que sea $f(x) \leq f(x_0)$ siempre que $x \in (a,b)$.*

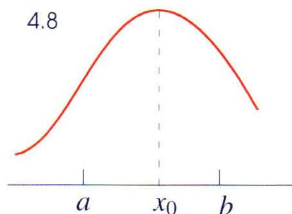


Figura 4.10: Máximo relativo.

La condición anterior expresa que $f(x_0)$ domina sobre todos los valores $f(x)$ de su entorno, correspondientes a valores de x situados en algún intervalo (a,b) que contiene a x_0, como se ve en la figura 4.10. De manera análoga,

MÍNIMO RELATIVO

4.9

Una función f tiene un **mínimo relativo** *en el punto x_0 si se pueden encontrar $a < x_0$ y $b > x_0$ de modo que sea $f(x) \geq f(x_0)$ siempre que $x \in (a,b)$.*

EJEMPLO 4.6 La función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}$$

tiene un mínimo relativo en el punto $x = 0$, como puede verse en la figura 4.7.

ASÍNTOTAS VERTICALES

En la figura 4.7 se observa que la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}$ crece hacia infinito cuando x se acerca a $\sqrt{3}$ (o a $-\sqrt{3}$). Esto es una manera de indicar que $f(x)$ aumenta indefinidamente cuando x toma valores cada vez más cercanos a $\sqrt{3}$ y simbólicamente se escribe

$$\underset{x\to\sqrt{3}}{\text{límite}}\, f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad f(x) \underset{x\to\sqrt{3}}{\longrightarrow} \infty.$$

La recta vertical $x = \sqrt{3}$ se denomina en estas circunstancias una **asíntota vertical** de la función f.

EJEMPLO 4.7 Se considera la función

$$f(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x^2} \qquad \text{para cualquier } x \neq 0$$

y, como la expresión anterior carece de sentido para $x = 0$, se define $f(0) = 2$.

Vamos a estudiar el comportamiento de esta función. El análisis es más sencillo si se expresa del siguiente modo equivalente:

$$f(x) = 3 + \frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2} \qquad \text{para } x \neq 0.$$

De esta forma es claro que cuando x es muy grande $f(x)$ es muy próximo a 3, porque tanto $\frac{2}{x}$ como $\frac{-1}{x^2}$ son muy pequeños; por ejemplo

$$f(100) \simeq 3.02, \quad f(800) \simeq 3.0025, \ldots$$

y también

$$f(-50) \simeq 2.96, \quad f(-200) \simeq 2.99, \ldots$$

Esto se expresa simbólicamente de la siguiente forma

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{límite}}\, f(x) = 3 \qquad \text{o bien} \qquad f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 3$$

Es decir, cuando x aumenta o disminuye indefinidamente los valores que toma f se acercan a 3. En estas circunstancias, se dice que la recta horizontal $y = 3$ es una **asíntota horizontal** de la función f. Estudiemos ahora el comportamiento de la función en distintos intervalos de la variable x.

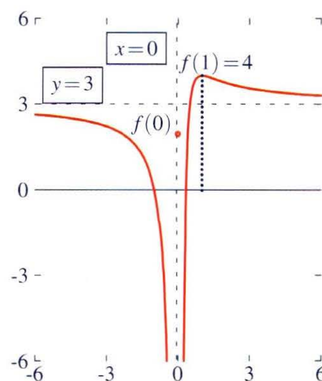


Figura 4.11: Representación gráfica de la función $f(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x^2}$.

Caso $x < 0$

Cuando es $x < 0$, tanto $\frac{2}{x}$ como $\frac{-1}{x^2}$ son negativos y restan, de 3, cantidades tanto más importantes cuanto más próximo a cero sea x. Esto indica que $(-\infty, 0)$ es un intervalo de decrecimiento de f. Además el decrecimiento es ilimitado, pues las

cantidades a restar se hacen arbitrariamente grandes a medida que x se aproxima a cero, siempre con valores negativos; por ejemplo,

$$f(-0.1) = -117, \quad f(-0.01) = -10197,$$

y, en resumen,

$$\text{límite}_{x<0, x\to 0} f(x) = -\infty.$$

De modo que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical a la que se ajusta la función cuando x crece hacia 0.

Caso $x > 0$

Para $x > 0$ la cosa es algo más complicada: ¿qué debe cumplir x para que, al incrementarla en una pequeña cantidad h, el valor de f crezca? Es decir, ¿cuando es $f(x) \leq f(x+h)$? Para que se cumpla esta desigualdad tiene que ser, según la definición de f:

$$\frac{3x^2+2x-1}{x^2} \leq \frac{3(x+h)^2+2(x+h)-1}{(x+h)^2}$$

y, utilizando las propiedades de las desigualdades, tenemos de forma equivalente que

$$(3x^2+2x-1)(x+h)^2 \leq (3(x+h)^2+2(x+h)-1)x^2$$

Después de desarrollar y simplificar,

$$2x^2h - 2xh + 2xh^2 - h^2 \leq 0$$

o bien

$$2x^2 - 2x + h(2x-1) \leq 0.$$

Puesto que se trata de que la desigualdad se verifique por pequeño que sea el incremento h, la conclusión es que debe ser por fuerza $2x^2 - 2x \leq 0$, que equivale a $x < 1$. En definitiva, el intervalo $(0, 1)$ es un intervalo de crecimiento de f mientras que, por el contrario, $(1, \infty)$ es un intervalo de decrecimiento. El punto $x = 1$ que los separa, en el cual $f(1) = 4$, es un máximo relativo de la función f.

Caso de ser x muy próximo a 0, el numerador de f vale prácticamente -1 y el denominador es muy pequeño, así que

$$\text{límite}_{x>0, x\to 0} f(x) = -\infty$$

De hecho

$$f(0.1) = -77, \quad f(0.01) = -9797, \ldots$$

Luego f también se ajusta a la asíntota vertical $x = 0$ cuando x decrece hacia 0. La gráfica de la función f resume todas las propiedades establecidas, como se ve en la figura 4.11.

4.2 LÍMITES Y CONTINUIDAD

4.2.1 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

En los ejemplos anteriores ha habido ocasión de observar el significado intuitivo del límite de una función f al acercarse su variable hacia un cierto valor. Pero en matemáticas las ideas deben hacerse todo lo precisas y generales que sea posible. Con este fin, el concepto genérico de **límite** de una función f en un punto x_0 del intervalo en que está definida, puede formularse así:

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

4.10

*La función f, definida en el intervalo I, tiene **límite** ℓ cuando x tiende a $x_0 \in I$, si al tomar x suficientemente próximo a x_0, aunque diferente de x_0, puede hacerse el valor de $f(x)$ tan próximo a ℓ como se desee. Cuando ello es posible se indica*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

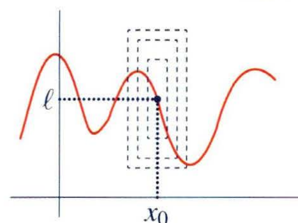


Figura 4.12: Idea gráfica de límite de una función.

Gráficamente la idea puede expresarse por medio de rectángulos centrados en el punto (x_0, ℓ). Podemos preguntarnos si al contraerse la altura del rectángulo, puede contraerse la base de modo que la gráfica de la función permanezca en el interior del rectángulo, atravesándolo desde su lado izquierdo hasta el derecho. Si la respuesta a esta pregunta es afirmativa, como en la figura 4.12, entonces $\lim_{x \to x_0} = \ell$. El valor $f(x_0)$ que tome la función en el punto x_0 no afecta al límite, el cual sólo depende de los valores $f(x)$ en puntos x próximos a x_0 que no coincidan con x_0.

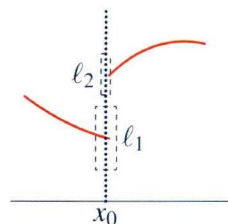


Figura 4.13: Límites laterales de una función.

Una función f carece de límite, al tender x a x_0, si $f(x)$ se aproxima simultáneamente a varios valores al acercarse x a x_0. El caso más simple para que así ocurra es el que muestra la figura 4.13, en la que se han señalado rectángulos, centrados en (x_0, ℓ_1) y en (x_0, ℓ_2), que la función no atraviesa por mucho que se estreche su base. En esta situación todavía se dice que hay, en el punto x_0, **límites laterales**, por la izquierda y por la derecha, con valores respectivos ℓ_1 y ℓ_2.

Pero la situación puede ser mucho más complicada: al aproximarse x a x_0, los valores de $f(x)$ pueden oscilar acercándose simultáneamente a todos los puntos de un intervalo, sin posibilidad de que exista el límite de $f(x)$ en x_0, como se representa en la figura 4.14.

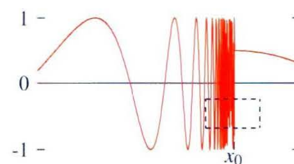


Figura 4.14: Ausencia del límite de una función.

En la práctica, a menudo, el cálculo de límites plantea dificultades, debido al problema de las **indeterminaciones** que se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.8 La expresión

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$$

define el valor de una función f para todos los valores de x distintos de ± 1, puesto que dichos valores anulan el denominador. Puede completarse la definición de f añadiendo, de modo arbitrario, $f(-1)=f(1)=2$. Mas lo interesante es saber que ocurre con los valores de $f(x)$ al aproximarse x a 1 o a -1.

Cuando x es próximo a -1, el denominador se hace muy pequeño mientras que el numerador toma un valor cercano a -2. Ello supone que el cociente $f(x)$ se hace muy grande, de modo que $x=-1$ debe ser una asíntota vertical. De hecho

$$f(-1.01)\simeq -101,\quad f(-1.001)\simeq -1001,\quad f(-.99)\simeq 99,\quad f(-.999)\simeq 999,\dots$$

Puede concluirse que $f(x)$ tiene límites laterales: $-\infty$ al crecer x hacia -1 y ∞ cuando x disminuye hacia -1. Así se aprecia en la representación gráfica de la figura 4.15. En cambio, cuando x es 1 se presenta una indeterminación, pues la expresión de f obliga a calcular un cociente de la forma $0/0$. Para valores próximos a 1 se tiene

$$f(0.99)\simeq 1.4925,\quad f(0.999)\simeq 1.4993,\quad f(1.01)\simeq 1.5075,\quad f(1.001)\simeq 1.5007,\dots$$

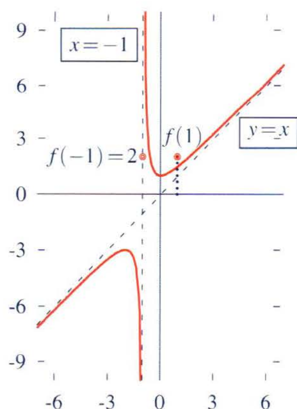


Figura 4.15: Gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

lo cual da idea de que $\lim_{x\to 1} f(x)=1.5$. De hecho, supuesto que $x\neq 1$, puede simplificarse

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{x^2+x+1}{x+1}$$

y, cuando x se acerca a 1, el numerador se aproxima a 3 y el denominador a 2; luego $\lim_{x\to 1} f(x)=3/2$.

Puede entenderse ahora, por qué la definición de límite obliga a tomar x próximo a x_0, pero diferente de x_0. El valor fijado $f(1)=2$ no es compatible con el resultado $\lim_{x\to 1} f(x)=1.5$ a no ser que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ no dependa del valor $f(x_0)$.

Es de destacar la presencia en este caso de la **asíntota oblicua** $y=x$, recta a la que se ajusta la curva $f(x)$ cuando x toma valores grandes de uno u otro signo. Ello se detecta en el hecho de que

$$f(x)-x=\frac{x^3-1}{x^2-1}-x=\frac{1}{x+1}$$

se hace muy pequeño cuando x es muy grande (positivo o negativo); es decir que los valores de $f(x)$ y de x son muy próximos cuando x es grande.

El cálculo de límites es, con frecuencia, una cuestión delicada, pero los casos simples se resuelven con comodidad como vemos en los resultados siguientes.

4.11

- *Si* $f(x) = c$ *entonces* $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$.
- *Si* $f(x) = x$ *entonces* $\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0$.
- *Si* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0$$

- *Si* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *entonces* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

4.12

- $\lim[f(x)+g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$;
  o bien el límite de una suma es la suma de los límites.
- $\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$;
  o sea el límite de un producto es el producto de los límites.
- $\lim\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, *supuesto que* $\lim g(x) \neq 0$;
  de modo que el límite de un cociente es el cociente de los límites, cuando el denominador no es nulo.

EJEMPLO 4.9 Como $\lim_{x\to x_0} x = x_0$, se deduce

$$\lim_{x\to x_0} x^k = x_0^k$$

siempre que sea $k > 0$ e incluso cuando es $k < 0$ con la salvedad de que sea, entonces, $x_0 \neq 0$.

EJEMPLO 4.10 Para un polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, se concluye

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0$$

es decir $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

En concreto

$$\lim_{x\to -1} x^5 - 3x^2 + 2x = (-1)^5 - 3(-1)^2 + 2(-1) = -1 - 3 - 2 = -6.$$

EJEMPLO 4.11

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} &= \frac{\text{lím}_{x \to x_0} x^3+4x^2-3}{\text{lím}_{x \to x_0} x^2+5} \\ &= \frac{x_0^3+4x_0^2-3}{x_0^2+5}\end{aligned}$$

En particular, si $x_0 = 2$ resulta:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} = \frac{2^3+4\cdot 2^2-3}{2^2+5} = \frac{5}{3}$$

Las reglas anteriores son válidas siempre que el resultado esté bien determinado, lo que incluye situaciones del tipo:

$$\infty + \infty = \infty \qquad c\cdot(-\infty) = +\infty \text{ si } c<0 \qquad \frac{c}{\infty} = 0.$$

En cambio, el resultado queda *indeterminado* en casos como:

$$\infty - \infty = ? \quad 0\cdot\infty = ?, \quad \frac{0}{0} = ?, \quad \frac{\infty}{\infty} = ?, \ldots$$

lo cual significa que, si se presenta una tal *indeterminación*, el resultado depende de las peculiaridades de las funciones f y g involucradas en el cálculo.

EJEMPLO 4.12 Calcular $\text{lím}_{x\to\infty} \left(\frac{-x}{7x+4} + \frac{5x+2}{2x^3-1}\right)$.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x}{7x+4} + \frac{5x+2}{2x^3-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{7x+4} + \lim_{x\to\infty} \frac{5x+2}{2x^3-1}$$

Ahora bien en ambas fracciones tanto el numerador como el denominador tienden a ∞, dando lugar a indeterminaciones del tipo ∞/∞. Para resolverlas, puede dividirse por x los términos de la primera fracción y por x^3 los de la segunda, de modo a obtener

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{7+\frac{4}{x}} + \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} &= \frac{-1}{7} + \frac{0+0}{2-0} \\ &= -\frac{1}{7} + 0 = -\frac{1}{7}.\end{aligned}$$

4.2.2 FUNCIONES CONTINUAS

El concepto que relaciona el valor de $f(x_0)$ con el valor del $\lim_{x \to x_0} f(x)$ es la noción de **continuidad** de f en x_0, que expresa matemáticamente la idea de que la función f no tenga en el punto x_0 ningún tipo de salto, ni de escisión.

FUNCIÓN CONTINUA

4.13

*Una función f es **continua** en el punto x_0 si se verifica*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

*Tanto si el límite no existe, como si no coincide con $f(x_0)$, la función f es **discontinua** o tiene una **discontinuidad** en x_0.*

EJEMPLO 4.13 La función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, estudiada en el ejemplo 4.8, tiene dos discontinuidades:

- En el punto $x = 1$, existe $\lim_{x \to 1} f(x) = 3/2$ pero no coincide con $f(1) = 2$. Tal tipo de discontinuidad se denomina **evitable**, puesto que puede eliminarse modificando el valor de $f(1)$.
- En el punto $x = -1$, no existe $\lim_{x \to -1} f(x)$; en concreto, los límites laterales valen $-\infty$ a la izquierda del punto -1 y ∞ a su derecha. No hay, por tanto posibilidad de definir el valor de $f(-1)$ de modo que f sea continua en -1.

Los resultados sobre álgebra de límites junto con la definición de función continua conducen al siguiente resultado:

4.14

Son funciones continuas, en el punto x_0, la suma, el producto y el cociente de funciones continuas en el punto x_0; salvo quizás en el caso del cociente, si el denominador se anula en x_0.

EJEMPLO 4.14

- La función $f(x) = 5x(2 - x) + \dfrac{1}{x^2 + 1}$ es continua en todos los puntos, porque es suma, producto y cociente de funciones continuas y el denominador $x^2 + 1$ no se anula en ningún punto.
- La función $g(x) = \dfrac{x + 3}{(x - 5)(x - 2)}$ es continua en todos los puntos, excepto en $x_0 = 5$, $x_0 = 2$ en los que se anula el denominador y el numerador vale



respectivamente 8 y 5. Exactamente

$$\lim_{x>5, x\to 5} g(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x<5, x\to 5} g(x) = -\infty$$

mientras que

$$\lim_{x>2, x\to 2} g(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x<2, x\to 2} g(x) = +\infty.$$

4.3 CÁLCULO DIFERENCIAL

4.3.1 CONCEPTO DE DERIVADA

A todo el mundo le resulta familiar la idea de derivada si se identifica con la noción de velocidad instantánea. Supongamos que un móvil se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea, de acuerdo con la ley

$$d(t) = t\sqrt{t}$$

que indica la distancia $d(t)$ recorrida al cabo de un tiempo t. Por ejemplo, después de 100 s el móvil ha recorrido 1000 m y su velocidad media ha sido $\frac{1000}{100} = 10$ m/s. Sin embargo, en los 2 últimos segundos, el móvil ha recorrido la distancia entre $d(98) = 98\sqrt{98} \simeq 970.15$ m y $d(100) = 1000$ m, de modo que su velocidad media en tal intervalo de tiempo ha sido

$$\frac{1000 - 970.15}{2} = 14.925\text{m/s}.$$

De manera similar, al cabo de un segundo adicional el móvil alcanzará la posición $d(101) = 101\sqrt{101} \simeq 1015.04$ m y su velocidad media en ese lapso de un segundo habrá sido

$$\frac{1015.04 - 1000}{1} = 15.04\text{m/s}.$$

Si se toman intervalos de tiempo cada vez más breves, alrededor del segundo $t = 100$, el mismo tipo de cálculo proporcionará un resultado cada vez más próximo a 15 m/s. De modo que cabe concluir que la velocidad instantánea al cabo de 100 s, cuando el móvil ha recorrido 1000 m, es 15m/s. Es lo que marcaría en ese instante el velocímetro de un coche que recorriese una carretera rectilínea según la ley del movimiento descrita.

En general, para calcular la velocidad media en el intervalo entre los instantes t_0 y t hay que efectuar el cociente:

$$\frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} = \frac{t\sqrt{t} - t_0\sqrt{t_0}}{t - t_0} = \sqrt{t} + t_0\,\frac{\sqrt{t} - \sqrt{t_0}}{t - t_0} = \sqrt{t} + \frac{t_0}{\sqrt{t} + \sqrt{t_0}}$$

de modo que, si t es muy próximo a t_0, tal velocidad media se aproxima a la velocidad instantánea

$$\sqrt{t_0} + \frac{t_0}{2\sqrt{t_0}} = \frac{3}{2}\sqrt{t_0}\ \text{m/s}$$

y el velocímetro indicará tal resultado en cada instante t_0.

El procedimiento es general: calcular el límite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0}$$

facilita la velocidad instantánea de un móvil que sigue la ley de movimiento $d(t)$, cualquiera que esta sea.

Es claro que el procedimiento empleado en el caso del móvil puede ser útil en otros contextos. Igual que la velocidad expresa la relación entre la variación del espacio y la variación del tiempo, puede ser útil medir la rapidez con que varía la cuota del impuesto sobre la renta al variar la base imponible, o medir la tasa de variación de la concentración de azúcar en sangre al aumentar la dosis de insulina. En cualquier situación de este tipo, se supone que una cierta función f relaciona determinada magnitud Y con otra magnitud X; al variar X de x_0 a x, Y varía de $f(x_0)$ a $f(x)$ y el cociente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

expresa la variación relativa de Y respecto a X en el intervalo indicado. Si el cociente tiene límite, al aproximarse x a x_0, dicho límite representa la tasa instantánea de variación de Y respecto a X en el punto x_0. La idea corresponde a la noción matemática de **derivada de la función f en el punto** x_0, que adopta la siguiente definición:

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

4.15 *Si f es una función definida en un intervalo I y $x_0 \in I$, la* **derivada** *de f en x_0 es*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

supuesto que el límite exista.

FUNCIÓN DERIVABLE

4.16 *Una función f se denomina* **derivable** *en el punto x_0, si la derivada $f'(x_0)$ existe y es finita.*

Hay una estrecha relación entre el hecho de que una función sea derivable en un punto y su continuidad en ese punto. Cuando una función es derivable, dado que $x - x_0 \longrightarrow 0$ cuando $x \to x_0$, para que el cociente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tenga un límite finito, es preciso que el numerador $f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. Esto significa la continuidad de f en x_0. Tenemos entonces el siguiente resultado:

Toda función derivable en un punto x_0 es continua en x_0. 4.17

4.3.2 TANGENTE A UNA CURVA

Newton y Leibniz, de manera independiente y casi simultánea, introdujeron el *Cálculo diferencial* como método para determinar la recta tangente a una curva en un punto dado. Imaginemos primero la recta r que une dos puntos próximos, $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$, sobre la gráfica de una cierta función f, como se ve en la figura 4.16 (a).

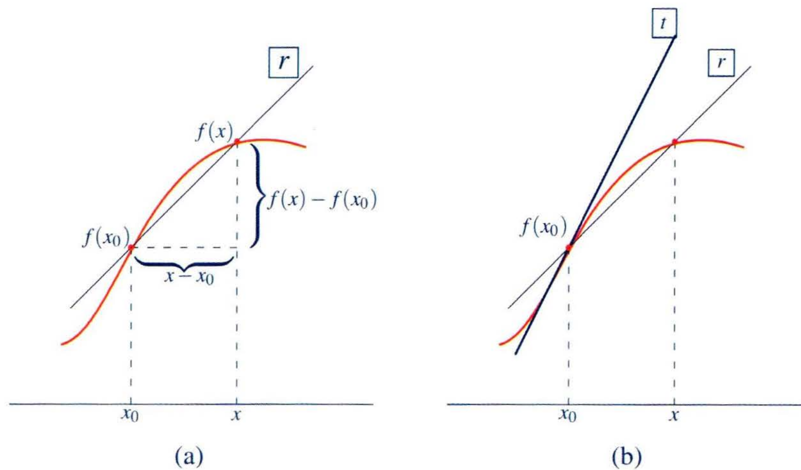


Figura 4.16: Interpretación gráfica de la derivada.

El triángulo rectángulo, de vértices $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$ y $(x, f(x_0))$, tiene un lado vertical de longitud $f(x) - f(x_0) = \Delta f$ y un lado horizontal de longitud $x - x_0 = \Delta x$. Por consiguiente la recta r tiene pendiente igual al cociente

$$c = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

y, por tanto, su ecuación es $y = c \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Cuando x se aproxima a x_0, el punto $(x, f(x))$ recorre la gráfica de f acercándose a $(x_0, f(x_0))$ y la recta secante r tiende a alcanzar una posición límite t que se denomina **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$, como se ve en la figura 4.16 (b). Intuitivamente se trata de la recta que, en las inmediaciones del punto $(x_0, f(x_0))$, sólo corta a la curva



en dicho punto; de modo que cualquier pequeño cambio de su pendiente la convierte en una recta secante, con algún otro punto de intersección próximo a $(x_0, f(x_0))$.

Puesto que, cuando x se acerca a x_0, se verifica

$$c = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$$

se concluye que:

TANGENTE A UNA CURVA

4.18

- *La derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_0, (f(x_0))$.*
- *En consecuencia, la ecuación de dicha recta tangente es*

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

ya que, además de tener la pendiente indicada, pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$

EJEMPLO 4.15 La función

$$f(x) = x^3 - |x| = \begin{cases} x^3 + x & \text{si } x < 0 \\ x^3 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

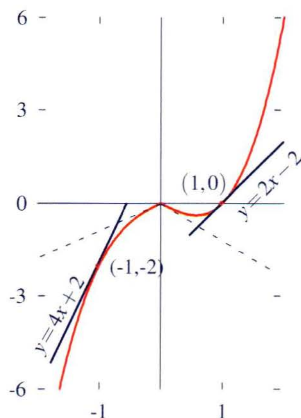


Figura 4.17: Tangentes a la curva $f(x) = x^3 - |x|$.

está definida para cualquier valor de x y su gráfica se muestra en la figura 4.17. Se desea estudiar la derivada de f en cada punto x_0 y la correspondiente tangente a la curva.

- Cuando $x_0 > 0$, se tiene

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^3 - x - x_0^3 + x_0}{x - x_0} = \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} - 1 = x^2 + x_0 x + x_0^2 - 1$$

supuesto que $x > 0$, de manera que al tender x a x_0 se obtiene

$$f'(x_0) = 3x_0^2 - 1.$$

Por ejemplo, en $x_0 = 1$ es $f(1) = 0$ y $f'(1) = 2$; así que la tangente a la curva en el punto $(1, 0)$ es la recta de ecuación $y = 2(x - 1)$

- Cuando $x_0 < 0$ será

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^3 + x - x_0^3 - x_0}{x - x_0} = x^2 + x_0 x + x_0^2 + 1$$

supuesto que $x < 0$, luego resulta

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} (x^2 + x_0 x + x_0^2 + 1) = 3x_0^2 + 1.$$

Así, en el punto $(-1, -2)$, como $f'(-1) = 4$, la recta tangente a la curva tiene por ecuación $y = 4(x+1) - 2 = 4x + 2$.

- En el punto $(0,0)$ la curva presenta un comportamiento anómalo. Al calcular $f'(0)$, si se toma $x > 0$ es

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 - x}{x} = x^2 - 1 \underset{x \downarrow 0}{\longrightarrow} -1;$$

mientras que con $x < 0$ se tiene

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 + x}{x} = x^2 + 1 \underset{x \uparrow 0}{\longrightarrow} +1.$$

El límite es pues distinto, según que x tienda a cero por la derecha o por la izquierda, y la derivada $f'(0)$ no existe. Ello refleja que, en el origen, la gráfica de f tiene dos tangentes distintas, por la izquierda, de pendiente $+1$, y por la derecha, de pendiente -1.

EJEMPLO 4.16 La función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

tiene la gráfica que aparece en la figura 4.18.

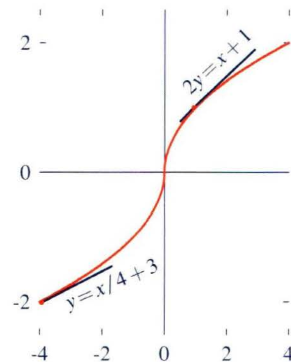


Figura 4.18: Función con tangente vertical.

- Para $x_0 > 0$ es

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

supuesto que $x > 0$, con lo cual

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Como $f'(1) = \frac{1}{2}$, la recta tangente a la curva en el punto $(1,1)$ tiene ecuación $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$ o bien $2y = x + 1$.

- Para $x_0 < 0$ se cumple

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-\sqrt{-x} + \sqrt{-x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{-x_0} + \sqrt{-x}}$$



supuesto que $x < 0$, de modo que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{-x_0} + \sqrt{-x}} = \frac{1}{2\sqrt{-x_0}}.$$

En particular $f'(-4) = \frac{1}{4}$ y $f(-4) = -2$, con lo cual la tangente a la curva en el punto $(-4, -2)$ es la recta de ecuación $y = \frac{1}{4}(x+4) - 2 = \frac{x}{4} + 3$.

- Cuando $x_0 = 0$ ocurre que, si x es positivo,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

ya que, al acercarse x a cero, el denominador se hace muy pequeño y el cociente muy grande. De manera similar, si x se toma negativo, resulta

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-\sqrt{-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

En conclusión, cabe afirmar que $f'(0) = +\infty$. Esto quiere decir que la curva tiene tangente vertical, el eje $x = 0$ concretamente, que es una recta de pendiente infinita.

4.3.3 CÁLCULO DE DERIVADAS

En todos los ejemplos anteriores, se ha determinado la derivada de las funciones mediante la propia definición de derivada. Sin embargo, el cálculo suele ser más rápido si se conocen las derivadas de las "piezas" simples que suelen componer las funciones y las reglas para componerlas. Las más usuales, expresadas para las funciones derivables f y g y la constante numérica c, se expresan en la tabla 4.1.

Estas reglas son resultado de meros cálculos y están además relacionadas entre sí. Por ejemplo, **(ii)** resulta de ser

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

que tiende a $f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$ cuando x se aproxima a x_0.

Según **(ii)**:

(ii)$_1$ $(cf)' = cf'$.

Por su parte, **(v)** tiene varias consecuencias útiles:

(v$_1$) $(1/f)' = -f'/f^2$.

REGLAS DE DERIVACIÓN		
(i)	Suma	$(f+g)' = f' + g'$
(ii)	Producto	$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$
(iii)	Cociente	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\,g - g'\,f}{g^2}$
(iv)	Función constante Función identidad	$f'(x) = 0$ si $f(x) = c$ $f'(x) = 1$ si $f(x) = x$
(v)	Potencia de f	$(f^c)' = c\,f^{c-1}\,f'$
(vi)	Función compuesta: Regla de la cadena	$[f(g(x)]' = f'(g(x))g'(x)$

Tabla 4.1

(v$_2$) $(\sqrt{f})' = f'/(2\sqrt{f})$.

que se obtienen de (v) para $c = -1$ y $c = 1/2$ respectivamente. Asimismo

(v$_3$) $f'(x) = cx^{c-1}$ si $f(x) = x^c$.

Combinando **(ii)** y **(v$_1$)**

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \left(g\,\frac{1}{f}\right)' = g'\,\frac{1}{f} + g\left(\frac{-f'}{f^2}\right) = \frac{g'\,f - g\,f'}{f^2}$$

tal y como afirma **(iii)**.

La regla **(vi)** recibe el nombre de **regla de la cadena** y es de gran importancia porque permite derivar funciones anidadas, una dentro de otra. Supone que f y g son funciones derivables tales que los valores que toma g en su intervalo de definición, I, están comprendidos en el intervalo de definición de f; en tales condiciones se puede formar la función $f(g(x))$ que asocia a cada $x \in I$ el valor de f en el punto $g(x)$. Entonces

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0};$$

el segundo factor tiende a $g'(x_0)$ cuando $x \to x_0$ y, por ser g continua, se verifica $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g(x_0)$, con lo cual el primer factor tiende a $f'(g(x_0))$. En conclusión, $[f(g(x))]' = f'(g(x))\,g'(x)$, como se afirma en **(vi)**.

EJEMPLO 4.17 Aplicando las reglas de derivación obtenemos de manera inmediata las siguientes derivadas:

- Si $f(x) = -1$ entonces $f'(x) = 0$.
- Si $f(x) = -2x$ entonces $f'(x) = -2$.
- Si $f(x) = x^2$ entonces $f'(x) = 2x$.
- Si $f(x) = x^2 - 2x - 1$ entonces $f'(x) = 2x - 2$.
- Si $f(x) = x^3 + 2x^2$ entonces $f'(x) = 3x^2 + 4x$.
- Si $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2-2x-1}$ entonces

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2-2x-1)-(x^2+2x)(2x-2)}{(x^2-2x-1)^2} = -2\frac{2x^2+x+1}{(x^2-2x-1)^2}$$

- Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^2-2x-1}}$ entonces

$$f'(x) = \frac{-2\dfrac{2x^2+x+1}{(x^2-2x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^2-2x-1}}} = -\frac{2x^2+x+1}{(x^2-2x-1)^{3/2}(x^2+2x)^{1/2}}.$$

4.3.4 APLICACIONES DE LA DERIVADA

Al margen de la determinación de las rectas tangentes a una curva, la derivada es útil para indicar la relación que existe entre su signo y el crecimiento o decrecimiento de la función. En concreto, es intuitivamente claro que, si la recta tangente tiene pendiente $f'(x_0)$ positiva, la función f está creciendo en x_0; mientras que la función decrece cuando la recta tangente tiene pendiente negativa, como se ve en la figura 4.19.

La razón es simplemente que, si una función f es creciente en un intervalo (a,b) y x_0 es un valor entre a y b, la diferencia $f(x)-f(x_0)$ será mayor o igual que cero siempre que sea $x_0 < x < b$, pero menor o igual que cero si $a < x < x_0$. Por consiguiente, siempre es

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad \text{y, por tanto,} \qquad f'(x_0) \geq 0$$

siempre que el límite $f'(x_0)$ exista. De modo similar, si (a,b) es un intervalo de decrecimiento de f se tiene

$$\left.\begin{array}{lll} f(x)-f(x_0) \leq 0 & \text{si} & x_0 < x < b \\ f(x)-f(x_0) \geq 0 & \text{si} & a < x < x_0 \end{array}\right\} \quad \text{luego} \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

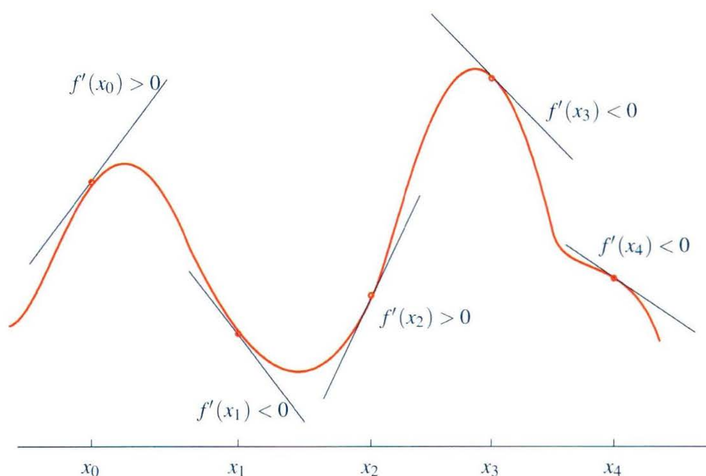


Figura 4.19: Relación entre el crecimiento de una función y su derivada.

y, si existe, el límite es $f'(x_0) \leq 0$. En definitiva, se verifica el siguiente criterio:

CRITERIO DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

Si f es una función definida y derivable en un intervalo I: 4.19

- *Los* **intervalos de crecimiento** *coinciden con los intervalos en que es $f' \geq 0$.*
- *Los* **intervalos de decrecimiento** *coinciden con los intervalos en que es $f' \leq 0$.*

EJEMPLO 4.18 En el ejemplo 4.15 hemos visto que la función $f(x) = x^3 - |x|$ es derivable, excepto en el punto $x_0 = 0$, y tiene derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Desde luego, $3x^2 + 1$ es siempre positivo, de manera que el intervalo $(-\infty, 0)$ es un intervalo de crecimiento de la función f, como muestra la figura 4.17. En cambio, $3x^2 - 1 \leq 0$ equivale a $-1/\sqrt{3} \leq x \leq 1/\sqrt{3}$; de modo que el intervalo $(0, 1/\sqrt{3})$ es un intervalo de decrecimiento de f, mientras que $(1/\sqrt{3}, \infty)$ es un intervalo de crecimiento de f. Se concluye pues, que el punto $x = 1/\sqrt{3}$ es el punto en que la rama derecha de f deja de decrecer para comenzar a aumentar y, en él, la función tiene un mínimo relativo. También f tiene un máximo relativo en el punto

$x = 0$, que separa el intervalo de crecimiento $(-\infty, 0)$ del intervalo de disminución $(0, 1/\sqrt{3})$. Nótese, sin embargo, que f no es derivable en el origen.

EJEMPLO 4.19 Vamos a calcular la derivada de la función del ejemplo 4.7

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2} \qquad \text{si } x \neq 0$$

en cualquier punto $x \neq 0$, pues en $x = 0$ la función no es continua. Aplicando las reglas de derivación:

$$f'(x) = \frac{(6x+2)x^2 - (3x^2+2x-1)2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2}$$

Cuando $x < 0$, desde luego $f'(x) < 0$, de modo que $(-\infty, 0)$ es un intervalo en que f decrece. Para $x > 0$, la desigualdad $f'(x) \geq 0$ equivale a $x \leq 1$; así que f crece en el intervalo $(0, 1)$ y decrece en el intervalo $(1, \infty)$. Tal comportamiento se aprecia en la figura 4.11 y había sido detectado en el ejemplo 7.6; sin embargo el uso de la derivada $f'(x)$ ha simplificado el razonamiento de forma sustancial.

El criterio de que una función crece o decrece según el signo de su derivada tiene una clara interpretación física: Si $f(t)$ describe el movimiento rectilíneo de un móvil que primero se aleja hacia la derecha del origen, para regresar más tarde acercándose al punto de partida, la velocidad $f'(t)$ debe cambiar de sentido; será positiva cuando la posición $f(t)$ aumenta y negativa cuando el móvil regresa. Más aún, en el instante en que la marcha se invierte, el móvil alcanza su máxima distancia al origen.

CONDICIÓN NECESARIA DE MÁXIMO O MÍNIMO RELATIVO

En relación con esto último, la experiencia habitual indica que, para invertir la velocidad de un móvil, éste ha de estar detenido; es decir que su velocidad $f'(t)$ ha de ser nula. Matemáticamente, ello corresponde al resultado:

4.20 *Si f es una función derivable en x_0 y tiene en x_0 un máximo o un mínimo relativo tiene que ser*

$$f'(x_0) = 0$$

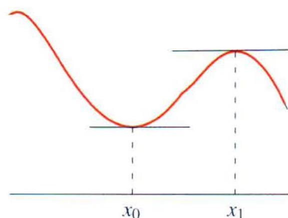


Figura 4.20: Puntos con tangente horizontal.

La razón es simple: si x_0 es por ejemplo un mínimo relativo, para $x > x_0$ suficientemente próximo a x_0 será

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \text{por tanto} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad \text{con lo cual} \quad f'(x_0) \geq 0$$

si $f'(x_0)$ existe. Además, para $x < x_0$ también suficientemente cerca de x_0, será

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \text{por tanto} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad \text{con lo cual} \quad f'(x_0) \leq 0.$$

De ambas relaciones se sigue $f'(x_0) = 0$. El razonamiento es similar en el caso de un máximo relativo x_1 y, en ambos casos, la afirmación es que la recta tangente en los puntos x_0 y x_1 es horizontal, es decir, de pendiente nula como se ve en la figura 4.20.

La utilidad del resultado anterior se traduce en el siguiente procedimiento para calcular los máximos y mínimos relativos de una función.

CÁLCULO DE MÁXIMOS O MÍNIMOS RELATIVOS

4.21

Para una función f derivable en todos los puntos de un intervalo (a,b), la resolución de la ecuación

$$f'(x) = 0 \qquad \text{con}\, x \in (a,b)$$

proporciona todas las abscisas candidatas a ser máximos o mínimos relativos de f en (a,b).

Ello no significa que tenga que haber un máximo o un mínimo relativo en cualquiera de ellas, tal y como mostrará el ejemplo siguiente. Tampoco hay que olvidar la posible existencia de extremos relativos en puntos en los que f no sea derivable.

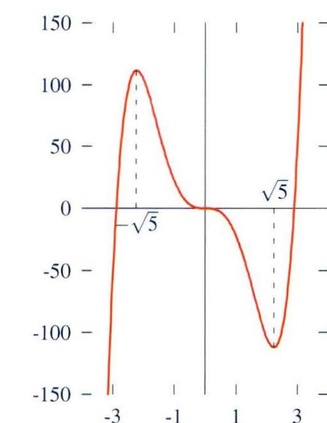


Figura 4.21: La función $f(x) = 3x^5 - 25x^3$.

EJEMPLO 4.20 La función $f(x) = 3x^5 - 25x^3$ (con $-\infty < x < \infty$) aparece representada en la figura 4.21. La derivada en un punto x es

$$f'(x) = 15x^4 - 75x^2$$

Las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$ son

$$x_1 = -\sqrt{5}, \qquad x_2 = 0 \quad \text{y} \quad x_3 = \sqrt{5}.$$

Además $f'(x) \leq 0$ equivale a $x^2 \leq 5$ o bien $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$; de forma que f es decreciente en el intervalo $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ y creciente en el resto. Por consiguiente, hay un máximo relativo en x_1 y un mínimo relativo en x_3; mientras que en $x_2 = 0$ no hay extremo relativo, a pesar de que $f'(0) = 0$. Es el caso de un punto en el que la recta tangente es horizontal, pero no cambia el sentido de crecimiento de f.

Para distinguir los máximos de los mínimos, entre los puntos que verifican $f'(x) = 0$, lo más preciso es recurrir al examen del crecimiento o decrecimiento de f, en los alrededores de cada uno de tales puntos. Pero con frecuencia resulta más expeditivo recurrir al cálculo de la derivada de la función f'.

DERIVADA SEGUNDA DE UNA FUNCIÓN

4.22

Sea f derivable en todos los puntos de un intervalo alrededor de x_0 y f' la función derivada de f. La derivada de f' en x_0, si existe, se denomina la **derivada segunda** *de f y se representa por f''.*

CRITERIO DE MÁXIMO O MÍNIMO RELATIVO DE UNA FUNCIÓN

Con ello se puede formular la siguiente regla para distinguir máximos y mínimos:

4.23

Si f tiene derivada f' que es derivable en x_0, se cumple $f'(x_0) = 0$ y

- *$f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.*
- *$f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.*

De hecho, si $f'(x_0) = 0$, es

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0};$$

de modo que si $f''(x_0) > 0$, el cociente $\dfrac{f'(x)}{(x - x_0)}$ ha de ser positivo cuando x es suficientemente próximo a x_0. Es decir que, cuando x es cercano a x_0 se verifica

$$f'(x) < 0 \quad \text{si } x < x_0 \qquad \text{y} \qquad f'(x) > 0 \quad \text{si } x > x_0;$$

lo cual indica que f decrece a la izquierda de x_0 y crece a su derecha, alcanzando un mínimo relativo en x_0. Un razonamiento similar sirve para detectar la presencia de un máximo relativo cuando es $f''(x_0) < 0$.

En términos gráficos, en los alrededores del mínimo relativo situado en x_0, la pendiente de la tangente $f'(x)$ es creciente, o sea $f''(x_0) > 0$, y $f'(x)$ pasa de ser negativa a ser positiva justo en x_0. En cambio, cerca de un máximo relativo situado en x_1, la pendiente de la tangente $f'(x)$ decrece y $f''(x_1) < 0$.

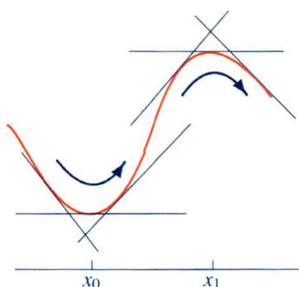


Figura 4.22: Convexidad y concavidad.

La función se denomina **convexa** en aquellos intervalos en que la pendiente de la tangente, $f'(x)$, crece y se denomina **cóncava** cuando la pendiente de la tangente, $f'(x)$, decrece. Los puntos en los que pasa de ser cóncava a ser convexa o viceversa se llaman **puntos de inflexión**.

EJEMPLO 4.21 La función $f(x) = 3x^5 - 25x^3$ tiene derivada $f'(x) = 15x^4 - 75x^2$, como se vio en el ejemplo 7.19. Así pues

$$f''(x) = 60x^3 - 150x$$

En $x_1 = -\sqrt{5}$ es $f''(-\sqrt{5}) = -150\sqrt{5} < 0$, lo que confirma la existencia de un máximo relativo en x_1. En cambio, $f''(\sqrt{5}) = 150\sqrt{5} > 0$, y efectivamente hay un mínimo relativo en $x_3 = \sqrt{5}$. Además es $f''(0) = 0$; y tenía que ser así puesto que en el origen no hay máximo ni mínimo relativos, sino un punto de inflexión.

En situaciones de este último tipo (con $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$), si se quiere evitar el examen del crecimiento o decrecimiento de f en los alrededores de x_0, hay que recurrir al valor de la *derivada tercera* $f'''(x_0)$ para dilucidar si hay en x_0 un mínimo relativo, un máximo relativo o ninguna de las dos cosas. Pero el estudio no se proseguirá hasta esos extremos.

CUESTIONES DE AUTOEVALUACIÓN

4.1 El intervalo abierto $(-2,1)$ es el conjunto de los números reales x que verifican:

a) $-2 \leq x \leq 1$.

b) $-2 < x < 1$.

c) $x < -2$ ó $x > 1$.

4.2 El intervalo abierto $(-\infty,0)$ es el conjunto de los números reales x que verifican:

a) $x \leq 0$.

b) $x > 0$.

c) $x < 0$.

4.3 El conjunto de los números reales, x, que verifican $0 \leq x < 1$, es igual al intervalo:

a) $[0,1)$.

b) $(0,1)$.

c) $(0,1]$.

4.4 La expresión $f(x) = 1/x$ define una función $f\colon I \mapsto I\!R$ cuando:

a) $I = (-\infty,2]$.

b) $I = (-1,1]$.

c) $I = [1,\infty)$.

4.5 El gráfico de la función $f(x) = x^2 + x + 1$ pasa por el punto

a) $(2,5)$.

b) $(2,3)$.

c) $(2,7)$.

4.6 El gráfico de la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$ no pasa por el punto

a) $(2,5)$.

b) $(-1,2)$.

c) $(-2,3)$.

4.7 El gráfico de la función $f(x) = 1/x$, definida en el intervalo $(0,\infty)$, pasa por los puntos:

a) $(2,0.5)$ y $(4,1)$.

b) $(2,0.5)$ y $(4,0.25)$.

c) $(0.5,3)$ y $(0.25,4)$.

4.8 Si f es la función $f(x) = x^2 - 4$, definida en $(-\infty,\infty)$, el punto $(2,1)$ está

a) por encima de la gráfica de f.

b) por debajo de la gráfica de f.

c) sobre la gráfica de f.

4.9 Si f es la función $f(x) = \sqrt{x}$, definida en $(0,\infty)$, el punto $(3,1.5)$ está

a) por encima de la gráfica de f.

b) por debajo de la gráfica de f.

c) sobre la gráfica de f.

4.10 Si f es la función $f(x) = x^2$, definida en $(-\infty,\infty)$, y g es la función $g(x) = 2x + 1$, definida en $(-\infty,\infty)$, el punto $(2.5,7)$ está

a) por debajo de la gráfica de f y por encima de la gráfica de g.

b) por debajo de la gráfica de f y por debajo de la gráfica de g.

c) por encima de la gráfica de f y por encima de la gráfica de g.

4.11 Si f es creciente en el intervalo $(-3,0)$, se cumple:

a) $f(-1) \leq f(-2)$.

b) $f(-1) \geq f(-1/2)$.

c) $f(-1/2) \geq f(-2)$.

4.12 Si f es creciente en el intervalo $(-4,1)$ no puede ser

a) $f(-3) > f(-1)$.

b) $f(1/2) > f(-1/2)$.

c) $f(-3) = f(-2)$.

4.13 Si f es decreciente en el intervalo $(-2,2)$ tiene que ser

a) $f(-1) \leq f(0)$.

b) $f(-3/2) \geq f(-1/2)$.

c) $f(-1/2) \leq f(1/2)$.

4.14 Si f es decreciente en el intervalo $(-3,1)$ no puede ser

a) $f(-4/3) < f(-2/3)$.

b) $f(-4/3) < f(-5/3)$.

c) $f(-7/3) = f(-4/3)$.

4.15 La función $f(x) = x^2$ es:

a) creciente en el intervalo $(-2,-1)$.

b) creciente en el intervalo $(2,3)$.

c) decreciente en el intervalo $(1,2)$.

4.16 El límite de $f(x) = x^2 + x - 1$ cuando $x \to -1$ es

a) 0.

b) -1.

c) 3.

4.17 El límite de $f(x) = \sqrt{x-1}$ cuando $x \to 2$ es

a) 1.

b) -1.

c) no existe el límite.

4.18 Si f tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y existe $\text{lím}_{x \to 0} f(x)$, se verifica

a) $\text{lím}_{x \to 0} f(x) > f(0)$.

b) $\text{lím}_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

c) $\text{lím}_{x \to 0} f(x) \geq f(0)$.

4.19 Si f tiene un máximo relativo en $x = 0$ y existe $\text{lím}_{x \to 0} f(x)$, se verifica

a) $\text{lím}_{x \to 0} f(x) \leq f(0)$.

b) $\text{lím}_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

c) $\text{lím}_{x \to 0} f(x) < f(0)$.

4.20 La función $f(x) = (x-1)^2$

a) es continua en $x = 1$ y $x = 2$.

b) es discontinua en $x = 1$ y continua en $x = 2$.

c) es discontinua en $x = 1$ y $x = 2$.

4.21 La función $f(x) = x^2 + x + 1$

a) es continua en todos los puntos.

b) es discontinua en $x = 0$.

c) es discontinua en $x = 1$.

4.22 La función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

a) es continua en todos los puntos.

b) es discontinua en $x = 0$.

c) es discontinua en $x = -1$.

4.23 La función definida como

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1-x}$$

para $x \neq 1$, y $f(1) = c$,

a) tiene una discontinuidad en $x = 1$, independientemente del valor de c.

b) es continua en $x = 1$ si $c = 2$.

c) es continua en $x = 1$ si $c = 0$.

4.24 La función $f(x) = |x|$, que se define como $f(x) = -x$ si $x < 0$ y $f(x) = x$ si $x \geq 0$

a) es continua en todos los puntos.

b) tiene una única discontinuidad.

c) tiene dos discontinuidades.

4.25 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Toda función continua en un punto x_0 es derivable en ese punto.

b) Toda función derivable en un punto x_0 es continua en ese punto.

c) Algunas funciones derivables en un punto x_0 no son continuas en ese punto.

4.26 La función $f(x) = x^2$ tiene derivada

a) $f'(x) = 2x^2$.

b) $f'(x) = 2x$.

c) $f'(x) = 2$.

4.27 La función $f(x) = x^3 + x$ tiene derivada

a) $f'(x) = 3x^3 + x$.

b) $f'(x) = 3x^2 + x$.

c) $f'(x) = 3x^2 + 1$.

4.28 La función $f(x) = \sqrt{x}$ tiene derivada

a) $f'(x) = 2\sqrt{x}$.

b) $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

c) $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

4.29 La función $(2-3x)^3$ tiene derivada

a) $3(2-3x)^2$.

b) $-9(2-3x)^2$.

c) $-6(2-3x)^2$.

4.30 Para $x \neq 0$, la función $f(x) = \dfrac{3}{x}$ tiene derivada

a) $f'(x) = -3/x^2$.

b) $f'(x) = 3/x^2$.

c) $f'(x) = 2/x^3$.

4.31 La función $f(x) = (x+1)(x^2+1)$ tiene derivada

a) $3x^2 + 2x + 1$.

b) $x^2 + 2x + 1$.

c) $2x^2 + 2x + 1$.

4.32 La derivada de la función $f(x) = x^3 - x^2$ en el punto $x = 3$, es igual a:

a) 27.

b) 1.

c) 21.

4.33 La derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $x = 1$ es igual a:

a) 0.

b) -1.

c) $1/2$.

4.34 La derivada de la función $f(x) = \sqrt{x} - x$ cumple:

a) $f'(1) = -5/6$.

b) $f'(4) = -3/4$.

c) $f'(9) = -1/2$.

4.35 La derivada de la función $f(x) = 6x^2 - (x+1)^3$ no cumple

a) $f'(0) = -3$.

b) $f'(1) = 0$.

c) $f'(-1) = -8$.

4.36 La posición de un móvil sobre una recta, el instante t, viene dada por la función $f(t) = t^2 - t$. La velocidad del móvil en el instante t es:

a) $v(t) = 2t - 1$.

b) $v(t) = 2t - 2/t$.

c) $v(t) = t^2 - t$.

4.37 La posición de un móvil sobre una recta, el instante t, viene dada por la función $f(t) = t^2 + t$. La velocidad del móvil en el instante $t = 1$ es:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

4.38 La posición de un móvil sobre una recta, el instante t, viene dada por la función $f(t) = 3t - t^2$. Su posición en el instante en que su velocidad es 0 es:

a) $3/2$.

b) $9/4$.

c) $3/4$.

4.39 La posición de un móvil sobre una recta, el instante t, viene dada por la función $f(t) = 2t^3 - 3t$. La velocidad del móvil verifica

a) $v(0) = -3$.

b) $v(1) = -3$.

c) $v(\sqrt{2}) = 8$.

4.40 La pendiente de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x$ en el punto de abscisa $x = 1$ vale

a) -1.

b) 1.

c) 2.

4.41 La pendiente de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^4 - x^3$ en el punto de abscisa $x = -1$ vale

a) 1.

b) -8.

c) -7.

4.42 La tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x + 1$ es paralela a la recta $y = 2x - 3$, en el punto de abscisa

a) $x = -1/2$.

b) $x = 1/2$.

c) $x = -3/2$.

4.43 La tangente a la gráfica de la función $f(x) = 1 - x^2$ es perpendicular a la recta $y = x$, en el punto de abscisa

a) $x = 1/2$.

b) $x = 3/2$.

c) $x = -1/2$.

4.44 La recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 2x$ en el punto de abscisa $x = 1$ tiene por ecuación:

a) $y = x + 2$.

b) $y = 2x - 3$.

c) $y = 3x - 1$.

4.45 La recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 1/x$, definida en el intervalo $(0, \infty)$, por el punto en que la recta $2x - 2y + 3 = 0$ corta a la gráfica de $f(x)$, tiene por ecuación:

a) $4y - x - 3 = 0$.

b) $4y + x - 4 = 0$.

c) $4x + y - 4 = 0$.

4.46 La recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 1/x$, definida en el intervalo $(0, \infty)$, que es paralela a la recta $9x + y = 0$, tiene por ecuación:

a) $9x + y - 3 = 0$.

b) $9x + y - 6 = 0$.

c) $9x + y - 9 = 0$.

4.47 Si la tangente a la gráfica de la función $f(x)$, en el punto de abscisa $x = 2$, tiene por ecuación $3x - 2y + 4 = 0$ se verifica

a) $f(2) = 5$ y $f'(2) = 1/2$.

b) $f(2) = 5$ y $f'(2) = 3/2$.

c) $f(2) = -5$ y $f'(2) = -3/2$.

4.48 La función $f(x) = 1/x$, definida para $x \neq 0$, es:

a) decreciente en el intervalo $[1,2]$.

b) creciente en el intervalo $[-2,-1]$.

c) creciente en el intervalo $[1,2]$.

4.49 La derivada segunda de la función $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ es igual a:

a) $3x - 1$.

b) $6x - 2$.

c) $3x^2 - 2x + 1$.

4.50 La derivada segunda de $f(x) = x - 4\sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 4$ vale

a) $-1/2$.

b) $-1/4$.

c) $1/8$.

4.51 La función $f(x) = x^2 - 3x + 5$ tiene un mínimo relativo en

a) $x = 2$.

b) $x = 3/2$.

c) $x = -1/2$.

4.52 La función $f(x) = x^3 - 3x + 6$ tiene un máximo relativo en el punto

a) $x = 1$.

b) $x = -1$.

c) $x = 0$.

4.53 La función $f(x) = x^3 - x^2$ en el intervalo $[1,2]$

a) es convexa.

b) es cóncava.

c) no es cóncava ni convexa.

4.54 La función $f(x) = 11 + x^2$ definida en el intervalo $(0,\infty)$

a) es convexa.

b) es cóncava.

c) no es cóncava ni convexa.

4.55 La función $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en el intervalo $(0,\infty)$

a) es creciente.

b) es convexa.

c) es cóncava.

SOLUCIONES DE LAS CUESTIONES DE AUTOEVALUACIÓN

4.1 *Respuesta correcta: b*

Por definición, el intervalo abierto $(-2,1)$ está formado por todos los números reales que cumplen $-2 < x < 1$.

4.2 *Respuesta correcta: c*

Por definición, el intervalo abierto $(-\infty,0)$ está formado por todos los números reales que cumplen $x < 0$.

4.3 *Respuesta correcta: a*

Por definición, el conjunto números reales, x, que cumplen $0 \leq x < 1$ es el intervalo semicerrado en 0, semiabierto en 1, que se representa por $[0,1)$.

4.4 *Respuesta correcta: c*

El denominador se anula cuando $x = 0$, así que la expresión de f define un función en cualquier intervalo que no contenga el valor 0.

4.5 *Respuesta correcta: c*

Es $f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$, luego el gráfico de f pasa por el punto $(2,7)$.

4.6 *Respuesta correcta: c*

Como $f(2) = 5$ y $f(-1) = 2$, el gráfico de f pasa por los puntos $(2,5)$ y $(-1,2)$. En cambio $f(-2) = -3$ y la gráfica no pasa por $(-2,3)$.

4.7 *Respuesta correcta: b*

Puesto que $f(2) = 1/2 = 0.5$, la gráfica de la función pasa por $(2,0.5)$ y, dado que $f(4) = 1/4 = 0.25$, también pasa por el punto $(4,0.25)$.

4.8 *Respuesta correcta: a*

Es $f(2) = 2^2 - 4 = 0$, luego $f(2) < 1$ y el punto $(2,1)$ está por encima de la gráfica de f.

4.9 *Respuesta correcta: b*

Es $f(3) = \sqrt{3} \approx 1.73$, luego $f(3) > 1.5$ y el punto $(3,1.5)$ está por debajo de la gráfica de f.

4.10 *Respuesta correcta: c*

Puesto que se tienen $f(2.5) = 6.5 < 7$ y $g(2.5) = 6 < 7$, el punto se encuentra por encima de ambas gráficas.

4.11 *Respuesta correcta: c*

Como $-2 < -1 < -1/2$, si f es creciente será $f(-2) \leq f(-1) \leq f(-1/2)$.

4.12 *Respuesta correcta: a*

Como $-3 < -2$ y $-1/2 < 1/2$, si f es creciente tiene que ser $f(-3) \leq f(-2)$ y $f(-1/2) \leq f(1/2)$, compatibles con (c) y (b). Pero $f(-3) \leq f(-1)$ no es compatible con (a).

4.13 *Respuesta correcta: b*

Dado que $-3/2 < -1 < -1/2 < 0 < 1/2$, si f es decreciente, será $f(-3/2) \geq f(-1) \geq f(-1/2) \geq f(0) \geq f(1/2)$.

4.14 *Respuesta correcta: a*

Puesto que $-7/3 < -5/3 < -4/3 < -2/3$, si f es decreciente ha de ser $f(-7/3) \geq f(-5/3) \geq f(-4/3) \geq f(-2/3)$.

4.15 *Respuesta correcta: b*

Dados dos números reales, x_1, x_2, tales que $x_1 < x_2$, se tiene

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

puesto que suponemos $x_1 < x_2$, siempre se cumple $x_2 - x_1 > 0$. Si $x_1, x_2 \in (-2,-1)$, entonces $x_2 + x_1 < 0$ y $f(x_2) - f(x_1) < 0$, luego f es decreciente en el intervalo $(-2,-1)$. Si $x_1, x_2 \in (2,3)$, entonces $x_2 + x_1 > 0$ y $f(x_2) - f(x_1) > 0$, luego f es creciente en el intervalo $(2,3)$. Si $x_1, x_2 \in (1,2)$, entonces $x_2 + x_1 > 0$ y $f(x_2) - f(x_1) > 0$, luego f es creciente en el intervalo $(1,2)$.

4.16 *Respuesta correcta: b*

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -1} f(x) &= \lim_{x \to -1} (x^2 + x - 1) \\ &= (-1)^2 + (-1) - 1\end{aligned}$$

luego es límite es igual a -1.

4.17 *Respuesta correcta: a*

$\lim_{x\to 2} f(x) = \sqrt{2-1} = 1$

4.18 *Respuesta correcta: c*

Como es $f(x) \geq f(0)$ en algún intervalo (a,b) alrededor de 0, si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, tiene que ser

$$\lim_{x\to 0} f(x) \geq \lim_{x\to 0} f(0) = f(0)$$

4.19 *Respuesta correcta: a*

Como es $f(x) \leq f(0)$ en algún intervalo (a,b) alrededor de 0, si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, tiene que ser

$$\lim_{x\to 0} f(x) \leq \lim_{x\to 0} f(0) = f(0)$$

4.20 *Respuesta correcta: a*

Por una parte, se tiene $f(1) = (1-1)^2 = 0$ y $f(2) = (2-1)^2 = 1$. Por otra parte, resulta

$$\lim_{x\to 1} f(x) = (\lim_{x\to 1}(x-1))^2 = 0$$

y

$$\lim_{x\to 2} f(x) = (\lim_{x\to 2}(x-1))^2 = 1$$

luego $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ y $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. La función es continua en ambos puntos.

4.21 *Respuesta correcta: a*

La función es un polinomio, suma de funciones continuas en todos los puntos y, en consecuencia, es continua en todos los puntos.

4.22 *Respuesta correcta: a*

Puesto que el denominador de la fracción $1+x^2$ no se anula en ningún punto y $f(x)$ es cociente de funciones continuas, la función es continua en todos los puntos.

4.23 *Respuesta correcta: b*

Para $x \neq 1$ es

$$f(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1+x$$

luego $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Si $c = 2$, entonces $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ y la función es continua.

4.24 *Respuesta correcta: a*

En cada punto del intervalo $(-\infty,0)$, la función $f(x)$ coincide con el polinomio $g(x) = -x$, que es una función continua. Por consiguiente, $f(x)$ es continua si $x \in (-\infty,0)$.

En cada punto del intervalo $(0,\infty)$, la función $f(x)$ coincide con el polinomio $h(x) = x$, que es una función continua. Por consiguiente, $f(x)$ es continua si $x \in (0,\infty)$.

Sólo cabe la duda de si será continua en el punto $x = 0$. Por la definición de la función, se sigue $f(0) = 0$. Ahora, si $x \to 0$ y $x < 0$, se tiene

$$\lim_{x<0, x\to 0} f(x) = \lim_{x<0, x\to 0} -x = 0$$

y si $x \to 0$ y $x > 0$, resulta

$$\lim_{x>0, x\to 0} f(x) = \lim_{x>0, x\to 0} x = 0$$

luego existe el límite en $x = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, y es igual a $f(0)$. La función es continua en todos los puntos.

4.25 *Respuesta correcta: b*

Toda función derivable en un punto x_0 es continua en ese punto. Hay funciones continuas en un punto que no son derivables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$, que se define:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es continua en $x_0 = 0$, pero no es derivable en ese punto.

4.26 *Respuesta correcta: b*

El una consecuencia de la regla **(v)** del cálculo con derivadas.

$$(x^2)' = 2x^{2-1}(x)'$$

y $(x)' = 1$, luego $f'(x) = 2x$.

4.27 *Respuesta correcta: c*

El una consecuencia de las reglas **(i)** y **(v)** del cálculo con derivadas. Por un una parte, se tiene

$$(x^3+x)' = (x^3)' + (x)'$$

y, por otra, $(x^3)' = 3x^2$ y $(x)' = 1$, luego $f'(x) = 3x^2 + 1$.

4.28 *Respuesta correcta: c*

El una consecuencia de la regla **(v)** del cálculo con derivadas.

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

luego $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4.29 *Respuesta correcta: b*

Si aplicamos la regla **(v)**, resulta

$$\left((2-3x)^3\right)' = 3(2-3x)^{3-1}(2-3x)'$$

Puesto que $(2-3x)' = -3$, resulta $f'(x) = -9(2-3x)^2$.

4.30 *Respuesta correcta: a*

Si aplicamos la regla **(iii)**, para la derivada de un cociente, resulta

$$\left(\frac{3}{x}\right)' = \frac{(3)'x - 3(x)'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 3 \cdot 1}{x^2}$$

luego $f'(x) = -3/x^2$.

4.31 *Respuesta correcta: a*

La función f se puede interpretar como un producto funciones y podemos aplicar la regla **(ii)**.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)'(x^2+1) + (x+1)(x^2+1)' \\ &= (x^2+1) + (x+1)2x \end{aligned}$$

luego $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

4.32 *Respuesta correcta: c*

La función es una suma de funciones; calculamos su derivada por la regla **(i)**.

$$f'(x) = (x^3)' - (x^2)' = 3x^2 - 2x$$

luego $f'(3) = 27 - 6 = 21$.

4.33 *Respuesta correcta: c*

La derivada de f es $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, luego $f'(1) = 1/2$.

4.34 *Respuesta correcta: b*

La derivada de f es igual a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

luego se tiene $f'(1) = -1/2$, $f'(4) = -3/4$ y $f'(9) = -5/6$.

4.35 *Respuesta correcta: c*

La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = -3x^2 + 6x - 3$ y se cumple $f'(0) = -3$, $f'(1) = 0$ y $f'(-1) = -12$.

4.36 *Respuesta correcta: a*

La velocidad del móvil es la derivada de la función que describe su posición en función del tiempo, luego $v(t) = f'(t) = 2t - 1$.

4.37 *Respuesta correcta: c*

La velocidad del móvil es la derivada de la función que describe su posición en función del tiempo, luego vale $v(t) = f'(t) = 2t + 1$. La velocidad en el instante $t = 1$ es $v(1) = f'(1) = 2 + 1$.

4.38 *Respuesta correcta: b*

La velocidad del móvil es la derivada de la función que describe su posición en función del tiempo, luego vale $v(t) = f'(t) = 3 - 2t$. La velocidad es igual a 0 en el instante t que cumple $3 - 2t = 0$, es decir $t = 3/2$. En ese instante, la posición es $f(3/4) = 9/2 - 9/4 = 9/4$.

4.39 *Respuesta correcta: a*

La velocidad del móvil es la derivada de la función que describe su posición en función del tiempo y vale $v(t) = f'(t) = 6t^2 - 3$, de modo que $v(0) = -3$, $v(1) = 3$ y $v(\sqrt{2}) = -9$.

4.40 *Respuesta correcta: b*

La pendiente de la recta tangente en un punto a la gráfica de una función $f(x)$ es igual al valor de la derivada en ese punto, supuesto que la función es derivable en dicho punto. Como $f'(x) = 2x - 1$, la pendiente vale $f'(1) = 2 - 1 = 1$.

4.41 *Respuesta correcta: c*

La pendiente de la recta tangente en un punto a la gráfica de una función $f(x)$ es igual al valor de la derivada en ese punto, supuesto que la función es derivable en dicho punto. La derivada de la función es $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$, luego $f'(-1) = -4 - 3 = -7$.

4.42 *Respuesta correcta: b*

Para que la tangente a la gráfica sea paralela a la recta $y = 2x - 3$ debe tener pendiente igual a 2. La derivada de la función es $f'(x) = 2x + 1$. Para encontrar los puntos en los que la pendiente vale 2, resolveremos la ecuación $f'(x) = 2$, es decir $2x + 1 = 2$, lo que produce $x = 1/2$. Se comprueba que esta solución es correcta, ya que $f'(-1/2) = 0$, $f'(1/2) = 2$ y $f'(-3/2) = -2$.

4.43 *Respuesta correcta: a*

Para que la tangente a la gráfica sea perpendicular a la recta $y = x$ debe tener pendiente igual a -1. La derivada de la función es $f'(x) = -2x$. Para encontrar los puntos en los que la pendiente vale -1, resolveremos la ecuación $f'(x) = -1$, es decir $-2x = -1$, lo que produce $x = 1/2$. Se comprueba que esta solución es correcta, ya que $f'(1/2) = -1$, $f'(3/2) = -3$ y $f'(-1/2) = 1$.

4.44 *Respuesta correcta: b*

La derivada de la función es $f'(x) = 4x^3 - 2$; la pendiente de la tangente es $f'(1) = 2$ y pasa por el punto de abscisa $x = 1$ y ordenada $y = f(1) = -1$. La ecuación de la tangente es

$$y - (-1) = 2(x - 1)$$

o bien $y = 2x - 3$.

4.45 *Respuesta correcta: c*

Primero calcularemos el punto en que la recta $2x - 2y - 3 = 0$ corta a la gráfica de la función y, luego, trazaremos la tangente a la gráfica por ese punto.

Para hallar el punto de corte, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = 1/x \\ 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Reemplazamos y por $1/x$ en la segunda ecuación y, tras simplificar, resulta $2x^2 + 3x - 2 = 0$, que tiene dos soluciones:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4}$$

luego $x = 1/2$ ó $x = -2$. Como $f(x)$ sólo está definida sobre los números positivos, el punto de corte tiene abscisa $x = 1/2$ y ordenada $y = f(1/2) = 2$; el punto de corte es $(1/2, 2)$. La derivada de la función es $f'(x) = -1/x^2$; la pendiente de la tangente es $f'(1/2) = -4$. La ecuación de la tangente es

$$y - 2 = -4(x - \frac{1}{2})$$

o bien $4x + y - 4 = 0$.

4.46 *Respuesta correcta: b*

La recta $9x + y = 0$ tiene pendiente igual a -9. Para hallar en que punto la pendiente de la tangente a la gráfica tiene esa misma pendiente, hacemos $f'(x) = -1/x^2 = -9$, luego $x = 1/3$, y el punto tiene coordenadas $(1/3, 3)$. La ecuación de la tangente a la gráfica en ese punto es

$$y - 3 = -9(x - \frac{1}{3})$$

o bien $9x + y - 6 = 0$.

4.47 *Respuesta correcta: b*

Puesto que la abscisa del punto de tangencia es $x = 2$, la ecuación de la recta tangente es

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

El valor de $f'(2)$ es igual a la pendiente de la tangente, luego $f'(2) = 3/2$

$$y - f(2) = \frac{3}{2}(x - 2)$$

o bien $3x - 2y - 6 + 2f(2) = 0$; luego $-6 + 2f(2) = 4$, y $f(2) = 5$.

4.48 *Respuesta correcta: a*

La derivada de la función es $f'(x) = -1/x^2$, luego $f'(x) < 0$ en el intervalo $[1, 2]$ y en el intervalo $[-2, -1]$, por lo que es decreciente en ambos intervalos.

4.49 *Respuesta correcta: b*

La derivada primera es $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$; la derivada segunda es la derivada de la derivada primera, y es igual a $f''(x) = 6x - 2$.

4.50 *Respuesta correcta: c*

La primera derivada de la función es

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{2/\sqrt{x}} = 1 - 2x^{-\frac{1}{2}}$$

La segunda derivada es igual a

$$f''(x) = 0 - (-\frac{1}{2})2x^{-\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{3}{2}}$$

luego $f''(4) = 4^{-3/2} = 1/8$.

4.51 *Respuesta correcta: b*

La derivada de la función es $f'(x) = 2x - 3$; $f'(x)$ se anula en los puntos de verifican $2x - 3 = 0$; la única solución es $x = 3/2$, que corresponde a un mínimo relativo, ya que pues $f'(x) < 0$, si $x < 3/2$, y $f'(x) > 0$, si $x > 3/2$ (la función es decreciente antes del mínimo y creciente después). Si empleamos el criterio de la segunda derivada para estudiar el carácter del punto, encontraremos que $f''(3/2) = 2 > 0$, luego se trata de un mínimo.

4.52 *Respuesta correcta: b*

La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x)$ se anula en los puntos que verifican $3x^2 - 3 = 0$, o bien $x^2 - 1 = 0$. Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son $x = 1$ y $x = -1$. La segunda derivada es igual a $f''(x) = 6x$. Encontramos que $f''(-1) = -6$ y $f''(1) = 6$. Luego $x = -1$ es un máximo relativo y $x = 1$ un mínimo relativo.

4.53 *Respuesta correcta: a*

La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 2x$; la segunda derivada es $f''(x) = 6x - 2$. El signo de la segunda derivada permite estudiar en qué intervalos la primera derivada es creciente o decreciente. En el intervalo $[1,2]$ es $f''(x) > 0$, luego la primera derivada es creciente; esto supone que la pendiente de la tangente a la gráfica de $f(x)$ crece y que la función es convexa.

4.54 *Respuesta correcta: c*

La primera derivada de la función es $-2x/(1+x^2)^2$; la segunda derivada es $f''(x) = 2(3x^2 - 1)/(1+x^2)^3$. El numerador de esta expresión se anula en los puntos $-1\sqrt{3}$ y $1\sqrt{3}$. Si x es un punto del intervalo $(0, 1/\sqrt{3})$, entonces $f''(x) < 0$ y si x es un punto del intervalo $(1/\sqrt{3}, \infty)$, entonces $f''(x) > 0$. Se sigue que $f'(x)$ es decreciente en el intervalo $(0, 1\sqrt{3})$ y creciente en el intervalo $(1/\sqrt{3}, \infty)$, luego la función no es convexa ni cóncava.

4.55 *Respuesta correcta: b*

La derivada de la función es $f'(x) = -1/x^2$; la segunda derivada es $f''(x) = 2/x^3$. La primera derivada es siempre negativa, cualquiera que sea $x > 0$, luego la función es decreciente. Si $x > 0$, entonces $f''(x) > 0$, luego la primera derivada es creciente; esto supone que la pendiente de la tangente a la gráfica de $f(x)$ crece y que la función es convexa.

TEMAS COMPLEMENTARIOS

4.4 FUNCIONES ELEMENTALES

4.5 IDEA DEL CÁLCULO INTEGRAL

4.4 FUNCIONES ELEMENTALES

Algunas funciones tienen una importancia especial debido a la frecuencia con la que aparecen en las aplicaciones, bien directamente o como "átomos" para componer funciones más complejas. De hecho, todas ellas han aparecido por diferentes motivos a lo largo de los capítulos anteriores, con más énfasis en sus valores concretos que en su carácter funcional, que se describirá brevemente en los próximos apartados.

4.4.1 FUNCIONES POTENCIALES

En la sección 2.4.4 se introdujo el concepto de potencia x^c para cualquier base $x > 0$ y cualquier exponente c real. Ello da lugar a considerar la siguiente familia de funciones:

FUNCIÓN POTENCIAL

4.24

Se llama **función potencial** *a una función de la forma:*

$$f(x) = x^c$$

donde c es una constante real.

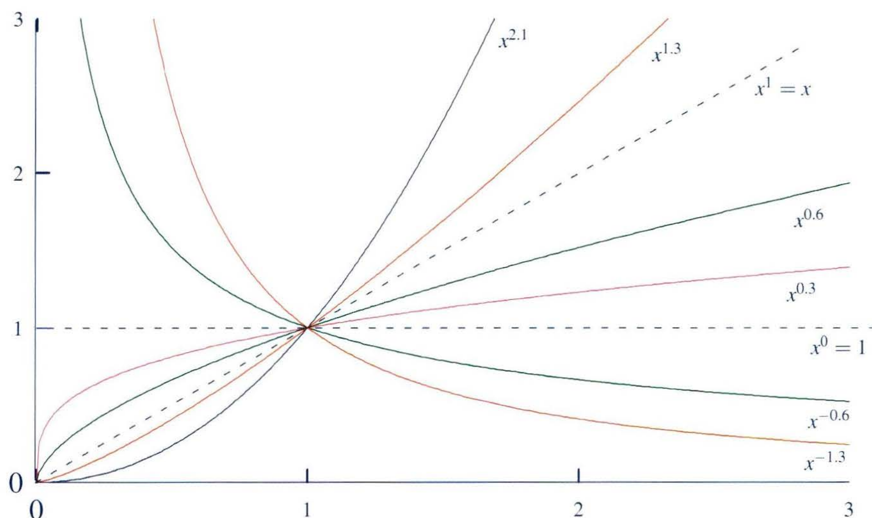


Figura 4.23: Funciones potenciales.

La gráfica de la función potencial puede observarse en la figura 4.23 para

diversos valores de c. La derivada de f es

$$f'(x) = cx^{c-1}$$

Así que los valores de $f'(x)$ serán positivos o negativos según sea el signo de c; según lo cual:

4.25

- *Si $c > 0$ la función potencial es creciente.*
- *Si $c < 0$ la función potencial es decreciente.*

En el caso de que x^c sea creciente, es decir $c > 0$, la derivada segunda

$$f''(x) = c(c-1)x^{c-2}$$

permite distinguir dos situaciones:

4.26

- *Si $c < 1$, entonces $f'' < 0$; lo que indica que f' es decreciente y la tangente tiene cada vez menos pendiente; por tanto f es* cóncava.
- *Si $c > 1$, entonces $f'' > 0$, lo que indica que f' es creciente y la tangente tiene cada vez más pendiente; por tanto f es* convexa.

Supongamos ahora que la gráfica de $f(x) = x^c$ pasa por el punto (x, y). Entonces ha de ser $y = x^c$, de donde $x = y^{1/c}$ y la gráfica de $g(x) = x^{1/c}$ pasa por el punto (y, x). Resulta entonces:

4.27

Las gráficas de x^c y $x^{1/c}$ son siempre simétricas respecto a la diagonal principal.

Más importante, de cara a evitar errores frecuentes, es observar el orden relativo en que se encuentran las curvas x^c. Sean $c_1 < c_2$; entonces

- Si $x < 1$ se cumple

  $x^{c_2} < x^{c_1}$ (puesto que $x^{c_2 - c_1} < 1$ por ser $x < 1$ y $c_2 - c_1 > 0$);

- Si $x > 1$ se cumple

$$x^{c_2} > x^{c_1} \qquad (\text{ya que } \ x^{c_2 - c_1} > 1).$$

En resumen:

Al crecer c, x^c decrece o crece según que sea $x < 1$ o $x > 1$. 4.28

En el caso en que c sea entero, las funciones $x^{-7}, x^{-4}, x^2, x^5 \ldots$ tienen sentido para $x < 0$. Pero la parte de la gráfica correspondiente a $x \in (-\infty, 0)$ se genera por una simple simetría:

- Si $c = 2k$ es un número par:

$$(-x)^{2k} = (-1)^{2k} x^{2k} = x^{2k}$$

- Si $c = 2k+1$ es un número impar:

$$(-x)^{2k+1} = (-1)^{2k+1} x^{2k+1} = -x^{2k+1}$$

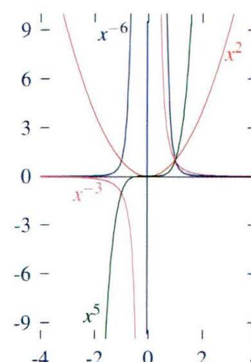


Figura 4.24: Funciones potenciales con exponente entero.

Entonces, como puede apreciarse en la figura 4.24:

4.29

- *Si c es un número entero par la gráfica de la función x^c es simétrica respecto del eje y.*
- *Si c es un número entero impar la gráfica de la función x^c es simétrica respecto del origen.*

4.4.2 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Al contrario de la sección anterior, la potencia x^c puede considerarse como función de c, en vez de como función de x. Con la terminología habitual, ello supone considerar la siguiente familia de funciones:

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Se llama **función exponencial** *a una función de la forma* 4.30

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ es una constante positiva y x puede variar en $(-\infty, \infty)$.

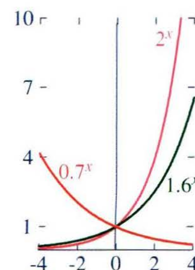


Figura 4.25: Funciones exponenciales.

Los valores de una función exponencial son siempre positivos y las gráficas para algunos valores de a aparecen en la figura 4.25. Todas las funciones exponenciales pasan por el punto $(0,1)$ puesto que para cualquier número a se cumple $a^0 = 1$. Por otra parte, como $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$, la curva correspondiente a $\frac{1}{a}$ es simétrica de la asociada a a respecto al eje vertical $x = 0$. Según

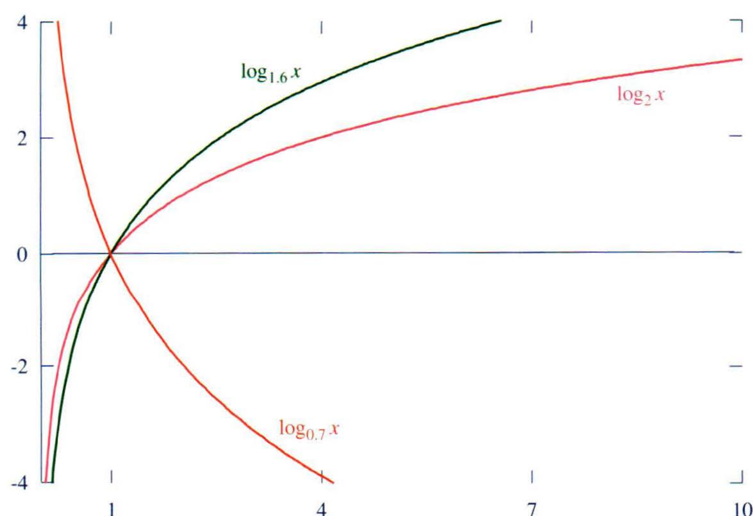


Figura 4.26: Funciones logarítmicas.

se ha observado al final de la sección anterior, a^x es creciente cuando $a > 1$ y decreciente cuando $a < 1$, en concordancia con la simetría mencionada.

Dado que si $a^x = y$ es $x = \log_a y$, como se ha estudiado en la Sección 2.7, podemos considerar la siguiente familia de funciones:

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

4.31 *Se llama* **función logarítmica** *a una función de la forma*

$$g(x) = \log_a x$$

donde $a > 0$ es una constante positiva y x puede variar en $(0, \infty)$.

Podemos que observar que si hacemos la composición de una aplicación logarítmica y una exponencial, en el sentido del apartado 1.3.4, para un mismo a, se obtiene la función identidad, es decir,

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \log_a (a^x) = x$$

y también

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = a^{\log_a x} = x$$

Esto nos indica que una de las funciones es inversa de la otra. Este hecho puede ponerse de manifiesto al observar que las gráficas de la funciones

logarítmicas son simétricas de las exponenciales respecto a la diagonal. La figura 4.26 que representa las funciones logarítmicas tiene la peculiaridad de que mirada en sentido transversal y al trasluz, coincide con la figura 4.25.

El cálculo de la derivada de $f(x) = a^x$ supone calcular

$$\lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}\,\frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0}\, l(a)$$

donde

$$l(a) = \lim_{u\to 0} \frac{a^u - 1}{u}.$$

son los valores en que cortan al eje $x = 0$ las gráficas de las funciones $(a^u - 1)/u$ representadas en la figura 4.27. Así pues $f'(x) = a^x l(a)$. Ahora bien, la relación $a^x = b^{x\log_b a}$, derivada en ambos miembros, muestra que

$$a^x l(a) = b^{x\log_b a}\, l(b)\, \log_b a \qquad \text{y, por tanto,} \qquad l(a) = l(b) \log_b a.$$

La base $e \simeq 2.718281\ldots$ de los logaritmos naturales o neperianos (en honor a John Napier) es el único valor para el cual $l(e) = 1$; de manera que $l(a) = \log_e a$ y, en definitiva, resulta

$$f'(x) = a^x \log_e a.$$

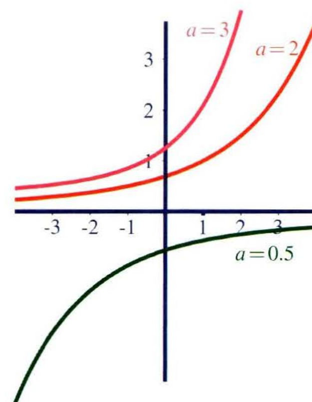
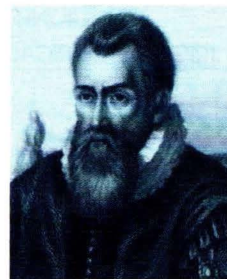


Figura 4.27: Gráfica de las funciones $(a^u - 1)/u$



John Napier (1550-1617).

De entre las funciones exponenciales destaca entonces, por su simplicidad, la exponencial natural, de base e:

$$f(x) = e^x$$

cuya gráfica aparece en la figura 4.28 y tiene derivada

$$f'(x) = (e^x)' = e^x$$

mientras que en la derivada del resto de las funcione exponenciales aparece la constante $\ln a = \log_e a$.

Es una propiedad característica de las funciones exponenciales crecer a un ritmo proporcional al valor que hayan alcanzado, esto es $f'(x) = f(x) \log_e a$. De ahí su utilidad, por ejemplo, en la descripción del crecimiento de las poblaciones: una población de tamaño doble que otra, crece el doble de rápido; luego el crecimiento de la población es exponencial.

Por lo que respecta a la función logarítmica $g(x) = \log_a x$, su derivada es

$$g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\log_a x - \log_a x_0}{x - x_0} = \lim_{u\to u_0} \frac{u - u_0}{a^u - a_0^u}$$

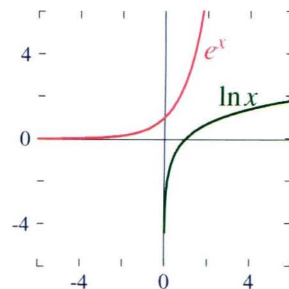


Figura 4.28: Las funciones e^x y $\ln x$.

con $u = \log_a x$, $u_0 = \log_a x_0$, de modo que $x = a^u$ y $x_0 = a^{u_0}$. Dado que la última fracción es la inversa de la que define la derivada de a^u, resulta

$$g'(x_0) = \frac{1}{a^{u_0} \log_e a} = \frac{1}{x_0 \log_e a}.$$

Nuevamente la elección del logaritmo natural, en base e, elimina la constante $\log_e a$, puesto que

$$g(x) = \ln x = \log_e x \qquad \text{tiene por derivada} \qquad g'(x) = 1/x.$$

4.4.3 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la sección 3.4 se han introducido las razones trigonométricas de un ángulo: $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x$, donde x es la medida de un ángulo que conviene expresar en radianes. Cuando el ángulo x varía, podemos considerar dichas razones como funciones de x.

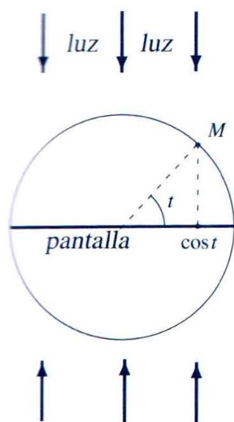
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

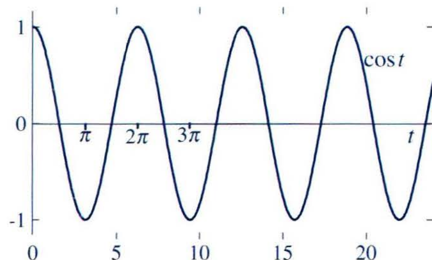
4.32 *Las tres* **funciones trigonométricas** *básicas son:*

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad g(x) = \cos x \qquad h(x) = \operatorname{tg} x.$$

Por ejemplo, si un móvil M gira sobre una circunferencia de radio unidad, a velocidad uniforme, digamos de un radián por segundo, y se ilumina lateralmente para proyectar su sombra sobre una pantalla, se verá que su sombra oscila de un extremo al otro, ver figura 4.29 (a). Al cabo de un tiempo t seg. el móvil habrá recorrido un ángulo t rad. y la abscisa de la sombra será $\cos t$. Es decir la posición de la sombra evoluciona obedeciendo a la función $\cos t$ y la gráfica de su movimiento aparece representada en la figura 4.29 (b).
Según la representación del círculo trigonométrico incluida en la sección 3.4.2, de un modo análogo puede hacerse patente la función $\operatorname{sen} t$ si la iluminación se hace lateralmente; asimismo, la función $\operatorname{tg} t$ aparece al situar el foco de luz en el centro del círculo y la pantalla tangente a la circunferencia, ver figura 4.29 (c). En este caso, la sombra se aleja indefinidamente cuando el móvil pasa por los extremos del diámetro paralelo a la pantalla y la gráfica de la función $\operatorname{tg} t$ lo refleja, con la existencia de una asíntota vertical en cada múltiplo impar de $\pi/2$, aunque, en realidad, la sombra sólo se proyecta cuando el móvil esté entre el foco y la pantalla y sólo se observa una rama de cada dos.

La característica más notable de las funciones trigonométricas es su **periodicidad**:





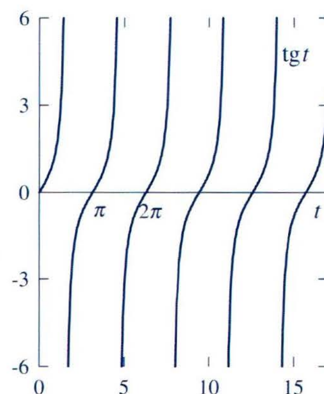


Figura 4.29: Representación de las funciones trigonométricas.

PERIODICIDAD DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas son **periódicas**, *es decir, se cumple* 4.33

- $\cos(x+2\pi) = \cos x$.

  Por tanto, la función $\cos x$ *tiene periodo* 2π.

- $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$.

  Por tanto, la función $\operatorname{sen} x$ *tiene periodo* 2π.

- $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$.

  Por tanto, la función $\operatorname{tg} x$ *tiene periodo* π.

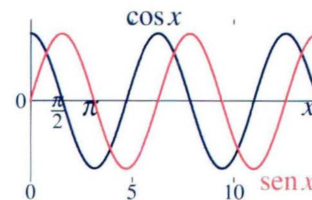


Figura 4.30: Las funciones trigonométricas son periódicas.

Por otra parte, la relación $\operatorname{sen}(x+\pi/2) = \cos x$ establece que la gráfica de $\operatorname{sen} x$ se obtiene al desplazar la de $\cos x$ hacia la derecha una longitud $\pi/2$, como se ve en la figura 4.30.

En relación con las derivadas de las funciones trigonométricas, es posible establecer el siguiente resultado:

- $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.
- $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Desde luego, en la figura 4.30, se aprecia que $\operatorname{sen} x$ crece en los intervalos en los que $\cos x$ es positivo y decrece cuando es negativo, de tal manera que alcanza los máximos y mínimos relativos justo cuando $\cos x$ se anula. Inversamente, $\cos x$ decrece mientras $\operatorname{sen} x$ es positivo y crece cuando es negativo, comportamiento acorde con el signo menos que precede a $\operatorname{sen} x$. Claro está que las observaciones anteriores no suponen una justificación de las fórmulas de derivación, sino que sólo muestran que no entrañan contradicciones con el comportamiento se las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

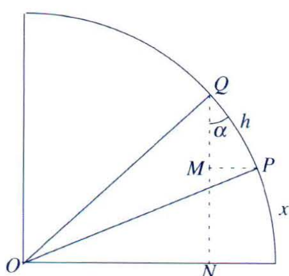


Figura 4.31: Cálculo de la derivada de las funciones trigonométricas.

Una justificación "geométrica" puede hacerse apelando al círculo trigonométrico, como se comprueba en la figura 4.31: Hay que calcular el valor límite de

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

cuando h se acerca a 0. En la figura, el numerador viene representado por la longitud del segmento MQ (pues $\overline{NM}$ es $\operatorname{sen} x$ y $\overline{NQ}$ es $\operatorname{sen}(x+h)$); el denominador es la longitud del arco $\dot{P}Q$ y, cuando es pequeña, no se diferencia apenas de la longitud del segmento PQ. El cociente es, por tanto, casi igual a $\cos \alpha$, donde α es el ángulo del segmento PQ con la vertical. Cuando h tiende a 0, el segmento PQ se sitúa en la dirección de la tangente al círculo, perpendicular al radio OP, de modo que α tiende a x (pues x es el ángulo de OP con la horizontal). En definitiva, el valor límite buscado es $\cos x$.

De manera similar se puede obtener la derivada de $\cos x$. De ahí, mediante la regla para derivar el cociente, resulta que

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{tiene derivada} \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

puesto que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Ello muestra que la función $\operatorname{tg} x$ es creciente en cada uno de los intervalos $((2n-1)\pi/2, (2n+1)\pi/2)$ en los cuales es continua.

4.5 IDEA DEL CÁLCULO INTEGRAL

Una vez se sabe que significa la derivada f' de una función f, cabe formular el problema inverso: determinar a partir de f una función F cuya derivada sea precisamente f; es decir, aquella tal que $F' = f$.

INTEGRAL INDEFINIDA

La **integral indefinida** *de una función $f(x)$ respecto a x es una función F, tal que su derivada F' es igual a f. Dicha función, si existe, se representa mediante el símbolo*

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

y se denomina también **primitiva de** f.

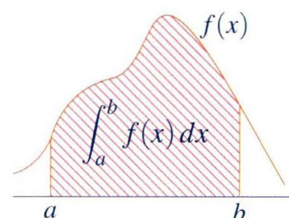


Figura 4.32: Área limitada por $f(x)$ entre a y b.

El *Cálculo integral*, que consiste en determinar $\int f(x)\,dx$ a partir de f, supone dificultades mucho más serias que el *Cálculo diferencial* de f', pero no se plantea como mera curiosidad matemática, sino que resuelve el segundo problema básico del *Análisis Matemático*: la determinación del área limitado por una curva. Ello se debe al siguiente resultado fundamental:

REGLA DE BARROW

4.36

El área comprendida entre la gráfica de la función f y el eje x, entre dos abscisas $a < b$, es $F(b) - F(a)$ si F es una primitiva de f. Simbólicamente, se escribe

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

y se denomina **integral definida** *de f entre a y b.(Véase figura 4.32)*

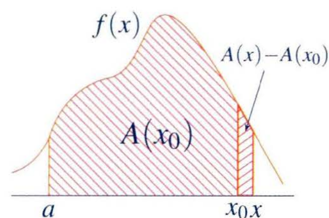


Figura 4.33: Incremento del área bajo $f(x)$.

La razón es sencilla: Si $A(x)$ es una función que proporciona el área comprendida bajo la gráfica de f entre las abscisas a y x, su derivada es

$$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0};$$

pero, como muestra la figura 4.33, cuando $x - x_0$ es muy pequeño, el numerador es aproximadamente el área del rectángulo de base $[x_0, x]$ y altura $f(x_0)$, de modo que el cociente tiende a $f(x_0)$. Luego tiene que ser $A'(x) = f(x)$; y, efectivamente, $A(x)$ es una primitiva de f. De este modo, el problema de determinación de áreas queda reducido la problema de cálculo de la primitiva de una función dada.

EJEMPLO 4.22 La función $f(x) = 1 + x^3$ es la derivada de $F(x) = x + x^4/4$. Luego

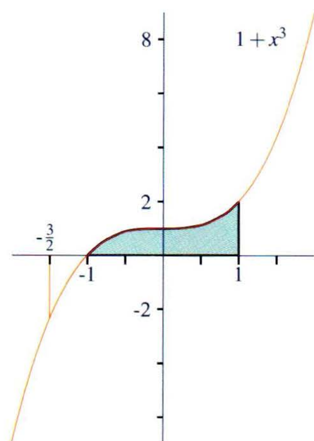


Figura 4.34: Área bajo $1+x^3$.

el área de la región comprendida bajo la gráfica de f, entre las abscisas -1 y 1, es

$$\int_{-1}^{1}(1+x^3)\,dx = F(1)-F(-1) = 1+\frac{1}{4}-\Big(-1+\frac{1}{4}\Big) = 2.$$

Debe tenerse en cuenta que, por este método, las áreas situadas bajo el eje de abscisas tienen asignado signo negativo; así, el área delimitada por la misma curva, entre las abscisas $-3/2$ y 1, resulta

$$\int_{-3/2}^{1}(1+x^3)\,dx = F(1)-F(-3/2) = 1+\frac{1}{4}-\Big(-\frac{3}{2}+\frac{81}{64}\Big) = \frac{95}{64} \simeq 1.484$$

y, respecto a la anterior, el área ha disminuido $33/64$, debido a que

$$\int_{-3/2}^{-1}(1+x^3)\,dx = F(-1)-F(-3/2) = -\frac{3}{4}-\Big(-\frac{15}{64}\Big) = -\frac{33}{64}$$

tiene signo negativo.

5

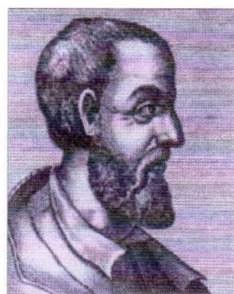
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

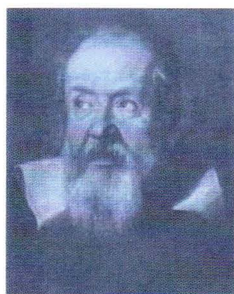
El Cálculo de probabilidades y la Estadística son las disciplinas matemáticas que más se han desarrollado en el último siglo. Sus conceptos y aplicaciones se hallan casi por doquier en nuestra vida cotidiana, y sus razonamientos, implícita o explícitamente, dirigen nuestras decisiones y la manera como interpretamos nuestras observaciones.

Como ha ocurrido otras veces en la historia de las ideas matemáticas, ambas disciplinas nacen sin relación aparente entre sí. El Cálculo de probabilidades surge del interés por los juegos de azar, mientras que la Estadística nace como auxiliar de la Ciencia política, con el fin de hacer inteligibles los datos demográficos y económicos, y ayudar en la toma de decisiones sobre el gobierno de las naciones. No olvidemos que Estadística significa *"Ciencia del Estado"*.



Girolamo Cardano (1501-1576).

También, cronológicamente, su origen es dispar. Desde la antigüedad, el hombre ha conocido diversos juegos de azar y se ha apasionado por ellos. Tal pasión se justifica por lo incierto de su resultado, ya que no podemos asegurar cuál será, aunque las condiciones iniciales sean idénticas. Para justificar este hecho, se creó un *mito*, el Azar, al que se hizo responsable de cada resultado, y desarrolló la idea de probabilidad, como antes se había desarrollado el concepto de número.

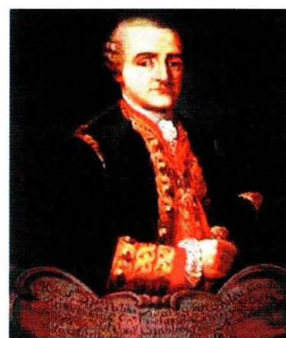


Galileo Galilei (1564–1642).

Los primeras noticias que tenemos de intentos de hacer racional la idea de probabilidad y de establecer unas reglas para calcular probabilidades, se remontan al siglo XVI, en el que Cardano y Galileo consideraron la probabilidad como característica numérica de los resultados posibles. Desde entonces las investigaciones sobre este concepto, motivadas bien por razones teóricas o bien prácticas, no han cesado. En los últimos cien años, hemos descubierto que los fenómenos que podemos considerar como gobernados por el Azar, también denominados *aleatorios*, no se reducen a los juegos. Hechos tan dispares como el tiempo que tarda una masa de uranio en emitir una partícula α o el tiempo que tarda en fallar un componente electrónico de un computador son impredecibles, y sólo pueden ser modelados suponiendo que es la voluntad del Azar la que determina cuando ocurrirán. Resulta así la aparente paradoja de que la manera *racional* de establecer un modelo de estos fenómenos pasa por considerar que es un mito,

el Azar, quien escoge el instante en que ocurre la emisión de la partícula o el fallo de la componente. Tales modelos se denominan *aleatorios* o *estocásticos*, y la teoría matemática que los sostiene se denomina Cálculo de probabilidades. Lo maravilloso del Cálculo de probabilidades es que, aunque el resultado es impredecible, es capaz de hacer afirmaciones significativas sobre el fenómeno. Gracias a ello, podemos controlar la energía que libera la desintegración radioactiva o podemos diseñar un circuito de manera que, salvo un caso entre miles, su duración supere un tiempo dado.

Por su parte, la Estadística nace para ayudar a los gobernantes a tomar decisiones acertadas, proporcionando métodos para describir las riquezas y los medios de que disponen las naciones. Por este motivo, en el siglo XVII se la denominó *aritmética política*, aunque terminó por recibir su nombre, "Estadística", del *estado*.



El Conde de Aranda (1719-1798).

Desde tiempos remotos se han hecho censos para basar en ellos el cobro de impuestos o las levas de soldados. Jesús nació en Belén, porque María y José habían ido allí a censarse, según edicto del emperador Augusto. Pero, es a partir del siglo XVIII, cuando los censos se elaboran de manera más cuidadosa y se perfilan los primeros métodos estadísticos para extraer información de los datos de los censos de una manera realmente útil. En España, los primeros censos se deben al conde de Aranda (1768) y al de Floridablanca (1787). .

También los estudios astronómicos impulsan las indagaciones estadísticas. Astrónomos, como Laplace (1749–1829) y Gauss (1777–1855), fueron los primeros en estudiar el problema de los errores de medida. Por afinados que estuvieran los instrumentos, diferentes observaciones de la misma magnitud daban lugar a distintas medidas. En sus trabajos, Gauss obtuvo la distribución de los *errores*, que hoy conocemos como distribución *normal*. Otro matemático y astrónomo belga, Adolphe Quetelet (1796–1874), aplicó la ley de los errores a datos antropométricos y sociales, dando origen al concepto de *individuo medio*. Quetelet es el iniciador de la Biometría y la Sociometría.



Adolphe Quetelet (1796-1874).

Durante la segunda mitad del siglo XIX, los métodos estadísticos se aplican a las investigaciones biológicas. Como suele suceder, las nuevas aplicaciones conducen a problemas nuevos que de otro modo no se hubieran planteado; además, sus soluciones enriquecen a la ciencia auxiliar, en este caso la Estadística. Entre los que contribuyeron a este progreso hay que citar a Francis Galton (1822–1911), sobrino de Darwin, que inspirado por sus estudios sobre la herencia introdujo los conceptos de *regresión* y *corre-*

lación, y a Karl Pearson (1857–1936) que continuó los trabajos de Galton sobre selección natural.

Por fin, durante el final del siglo XIX y principios del XX se plantean un nuevo problema que lleva al encuentro de ambas disciplinas, es el problema de la Inferencia estadística.

Si queremos obtener información sobre cierta característica antropométrica de una población y medimos el valor de la característica en todos los miembros de la población, la Estadística nos ayudará a sistematizar los datos y a descubrir información útil. Pero examinar a todos los miembros de la población puede ser una tarea muy dura, incluso imposible o indeseable. Se nos plantea la cuestión de si bastará hacer dicho examen en una parte de la población para obtener una información que sea válida para la totalidad. De manera más precisa, si de un colectivo de individuos elegimos un grupo, las conclusiones que logremos al analizar estadísticamente los datos del grupo elegido, ¿aportarán información sobre todo el colectivo? Evidentemente, si el grupo es elegido de cualquier manera, la respuesta a la pregunta anterior, claramente, es *no*. Si escogemos precisamente al grupo de individuos que presentan los mayores valores de la característica, difícilmente podremos sostener que los datos obtenidos proporcionan un conocimiento sobre la totalidad. Así, la pregunta anterior debe reformularse de la manera siguiente ¿hay algún procedimiento de seleccionar un grupo de individuos de una población, de manera que si se utiliza, podemos confiar en que la información obtenida pueda aplicarse a todo el colectivo? O, expresado de otra forma, ¿es posible seleccionar una parte que se comporte como el todo? A una parte que tenga esta propiedad la denominamos *representativa* de la totalidad.

La respuesta a la pregunta anterior es afirmativa y, en cierto modo, sorprendente. Para seleccionar un grupo de individuos que sea representativo del total, debemos dejar que sea el Azar quien los elija. Si nosotros intervenimos en la selección, lograremos una serie de observaciones a nuestro gusto, pero que no serán representativas del colectivo. Pero esta respuesta precisa un matiz. Cuando el grupo de individuos sea elegido, por decisión del Azar o nuestra, el grupo será el que sea, tendrá una composición determinada y, realmente, será cosa de mucha *suerte* que esa composición coincida con la de todo el colectivo. Que una parte sea representativa es otra propiedad estadística y sólo tiene sentido si consideramos una serie repetida de selecciones. Quizá, realmente, deberíamos hablar de *método de elección representativa de una parte* más que de parte representativa, ya que la elección mediante el Azar no asegura que una elección concreta lo sea, sino que si aplicamos reiteradas veces ese procedimiento de elección, con

gran frecuencia lograremos elegir partes, prácticamente, representativas del total. Entramos así en una nueva clase de afirmaciones donde, por ejemplo, si bien es incierto que la media calculada en el grupo de individuos seleccionados tenga un valor próximo a la media de toda la población, podemos tener una elevada confianza en que no será muy diferente. De esta clase de cuestiones se ocupa la Inferencia estadística.

Durante los primeros años del siglo XX, el objeto y los métodos de la Estadística se establecen con precisión y rigor matemático. Se inician las disciplinas que hoy denominamos diseño de experimentos, análisis de la varianza o contraste de hipótesis, que permiten plantear experimentos y analizar los resultados con el fin de extraer conclusiones *significativas*. Las fuentes de inspiración para estos trabajos siguen siendo la investigaciones biológicas y agrícolas. La personalidad culminante de esta época es sir Ronald Fisher (1890-1962), que trabajó en la estación agrícola experimental de Rothamsted. Las necesidades de los experimentos agrícolas y genéticos le impulsaron a crear nuevos conceptos y métodos estadísticos. Fisher había estudiado Astronomía en Cambridge y conoció un famoso manual de la época escrito por Airy sobre *Teoría de errores*. Al parecer, este es un camino que inevitablemente lleva a la especulación estadística. En los últimos años del siglo XX, los razonamientos y métodos estadísticos se han aplicado a todas las ciencias, prácticamente sin excepción, desde la Medicina a la Ciencia de los computadores, sin olvidar la Filología, el Derecho o la Física teórica. El siglo XX ha sido el siglo de las masas, y su ciencia es la Estadística.



Sir Ronald Fisher (1890-1962).

En este capítulo pretendemos introducir al lector en las ideas generales de ambas disciplinas y esbozar alguna de sus aplicaciones. El orden establecido: primero la Probabilidad, luego la Estadística, subraya la relación fundamental entre ambas disciplinas, donde la Probabilidad es auxiliar de la Estadística, aunque los conceptos de Estadística descriptiva que desarrollamos no requieren del conocimiento de los modelos aleatorios.

En el apartado 5.1 precisamos los fenómenos que van a ser objeto de nuestra atención, los denominados aleatorios, cuyo resultado es incierto aunque las causas sean aparentemente idénticas. La observación de los fenómenos aleatorios nos sugiere la idea de probabilidad, como medio de apreciar y expresar el grado de confianza que tenemos en que un acontecimiento sea el resultado de un fenómeno aleatorio.

En el apartado 5.2, hacemos un modelo matemático de los fenómenos aleatorios. Un modelo matemático es una idealización en la que una serie de objetos matemáticos juegan el papel de los conceptos observados

en la realidad. A esos objetos les supondremos una serie de propiedades y de relaciones que deben ser conformes con las propiedades y relaciones observadas. Las dos componentes de nuestro modelo son los sucesos y la probabilidad. Los sucesos se modelan en forma de subconjuntos de un espacio dado. La probabilidad se modela como una función definida sobre los sucesos, que posee determinadas propiedades que consideramos razonables y ajustadas a nuestra idea intuitiva de probabilidad. En este apartado consideramos exclusivamente modelos que, en Matemáticas, se denominan finitos, porque el número de posibles consecuencias del fenómeno es finito.

En el apartado 5.3, tratamos el concepto de probabilidad condicionada y enunciamos su más importantes reglas de cálculo. La idea de probabilidad condicionada parte de reconocer que la probabilidad de un acontecimiento depende de nuestro grado de información acerca del fenómeno. Cuando nuestra información cambia, nuestra valoración debe cambiar. En el apartado se desarrolla una regla automática de cálculo para reelaborar esa valoración. Es la regla denominada de Bayes.

El apartado 5.4 es el primero de nuestro estudio de la Estadística. En él hacemos un resumen de los objetivos de la Estadística descriptiva y establecemos con precisión una serie de conceptos fundamentales, variables, observaciones, población, frecuencias, etc., que serán de uso corriente en los siguientes apartados.

Los apartados 5.5 y 5.6 están motivados por uno de los objetivos propios de la Estadística: resumir la información contenida en grandes cantidades de datos de modo que, incluso a costa de perder cierto detalle o parte de esa información, lograr una descripción del colectivo que sea útil. El apartado 5.5 está dedicado a las descripciones gráficas, mientras que el apartado 5.6 lo está a las descripciones numéricas.

La unidad didáctica se complementa con una breve introducción a la combinatoria y una ampliación de estadística descriptiva.

5.1 AZAR Y PROBABILIDAD

5.1.1 AZAR Y NECESIDAD

Las leyes que formulamos a partir de la observación de los fenómenos naturales, sociales, psicológicos, etc., se pueden clasificar en dos categorías: las gobernadas por la *Necesidad* y las gobernadas por el *Azar*.

Las primeras determinan con exactitud las consecuencias que observamos cada vez que se repite el fenómeno bajo ciertas condiciones iniciales. Ejemplos de esta clase de leyes son las siguientes:

1. Si nada la soporta, una piedra cae con aceleración constante.

2. Si un líquido se calienta suficientemente, se evapora.

3. Si se suman los ángulos de un triángulo, el resultado es 180°.

4. Si un número entero, n, es divisible por 2, n^2 es divisible por 4.

Entre ellos hay casos de necesidad física, como los ejemplos 1 y 2, que muestran leyes empíricas, fruto de nuestra experiencia; otros, son ejemplos de necesidad lógica, como los ejemplos 3 y 4, producto de nuestro razonamiento.

Puesto que a unas condiciones dadas siempre siguen unos resultados determinados, las leyes gobernadas por la necesidad nos llevan, inevitablemente, a la idea de *causa* y *efecto*. Dicho de otro modo, en las leyes gobernadas por la necesidad, el efecto está *determinado* por las causas que lo producen. Los fenómenos de esta clase de denominan *deterministas*.

La segunda categoría incluye las leyes que rigen los fenómenos en los que la concurrencia de unas circunstancias fijas no permite prever cual será el efecto observado. Ejemplos de esta clase de fenómenos son los siguientes:

1. Nadie es capaz de predecir el próximo número "gordo" del sorteo de Navidad.

2. La demanda de electricidad entre las nueve y las diez de la mañana no puede predecirse de manera exacta.

3. Si una moneda cae al suelo de una habitación, no se puede prever el punto al que irá a parar. Aunque lancemos varias monedas idénticas, poniendo cuidado en hacerlo de la misma manera, no acabaran todas en el mismo punto.

4. Es imposible predecir con exactitud cuántas niñas nacerán el proximo año en España. Aunque conociéramos el número total de nacidos tampoco podríamos preverlo.

5. No es posible hallar una fórmula exacta, capaz de predecir la estatura de una persona a partir de su peso o de otros datos antropométricos.

En ninguno de estos ejemplos tiene sentido hablar de relación causa–efecto. Causas idénticas producen efectos distintos. Quizá por ello, hemos inventado un mito que denominamos Azar, al que hacemos responsable de los resultados de estos fenómenos. Así, decimos que el resultado del fenómeno es fruto del *Azar* y que el fenómeno es *aleatorio*.

FENÓMENO ALEATORIO

5.1 *Hay fenómenos en los que, bajo condiciones fijas, pueden ocurrir diversos acontecimientos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pero ninguno de ellos es necesario, de manera que no podemos predecir cual de ellos ocurrirá. Entonces, decimos que el resultado es* **consecuencia del azar** *o que se trata de un* **fenómeno aleatorio**.

Este comportamiento caprichoso del Azar, que hace inútil cualquier intento de determinar qué resultado ocurrirá en la próxima observación del fenómeno, explica la fascinación que por los juegos de Azar han sentido y siguen sintiendo los hombres. Lo característico de las leyes gobernadas por el Azar es que no determinan los resultados de cada experiencia, sino que son globales y sólo afectan a la *frecuencia* de los resultados que obtenemos, cuando el fenómeno se ha repetido un gran número de veces.

EJEMPLO 5.1 No podemos predecir con exactitud cuántos años llegará a vivir un niño concreto nacido hoy, pero podemos estimar, con bastante precisión, el porcentaje de personas entre los que hoy tienen sesenta años, que vivirán dentro de cinco años.

No podemos predecir con exactitud la estatura que tendrá cuando tenga cinco años, ese niño concreto que acaba de nacer, pero podemos estimar bastante bien el porcentaje de niños de su generación que medirán más de 115 cm cuando tengan cinco años.

5.1.2 CERTEZA Y PROBABILIDAD

La noción de necesidad lleva asociada la noción de *certeza* o *seguridad*. Consideramos *seguro* que una piedra caerá si le falla el soporte. Los fenómenos determinísticos se caracterizan porque el efecto es una consecuencia *segura* de las causas que lo producen y, cuando se repiten las mis-

mas causas, es seguro que se producirán los mismos efectos. En esta clase de fenómenos, el efecto está determinado con seguridad por la causa.

Por el contrario, los fenómenos aleatorio están asociados a la noción de *incertidumbre*. Su característica principal es que ante la misma causa, el resultado es incierto.

La certeza es un concepto sin matices, como la verdad; algo es seguro o no es seguro como algo es verdadero o es falso. Por el contrario, la incertidumbre se nos presenta llena de grados. Por ejemplo, ¿cuánto medirá este niño nacido hoy cuando tenga cinco años?, ¿95 cm?, ¿100 cm?, la respuesta es incierta. Sin embargo, nos parece más verosímil que mida más de 90 cm, que mida menos de 60 cm. De nuestra experiencia se desprende una forma de conocimiento que permite medir el grado de verosimilitud de cada acontecimiento incierto. A la medida de ese grado de verosimilitud la denominamos *probabilidad*.



Joseph Butler (1692-1752).

Joseph Butler, obispo de Durham, nos dejó esta definición de probabilidad:

> *La probabilidad es la cualidad de ser probable, la apariencia de ser cierto o la verosimilitud de acontecer, que posee cualquier suceso a la luz de la evidencia presente.*
>
> Joseph Butler, The Analogy of Religion, Probability is the very Guide of Life, 1736.

La certidumbre de un acontecimiento se mueve entre la imposibilidad y la seguridad; la probabilidad de que ocurra el acontecimiento es la medida de esa certidumbre. Parece razonable que esa medida varíe entre la probabilidad que asignemos a lo imposible y la probabilidad que asignemos a lo seguro. Cuáles sean los límites de esa escala es algo que depende de nuestra conveniencia. En la vida cotidiana, con frecuencia, empleamos una escala de 0 a 100 y hablamos de las probabilidades de los acontecimientos como porcentajes. Para los cálculos matemáticos una escala entre 0 y 1 es más adecuada, pues simplifica las operaciones con probabilidades. Así pues, aceptaremos que la probabilidad de un acontecimiento imposible es igual a 0 y que la probabilidad de un acontecimiento seguro es 1. Entre estos límites se moverán las probabilidades de los restantes acontecimientos.

PROBABILIDAD

En un fenómeno aleatorio, la **probabilidad** *de un acontecimiento posible es un número entre 0 y 1, que expresa la verosimilitud que atribuimos a su aparición.* 5.2

Esa atribución de probabilidad a un acontecimiento no es completamente arbitraria. Hay una evidencia empírica que ha contribuido al origen de la idea de probabilidad y que permite ajustar la abstracción a la realidad. Seguramente, el origen de la idea de probabilidad está en la observación de la frecuencia con que se observa un acontecimiento, resultado de un experimento aleatorio. Esa frecuencia es una cualidad global de cada conjunto de resultados obtenidos. De la observación de las frecuencias, surge una abstracción: el concepto de probabilidad. La probabilidad es el concepto ideal

que gobierna el comportamiento del Azar en **cada** repetición del fenómeno.

EJEMPLO 5.2 La idea de probabilidad nació, casi con certeza, de los juegos de azar. Los yacimientos arqueológicos revelan que la afición al juego es tan antigua como el hombre. Si damos un poco de margen a nuestra imaginación, podemos conjeturar lo que pudo ser el origen de la idea de probabilidad.

Por un momento, imaginemos, a uno de nuestros remotos antepasados. Ha hecho un dado de marfil para jugar. Hace lanzamientos sucesivos y observa los resultados. Le maravilla lo imprevisible de los resultados y se esfuerza por encontrar una explicación. Cuando ha adquirido experiencia en el juego, inconscientemente, tiene una idea aproximada de la frecuencia con que se presenta cada resultado. Esta frecuencia es el promedio del número de veces que ha aparecido un resultado dividido por el número de repeticiones del experimento.

Puesto que los experimentos transcurren en el tiempo, podemos decir que su experiencia proviene de promediar la aparición de cada resultado, en el *tiempo*. Además ha observado que esos promedios son relativamente constantes. La experiencia de esa constancia le induce a pensar en la frecuencia de cada acontecimiento como una propiedad característica del dado y prepara su cerebro para el nacimiento de una idea: la probabilidad, que actúa en cada instante. En su mente surge esta explicación: hay un ente mitológico, el Azar, que elige, cada vez, el resultado que saldrá. El Azar es *imprevisible*, pero no es *arbitrario*, ya que elige de acuerdo a unas características del dado: la probabilidad de cada resultado. De hecho, nuestro hombre ha imaginado que en **cada** nuevo lanzamiento, el Azar se comporta de manera semejante a como lo hace en el largo plazo. Es como si eligiera el próximo resultado de un bombo que tuviera bolas marcadas con los resultados de la serie de resultados, prácticamente ilimitada, que nuestro hombre ha observado anteriormente.

Desde luego, el nacimiento de esta idea se basa en la observación de que la frecuencia del acontecimiento es aproximadamente constante. Esta suerte de constancia es lo que denominamos ley empírica de estabilidad de las frecuencias.

LEY DE ESTABILIDAD DE LAS FRECUENCIAS

5.3 ***En una sucesión ilimitada de repeticiones de un fenómeno aleatorio, las frecuencias de cada uno de los acontecimientos posibles, después de cada nueva repetición, se estabilizan hacia ciertos valores límites, que consideramos la probabilidad de cada acontecimiento.***

Observemos que considerar la probabilidad como la frecuencia teórica, de cuya existencia nos habla la ley de estabilidad de las frecuencias, sirve para explicar el nacimiento de la idea, pero no nos ayuda para encontrar, de antemano, *la* probabilidad a cada acontecimiento. De hecho, la cómoda exigencia de una serie *ilimitada* de repeticiones para alcanzar la frecuencia teórica, implica la imposibilidad de conocer la probabilidad por observa-

ción directa. Aquí, como siempre, las ideas matemáticas se mueven en un mundo perfecto y las aplicaciones en un mundo de aproximaciones. Lo que explica la importancia de la idea de probabilidad en nuestro conocimiento no es una justificación filosófica, ni la belleza de su teoría matemática, sino la concordancia entre las previsiones de los modelos teóricos y los datos reales.

El punto de partida de cualquier modelo es una asignación de probabilidad que tenga presente toda la evidencia de que disponemos en ese momento. Pero ningún modelo es definitivo. Las experiencias posteriores, los nuevos datos, sirven para contrastar el modelo anterior y para reasignar la probabilidad. La teoría matemática de la probabilidad nos enseña cómo debe hacerse esa reasignación, para incorporar la información aportada por los nuevos datos.

EJEMPLO 5.3 Que un niño nazca hombre o mujer se nos presenta como un experimento aleatorio. Un modelo teórico consiste en suponer que, el momento de la concepción, el Azar lanza una moneda. Si es cara, nacerá una mujer; si es cruz, nacerá un varón. Para precisar el modelo, necesitamos asignar la probabilidad p de que salga cara al lanzar la moneda. Si nos limitamos a un modelo para los nacimientos en España, dispondremos de una importante evidencia sobre este fenómeno, si consultamos los datos acerca del movimiento natural de la población que publica el Instituto Nacional de Estadística. Los últimos datos publicados corresponden al año 2003. La tabla siguiente muestra el total de nacimientos en los cinco últimos años publicados, periodo 1999–2003. En ella, aparece el número total de nacidos por año y su desglose en varones y mujeres.

Nacidos en España, periodo 1999-2003

Nacidos	**2003**	**2002**	**2001**	**2000**	**1999**	**Total**
Mujeres	213301	201692	197593	192036	184388	989010
Varones	226562	214826	208787	205596	195742	1051513
Total	439863	416518	406380	397632	380130	2040523

Fuente: Instituto Nacional de Estadística

Las tasas anuales de nacidos que son mujeres resultan mucho más elocuentes que los números absolutos. Si dividimos el número de mujeres nacidas por el número total de nacimientos en cada año y en la totalidad del periodo, obtendremos las tasas anuales y total del periodo que se muestran en la tabla siguiente.

Nacimientos de mujeres. Tasas anuales, periodo 1999-2003					
	2003	**2002**	**2001**	**2000**	**1999**	**Total**
Mujeres	0.4849	0.4842	0.4862	0.4829	0.4851	0.4847

A la vista de estas tasas es fácil sentir asombro ante la regularidad de los datos estadísticos. Sin que nadie ordene el sexo de cada nacido; sin que nadie pueda prever si un recién concebido será hombre o mujer, las cifras presentan oscilaciones relativamente pequeñas alrededor de una frecuencia que tratamos de aproximar. La evidencia de los datos señala que, en nuestro modelo probabilístico de la determinación del sexo de un nacido, la probabilidad de cara (nacer mujer) debe, ser aproximadamente, $p = 0.485$. Es evidente que este valor no lo habríamos supuesto sin los datos recogidos por el INE. Pero esta circunstancia no es extraña a la ciencia, tampoco creemos que haya nadie capaz de intuir el valor de la constante de gravitación, antes de hacer algún experimento.

5.2 MODELO MATEMÁTICO DE LOS FENÓMENOS ALEATORIOS

De acuerdo con la descripción que hemos hecho, los fenómenos aleatorios tienen dos componentes bien diferenciadas. Por una parte, están los acontecimientos, que pueden ocurrir o no, cada vez que repetimos la observación del fenómeno. A estos acontecimientos los denominaremos **sucesos**. SUCESO

5.4

*Denominamos **suceso** asociado a un fenómeno aleatorio a cualquier acontecimiento del que podamos decir si ha ocurrido o no, cada vez que observemos una realización del fenómeno.*

Por otra parte, está la probabilidad de cada suceso posible, que mide nuestra confianza en que ocurra ese suceso. Según hemos convenido, la probabilidad de cada suceso es un número entre 0 y 1; 0 es la probabilidad de lo imposible y 1 la probabilidad de los seguro. La probabilidad, como concepto, es la medida de lo verosímil que es la aparición de cada suceso. Cuando medimos la probabilidad de un suceso determinado, el resultado es un número.

Para hacer un modelo matemático de un fenómeno aleatorio, debemos encontrar dos conceptos matemáticos formales que recojan todas las propiedades que reconocemos en los conceptos intuitivos.

5.2.1 MODELO MATEMÁTICO DE LOS SUCESOS

El primer paso para describir un fenómeno aleatorio es describir todos sus posibles resultados. Como sucede en cualquier modelo matemático, esta tarea depende de la naturaleza del fenómeno y del interés del observador. Por ejemplo, si el fenómeno consiste en observar el número de mujeres que hay entre los cinco primeros nacimientos de un día en la maternidad de un hospital, parece razonable decir que hay seis resultados posibles que podemos describir:

han nacido 0 mujeres	han nacido 1 mujer	han nacido 2 mujeres
han nacido 3 mujeres	han nacido 4 mujeres	han nacido 5 mujeres

Cada uno de estos seis resultados posibles origina un suceso pero, además, hay otros sucesos. Por ejemplo, aunque no sean resultados posibles del fenómeno, también son sucesos "ha nacido alguna mujer" o "han nacido más de tres mujeres". Lo característico de un *resultado posible* es que no puede ser descompuesto en otros resultados. El suceso "han nacido más de

tres mujeres" se descompone en dos resultados posibles: "han nacido cuatro mujeres" o "han nacido cinco mujeres". Es decir, para que el suceso "han nacido más de tres mujeres" ocurra, tiene que ocurrir alguno de los resultados "han nacido cuatro mujeres" o "han nacido cinco mujeres". Por esta razón, a los resultados posibles también se les denomina sucesos **elementales**, mientras que los restantes sucesos se califican de **compuestos**.

La lista de los resultados posibles constituye un conjunto que denominaremos **espacio de posibilidades** del fenómeno aleatorio y representaremos por la letra griega *omega* mayúscula, Ω.

ESPACIO DE POSIBILIDADES

5.5 *El conjunto de los resultados posibles de un experimento aleatorio se denomina* **espacio de posibilidades** *y se designa por* Ω.

EJEMPLO 5.4 Supongamos que lanzamos dos veces una moneda y observamos el resultado. Si nos interesa el resultado que aparece en cada lanzamiento, el espacio de posibilidades es

$$\Omega = \{(cara)(cara),\ (cara)(cruz),\ (cruz)(cara),\ (cruz)(cruz)\}$$

Si sólo nos importa el número de caras que han aparecido, hay tres resultados posibles: 0, 1 ó 2 caras, y el espacio de posibilidades es

$$\Omega = \{0, 1, 2\}$$

El fenómeno es el mismo en ambos casos, pero el espacio de posibilidades que planteemos no depende sólo del fenómeno sino, también, del interés del observador.

EJEMPLO 5.5 Los juegos de azar son siempre buenos ejemplos para comprender la construcción del modelo matemático. Supongamos que, como nuestro antepasado, lanzamos un dado y observamos el número que muestra su cara superior. Es un fenómeno aleatorio que tiene seis resultados posibles, tantos como números tiene marcados el dado en sus caras. La lista de sus resultados posibles es:

{ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ }

Un suceso es "el resultado es mayor que cuatro". Parece una buena idea representar este suceso por la lista de los resultados que hacen que ocurra.

{⚄, ⚅}

Otro suceso es "el resultado es par", y parece natural representarlo por la lista

{⚁, ⚃, ⚅}

El ejemplo anterior nos sugiere cómo traducir matemáticamente los sucesos y sus propiedades. Cada suceso se puede describir por la lista de los resultados posibles que hacen que ocurra. De manera más formal, diremos que cada suceso se puede identificar con el subconjunto del espacio de posibilidades que está formado por los resultados posibles que hacen que ocurra. Así, en el fenómeno aleatorio del ejemplo 5.5, tendremos

$$\text{“el resultado es mayor que cuatro”} = \{ ⚄ , ⚅ \}$$

y

$$\text{“el resultado es par”} = \{ ⚁ , ⚃ , ⚅ \}$$

Si observamos el resultado del fenómeno aleatorio, diremos que "han ocurrido" los sucesos que contienen al resultado observado, y que "no han ocurrido" los sucesos que no lo contienen. Por ejemplo, si el resultado es ⚁, diremos que ha ocurrido el suceso "el resultado es par", pero que no ha ocurrido el suceso "el resultado es mayor que cuatro".

Los sucesos que tienen un único elemento se identifican con los resultados posibles. Por ejemplo,

$$\text{“el resultado es cinco”} = \{ ⚄ \}$$

Esta observación nos lleva otra vez a la clasificación de los sucesos que ya hemos hecho. Los sucesos que sólo tienen un elemento son **sucesos simples**, y los que tienen más de un elemento son **sucesos compuestos**.

CARACTERIZACIÓN DE LOS SUCESOS COMO SUBCONJUNTOS DE Ω

5.6

*Los **sucesos** relativos a un fenómeno aleatorio se identifican con los subconjuntos de su espacio de posibilidades.*

- *Los subconjuntos con un único elemento se denominan **sucesos simples**.*
- *Los subconjuntos que tienen varios elementos se denominan **sucesos compuestos** y son agregados de sucesos simples.*

EJEMPLO 5.6 Si lanzamos una moneda dos veces consecutivas y observamos sus resultados, el espacio de posibilidades es

$$\Omega = \{☺☺, ☺⊛, ⊛☺, ⊛⊛\}$$

como ya vimos en el ejemplo 5.4.

El suceso "sale al menos una cara" es compuesto, y esta formado por tres resultados posibles.

$$\text{‘sale al menos una cara”} = \{☺☺, ☺⊛, ⊛☺\}$$

El suceso, "ambos resultados son cara" es simple, y se tiene

'ambos resultados son cara" = {🪙🪙}

EJEMPLO 5.7 Si lanzamos dos dados de colores distintos y observamos la puntuación que aparece en cada uno de ellos, tendremos $6 \times 6 = 36$ resultados posibles, tantos como pareja de caras de los dados podemos formar. Estos resultados posibles están representados en la figura 5.1. El conjunto de estos 36 resultados constituye el espacio de probabilidades, Ω, de este fenómeno aleatorio.

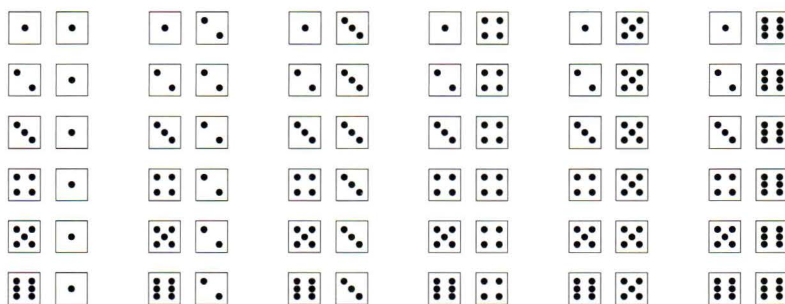


Figura 5.1: Resultados que se obtienen al lanzar dos dados.

En este espacio de posibilidades son simples los tres sucesos siguientes

$A =$ {⚂ ⚃}, $B =$ {⚅ ⚁}, $C =$ {⚂ ⚂},

mientras que son sucesos compuestos

$D =$ {⚀ ⚁, ⚁ ⚃, ⚂ ⚅}

y

$E =$ {⚀ ⚂, ⚁ ⚅, ⚂ ⚀, ⚅ ⚁};

con palabras podemos definir a D como "la segunda puntuación es el doble de la primera" y a E como "una puntuación es el triple de la otra". También es compuesto el suceso "la suma de las puntuaciones es 8", este suceso se identifica con el subconjunto de Ω siguiente

{⚁ ⚅, ⚂ ⚄, ⚃ ⚃, ⚄ ⚂, ⚅ ⚁}

Otro suceso compuesto es "ambas puntuaciones son iguales", que se identifica con el subconjunto:

{⚀ ⚀, ⚁ ⚁, ⚂ ⚂, ⚃ ⚃, ⚄ ⚄, ⚅ ⚅}

Cualquier espacio de posibilidades tiene dos subconjuntos especiales, el subconjunto total, Ω, y el subconjunto vacío $\emptyset$. El conjunto total ocurre siempre, porque sea cual sea el resultado del fenómeno, siempre está contenido en Ω, por esa razón lo denominamos suceso **seguro**. Por el contrario, el conjunto vacío no ocurre nunca, ya que no contiene a ningún resultado y lo identificamos con un suceso denominado **imposible**.

SUCESOS SEGURO E IMPOSIBLE

5.7

- *El espacio de posibilidades es un suceso compuesto, que contiene como elementos a todos los resultados posibles del experimento y recibe el nombre de* ***suceso seguro****.*
- *El subconjunto vacío, $\emptyset$, también es un suceso; no es simple ni compuesto, sino que representa al suceso denominado* ***imposible.***

5.2.2 OPERACIONES CON SUCESOS

La analogía entre sucesos y subconjuntos del espacio de posibilidades es completa. No sólo cada suceso se corresponde con un subconjunto y cada subconjunto con un suceso, sino que cualquier relación u operación que tenga sentido hacer con sucesos tiene una traducción al lenguaje de las operaciones con conjuntos y, recíprocamente, cualquier operación que hagamos entre subconjuntos del espacio de posibilidades tiene una interpretación en términos de sucesos.

INCLUSIÓN DE SUCESOS

Dos sucesos A y B pueden estar relacionados de manera que siempre que ocurre A, ocurre B. Esta relación se corresponde con el hecho de que A esté contenido en B, $A \subset B$. 5.8

INTERSECCIÓN DE SUCESOS

La intersección de dos sucesos A y B es un nuevo suceso que se puede describir como A y *B ocurren simultáneamente y que sucede siempre que el resultado pertenezca a A y a B; se representa por $A \cap B$.* 5.9

UNIÓN DE SUCESOS

5.10 *La unión de dos sucesos A y B es un nuevo suceso que se puede describir como ocurre A o ocurre B, y que sucede siempre que el resultado pertenezca a A, a B o a ambos simultáneamente. Este suceso se representa por $A \cup B$.*

SUCESO CONTRARIO

5.11 *El complementario de un suceso A es un nuevo suceso que se puede describir como el* suceso contrario *de A, y que sucede siempre que el resultado no pertenezca a A; se representa por A^c.*

5.2.3 EL MODELO MATEMÁTICO DE LA PROBABILIDAD

Una vez establecido que los subconjuntos del espacio de posibilidades son un modelo matemático de los sucesos, nos resta asignar una probabilidad a cada uno de ellos. Esa asignación debe hacerse teniendo en cuenta toda la información de que dispongamos acerca del fenómeno.

Si A es un suceso, designaremos la probabilidad de A ocurra por el símbolo por $P(A)$, que se lee "probabilidad de A". Como hemos decidido que la escala de probabilidades esté entre 0 y 1, la probabilidad $P(A)$ debe ser un número comprendido entre 0 y 1. Pero, además, la probabilidad matemática debe satisfacer ciertos requisitos mínimos para que posea las propiedades que nuestra intuición otorga al concepto. Esos requisitos se pueden resumir en las cuatro condiciones siguientes:

CONDICIÓN 1

5.12 *La probabilidad de un suceso A es un número entre 0 y 1.*

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Esta condición que se justifica porque las frecuencias relativas de cualquier acontecimiento son números entre 0 y 1.

CONDICIÓN 2

5.13 *El suceso seguro, Ω, tiene una probabilidad igual a 1.*

$$P(\Omega) = 1$$

Condición que está justificada porque el suceso seguro ocurre siempre.

CONDICIÓN 3

5.14 *Si A y B son sucesos disjuntos, es decir, que no pueden darse simultáneamente, la probabilidad del suceso $A \cup B$ debe ser la suma de las probabilidades de A y de B, es decir:*

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset, \quad \text{entonces} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

La probabilidad comparte esta propiedad con gran número de medidas físicas, como la longitud, el peso o el volumen. Por ejemplo, la longitud de dos intervalos que no tienen ningún punto en común es igual a la suma de las longitudes de las componentes. Además, esta propiedad también se cumple para las frecuencias. Si A y B son dos acontecimientos que pueden darse al realizar un fenómeno aleatorio y esos acontecimientos no pueden ocurrir simultáneamente, la frecuencia con que observamos uno u otro es igual a la frecuencia con que observamos A más la frecuencia con que observamos B.

$$\text{Frecuencia}(A) + \text{Frecuencia}(B) = \text{Frecuencia}(A \cup B)$$

Así, es razonable exigir una condición similar para la probabilidad.

CONDICIÓN 4

Si A es un suceso, la probabilidad de su suceso contrario es igual a $1 - P(A)$. 5.15

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Esta propiedad se puede deducir matemáticamente de las anteriores, concretamente de las condiciones pero 2 y 3, pero hemos preferido considerarla una exigencia más para evitar las demostraciones.

PROBABILIDAD

Una probabilidad sobre un espacio de posibilidades Ω es una función que a cada subconjunto A de Ω le asocia un número $P(A)$. Esta función cumple las cuatro condiciones siguientes: 5.16

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$.

(2) $P(\Omega) = 1$.

(3) Si $A, B \subset \Omega$, son dos sucesos con intersección vacía, entonces se cumple

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(4) Si A es un suceso, la probabilidad del suceso contrario es igual a $P(A^c) = 1 - P(A)$.

5.2.4 ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES EN UN ESPACIO FINITO

Si el espacio de posibilidades contiene sólo un número finito de elementos, como ocurre en todos los ejemplos que hemos considerado hasta este momento, la condición 3 que hemos exigido a la probabilidad simplifica

mucho la tarea de definirla. Puesto que los sucesos compuestos están formados por un número finito de sucesos simples disjuntos, su probabilidad se puede expresar como suma finita de las probabilidades de los sucesos simples que lo componen. Así, basta con dar las probabilidades de los sucesos simples para tener definido el modelo. Pero, las probabilidades de los sucesos simples no pueden ser arbitrarias, tienen que respetar las condiciones de coherencia: deben ser números entre 0 y 1, para que se cumpla la condición 1, y su suma debe ser igual a 1, para que se cumpla la condición 2.

ASIGNACIÓN DE PROBABILIDAD EN UN ESPACIO FINITO

5.17

- *Para definir una probabilidad en un espacio que tenga un número finito de resultados posibles, basta con dar una probabilidad a cada uno de los sucesos simples. Esas probabilidades deben ser números entre 0 y 1, tales que su suma sea 1.*
- *La probabilidad de los restantes sucesos se calculan sumando las probabilidades de los sucesos simples que los componen.*

EJEMPLO 5.8 Consideremos el fenómeno aleatorio que consiste en lanzar dos veces una moneda. El espacio de posibilidades de este fenómeno es

$$\Omega = \{\odot\odot,\ \odot\otimes,\ \otimes\odot,\ \otimes\otimes\}$$

Tiene cuatro sucesos simples. Aceptemos que no tenemos ninguna razón para considerar que hay algo que nos haga preferir un resultado a otro. En estas condiciones, los resultados son intercambiables, podríamos llamar "cara" a lo que ahora denominamos "cruz" y el juego sería exactamente igual. Entonces debemos aceptar que los cuatro sucesos simples tienen la misma probabilidad

$$P(\odot\odot) = P(\odot\otimes) = P(\otimes\odot) = P(\otimes\otimes) = p,$$

donde p es un número desconocido que determinaremos gracias a la condición que obliga a que la suma de las probabilidades de los sucesos simples sea igual a uno. De la igualdad

$$P(\odot\odot) + P(\odot\otimes) + P(\otimes\odot) + P(\otimes\otimes) = 4p = 1,$$

se deduce que $p = 1/4$, es decir $p = 0.25$. La probabilidad de cada suceso elemental es 0.25.

$$P(\odot\odot) = P(\odot\otimes) = P(\otimes\odot) = P(\otimes\otimes) = 0.25$$

De las probabilidades de los sucesos simples podemos deducir la probabilidad de cualquier suceso. Por ejemplo, el suceso

$$A = \text{"un resultado es cara"} = \{\odot\otimes,\ \otimes\odot\},$$

	Suceso	*Suceso*	*Suceso*	Ω
	{☺☺}	{☺☺,☺⊗}	{☺☺,☺⊗,⊗☺}	{☺☺,☺⊗,⊗☺,⊗⊗}
	{☺⊗}	{☺☺,⊗☺}	{☺☺,☺⊗,⊗⊗}	
	{⊗☺}	{☺☺,⊗⊗}	{☺☺,⊗☺,⊗⊗}	
	{⊗⊗}	{☺⊗,⊗☺}	{⊗☺,⊗☺,⊗⊗}	
		{☺⊗,⊗⊗}		
		{⊗☺,⊗⊗}		
Probabilidad	0.25	0.50	0.75	1.00

Tabla 5.1: Descripción del experimento aleatorio del lanzamiento de dos monedas.

tiene probabilidad igual a

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{☺⊗,\ ⊗☺\}) \\ &= P(\{☺⊗\}) + P(\{⊗☺\}) \\ &= 0.25 + 0.25 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

La tabla 5.1 muestra todos los sucesos de este fenómeno aleatorio, salvo el suceso imposible, junto con su probabilidad calculada a partir de las probabilidades de los sucesos simples.

EJEMPLO 5.9 Consideremos el fenómeno que consiste en lanzar un dado. Como sabemos, su espacio muestral es

$$\{⚀,\ ⚁,\ ⚂,\ ⚃,\ ⚄,\ ⚅\}$$

Nuestra evidencia es que el dado está perfectamente hecho, por ello aceptaremos que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir.

$$P(\{⚀\}) = P(\{⚁\}) = P(\{⚂\}) = P(\{⚃\}) = P(\{⚄\}) = P(\{⚅\}) = p$$

De nuevo, determinaremos el valor de p gracias a que la suma de las probabilidades de los sucesos simples es igual a 1.

$$P(\{⚀\}) + P(\{⚁\}) + P(\{⚂\}) + P(\{⚃\}) + P(\{⚄\}) + P(\{⚅\}) = 6p = 1$$

Lo que implica que $p = 1/6$.

Una vez hemos asignado una probabilidad coherente a cada suceso simple, el modelo está determinado, y podemos calcular la probabilidad de cualquier suceso

compuesto. Por ejemplo, el suceso "el resultado es par" tiene una probabilidad igual a

$$\begin{aligned} P(\text{"el resultado es par"}) &= P(\{ \text{⚁}, \text{⚃}, \text{⚅} \}) \\ &= P(\{ \text{⚁} \}) + P(\{ \text{⚃} \}) + P(\{ \text{⚅} \}) \\ &= \frac{3}{6} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

Este fenómeno tiene $2^6 = 64$ sucesos distintos y, basta con dar las probabilidades los seis sucesos simples, para tener definido el modelo.

EJEMPLO 5.10 De nuevo vamos a considerar el fenómeno que consiste en lanzar un dado. Ahora, disponemos de evidencias que indican que el dado está cargado y que los sucesos simples no tienen todos la misma probabilidad. Supongamos que, después de hacer un buen número de experimentos, llegamos a la conclusión de que las probabilidades son las que se muestran en la tabla siguiente

Modelo no uniforme del lanzamiento del dado

Suceso	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
Probabilidad	0.1	0.1	0.4	0.1	0.2	0.1

Primero, el modelo es coherente con las condiciones de la probabilidad. Las probabilidades de los sucesos simples son números entre 0 y 1, y su suma vale uno.

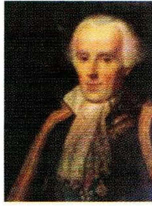
$$0.1 + 0.1 + 0.4 + 0.1 + 0.2 + 0.1 = 1.0$$

Segundo, este modelo *no es uniforme*, ya que no todos los sucesos simples tienen la misma probabilidad. Las probabilidades de los sucesos compuestos se calculan sumando las probabilidades de los sucesos simples que lo componen. Por ejemplo, probabilidad del suceso $A =$ "el resultado es impar", es

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{ \text{⚀}, \text{⚂}, \text{⚄} \}) \\ &= P(\{ \text{⚀} \}) + P(\{ \text{⚂} \}) + P(\{ \text{⚄} \}) \\ &= 0.1 + 0.4 + 0.2 \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

5.2.5 ASIGNACIÓN DE PROBABILIDAD EN LOS MODELOS UNIFORMES FINITOS

Los ejemplos 5.8 y 5.9 son dos casos de modelos finitos y *uniformes*. Finitos, porque hay un número finito de casos posibles, y uniformes, porque todos los resultados posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir. Estos modelos son clásicos. La mayoría de los primeros problemas sobre Probabilidad, que se plantearon y resolvieron durante los siglos XVI y XVII se encuadran en esta categoría. Por esta razón, tienen un lenguaje peculiar. Los resultados posibles se denominan *casos posibles* y, si A es el suceso cuya probabilidad queremos hallar, los sucesos simples que forman A se denominan *casos favorables* a A. Por último, en lugar de decir que el modelo es *uniforme*, el término clásico es *"al azar"*. Si decimos que se elige un caso posible *al azar*, quiere decir que damos por supuesto que todos los casos posibles tienen la misma probabilidad de ser elegidos.



Pierre-Simon de Laplace (1749–1827).

Matemático astrónomo y físico francés de la época napoleónica.

La aplicación de la regla de Pierre-Simon de Laplace conduce a errores sino se aplica con atención. Sobre todas las cosas, es importante tener *sentido común*. Recordemos la frase del mismo Laplace:

> *La Teoría de las probabilidades no es otra cosa que el sentido común convertido en cálculo.*

Si los casos se eligen al azar, todos los casos posibles tienen la misma probabilidad, que es igual a

$$\frac{1}{\text{número de casos posibles}}$$

La probabilidad de A será la suma de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman; es decir, de sus casos favorables. Como todos tienen la misma probabilidad, la probabilidad de A será igual al número de casos favorables multiplicado por la probabilidad común, lo que es igual a

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Hemos deducido así la norma clásica para calcular probabilidades, que se atribuye tradicionalmente a Laplace, y que se enuncia:

REGLA DE LAPLACE

5.18

La probabilidad de un suceso A en un fenómeno aleatorio finito y uniforme es igual a

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favorables a } A}{\textit{número de casos posibles}}$$

EJEMPLO 5.11 Consideremos el fenómeno aleatorio que consiste en extraer *al azar* una bola de una bolsa que contiene 3 bolas rojas, 2 verdes y una blanca y observar su color. Este modelo, en pequeño, es el patrón de muchos muestreos.

Los casos posibles parecen ser "la bola es roja", "la bola es verde" y "la bola es blanca", pero, así planteado, el modelo no es uniforme. Nos parece inaceptable



concluir que estos tres casos tienen la misma probabilidad de ocurrir; parece claro que es más probable extraer una bola roja que una verde, y que es más probable extraer una verde que una blanca. Reflexionemos sobre las condiciones del sorteo, lo que se elige "al azar" es una bola. Es decir; es tan probable elegir una bola como elegir cualquier otra. Para hacer más fácil nuestro razonamiento, imaginemos que las bolas están numeradas y que apreciamos tanto el color como el número de la bola extraída. Ahora, los resultados posibles son:

$$\{\text{roja}_1, \text{roja}_2, \text{roja}_3, \text{verde}_4, \text{verde}_5, \text{blanca}_6\}$$

que constituye un nuevo espacio de posibilidades y ahora es razonable suponer que el modelo es uniforme. La consecuencia inmediata es que cada uno tiene probabilidad $1/6$.

En este espacio los sucesos "sale roja" y "sale verde" son compuestos

$$\text{"sale roja"} = \{\text{roja}_1, \text{roja}_2, \text{roja}_3\}$$
$$\text{"sale verde"} = \{\text{verde}_4, \text{verde}_5\}$$

mientras que "sale blanca" es igual a

$$\text{sale blanca} = \{\text{blanca}_6\}$$

y sigue siendo un suceso simple. La regla de Laplace asigna probabilidades

$$P(\text{"sale roja"}) = \frac{3}{6}$$
$$P(\text{"sale verde"}) = \frac{2}{6}$$
$$P(\text{"sale blanca"}) = \frac{1}{6}$$

tal y como parece razonable a primera vista.

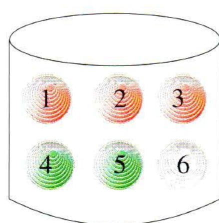


Figura 5.2: Ilustración de la regla de Laplace.

5.3 PROBABILIDADES CONDICIONADAS

Hemos convenido denominar probabilidad de un suceso a la medida de la verosimilitud de que ese suceso ocurra. Parece natural pensar que esa medida dependerá del conocimiento o información que tengamos sobre el fenómeno aleatorio. En este apartado estudiaremos el concepto matemático que permite relacionar probabilidad con estado de información.

Si una persona extrae al azar una carta de una baraja española de cuarenta cartas, la mira y la coloca boca abajo sobre la mesa, sin dejarnos verla, y nos pregunta la probabilidad de que sea un rey, nuestra respuesta debe ser

$$P(\text{rey}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}.$$

Reflexionemos ante esta situación. El suceso "la carta es rey" tiene dos valoraciones simultáneas. La persona *conoce* la carta extraída, tiene *certeza* acerca de si el suceso ha ocurrido o no. Para nosotros, hay incertidumbre. Sólo conocemos el modo de elección de la carta: una, al azar, entre cuarenta. Por ello valoramos la probabilidad del suceso $1/10$.

Imaginemos que, para ayudarnos a identificar la carta, nos proporciona la información de que es una figura (una *sota, un caballo* o un *rey*). Ahora, nuestra valoración de la probabilidad del suceso debe cambiar. La carta extraída puede ser una cualquiera de las 12 figuras y en 4 casos será un rey; ahora, la probabilidad de que sea un rey es $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. El cambio en la información de que disponemos sobre el suceso altera la probabilidad de éste. No hay nada sorprendente en esta observación de que la valoración de un suceso está condicionada por la información que tengamos acerca del experimento. En el ejemplo que acabamos de ver, parece lógico distinguir las dos valoraciones añadiendo algo que indique bajo qué estado de información se realizan. Así, resultaría natural, que pusiéramos

$$P(\text{la carta es rey} \mid \text{se elige al azar entre todas las cartas}) = \frac{1}{10},$$

para expresar la primera valoración, mientras que

$$P(\text{la carta es rey} \mid \text{se elige al azar entre las figuras}) = \frac{1}{3}$$

correspondería a la segunda valoración. Esta nueva notación traduce el concepto que denominaremos probabilidad condicionada, y que estudiaremos en este apartado. Un símbolo como

$$P(\text{la carta es rey} \mid \text{se elige al azar entre las figuras})$$

Alumnos de enseñanza universitaria. Curso 2002–2003					
	Licenciatura	Arquitectura e Ingeniería	Diplomatura	Arquitectura e Ingeniería técnicas	TOTAL
Universidades públicas	690292	148311	316161	209220	1363984
Universidades privadas	62983	14150	27343	19701	124177
Total	753275	162461	343504	228921	1488161
Fuente: Instituto Nacional de Estadística					

Tabla 5.2: Estudiantes universitarios en España.

se lee "probabilidad de que la carta sea un rey, si es una figura".

Lo que no es tan evidente y resulta más significativo es que ambas valoraciones pueden relacionarse. Para razonar cuál es esa relación, consideremos los datos de la tabla 5.2 sobre el número de estudiantes universitarios en España, durante el curso 2002–2003, tomados del boletín sobre Educación y Cultura del INE.

Vamos a sortear eligiendo un estudiante al azar en distintos colectivos. Esos sorteos nos llevarán a encontrar las probabilidades de un mismo suceso pero referidas a diferentes fenómenos aleatorios. Trataremos de relacionar sus probabilidades.

La tabla 5.2 esconde la posibilidad de realizar varios sorteos. Estudiemos este aspecto con detalle. Un primer sorteo consiste en elegir del total de estudiantes, un estudiante universitario al azar. De acuerdo con la tabla, este sorteo tiene 1 488 161 casos posibles, tantos como estudiantes universitarios, ya que se elige entre ellos. Todos los casos posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir, ya que el sorteo es al azar. Estamos dentro del dominio de aplicación de la regla de Laplace. Vamos a considerar los sucesos $A =$ "*Estudia en una universidad privada*" y $B =$ "*Estudia una licenciatura*". Si nos preguntamos, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante que resulte elegido esté cursando sus estudios en una universidad privada? La respuesta es:

$$P(A) = \frac{124\,177}{1\,488\,161} = 0.083$$

ya que, según aparece en la tabla, hay 124 177 estudiantes matriculados en las universidades privadas; estos son los casos favorables a A. De manera similar, si nos preguntamos ¿cuál es la probabilidad de que estudie una

licenciatura?, la respuesta es:

$$P(B) = \frac{753\,275}{1\,488\,161} = 0.506.$$

El número de casos posibles sigue siendo el mismo, ya que lo determina el fenómeno que consideremos y no ha cambiado. Los casos favorables a B son 753 275, tantos como el total de estudiantes de licenciatura.

Ahora, calculemos la probabilidad de que el elegido estudie una licenciatura en una universidad privada. Este suceso se denota por $A \cap B$, ya que es la intersección de los dos anteriores. El número de casos posibles sigue siendo igual a 1 488 161. El número de casos favorables es igual al número de estudiantes de licenciatura en las universidades privadas; es decir 62 983. La probabilidad que buscábamos es

$$P(A \cap B) = \frac{62\,983}{1\,488\,161} = 0.042.$$

Los datos son coherentes, la probabilidad de que estudie una licenciatura en una universidad privada es menor que la de que estudie en una universidad privada,

$$P(A \cap B) = 0.042 \leq 0.083 = P(A)$$

y menor que la probabilidad de que estudie una licenciatura

$$P(A \cap B) = 0.042 \leq 0.506 = P(B).$$

Ahora, supongamos que ya hemos elegido un estudiante y tenemos una información sobre él: es un estudiante de una universidad privada. ¿Cuál es la probabilidad de que estudie una licenciatura? Desde luego, nos estamos preguntando si la persona elegida estudia una licenciatura en una universidad privada, ¿significa esto que la respuesta es la probabilidad $P(A \cap B)$, que calculamos hace un momento? Sigamos el consejo de Laplace y llevemos el sentido común al cálculo: no es la probabilidad $P(A \cap B)$. Esta probabilidad valora la verosimilitud de que ocurran ambos sucesos cuando sólo sabemos que el estudiante será elegido al azar. La información adicional que ahora tenemos altera el número de casos posibles; la incertidumbre se ha reducido. Comparemos estas situaciones. Los cálculos del párrafo anterior consideraban que había 1 488 161 casos posibles. Esto es lo razonable cuando la única información que tenemos es: *el estudiante ha sido elegido al azar entre la totalidad de los universitarios*. En esa situación, nuestra duda era ¿qué estudiante será entre 1 488 161 estudiantes? Pero, la situación ha cambiado. Sabemos que estudia en una universidad privada. Ahora, nuestra duda se limita a los 124 177 que estudian en universidades privadas. Lo

correcto es considerar que hay 124 177 casos posibles y, como cada estudiante tiene la misma probabilidad de ser elegido, cada uno de estos casos debe ser igualmente probable. Los casos favorables a que estudie una licenciatura son tantos como estudiantes de licenciatura en las universidades privadas, es decir 62 983 y la probabilidad pedida es

$$\frac{62\,983}{124\,177} = 0.507.$$

Esta probabilidad está definida en un modelo probabilístico diferente. El modelo del fenómeno aleatorio que consiste en elegir al azar un estudiante *entre los estudiantes de las universidades privadas.* Para designar esta probabilidad emplearemos la notación $P(B \mid A)$. Este símbolo representa la probabilidad de que ocurra B condicionado por que A ha ocurrido. Esta clase de probabilidades se denominan *probabilidades condicionadas.* El suceso A recoge la información adicional de que disponemos: "el individuo elegido pertenece a A" y diremos de él que es el *suceso que condiciona.* La probabilidad $P(B \mid A)$ se lee "probabilidad de B condicionada por A".

Las probabilidades $P(B)$ y $P(B \mid A)$ valoran el grado de creencia en que el estudiante elegido estudia una licenciatura bajo dos estados de información diferentes. En el caso de la probabilidad $P(B)$ poseemos la información de cómo se realiza el sorteo para elegir al estudiante: es al azar entre todos los universitarios. La probabilidad $P(B \mid A)$ expresa nuestro grado de creencia en que B ocurrirá cuando, además, sabemos que A ha ocurrido y que el estudiante está matriculado en una universidad privada.

Si repasamos con atención las expresiones anteriores que calculan las tres probabilidades $P(A)$, $P(A \cap B)$ y $P(B \mid A)$, descubriremos una relación muy importante. Esa relación se muestra con claridad si en la fracción

$$P(B \mid A) = \frac{62\,983}{124\,177} = 0.507$$

dividimos numerador y denominador por el número total de estudiantes.

$$P(B \mid A) = \frac{\frac{62\,983}{1\,488\,161}}{\frac{124\,177}{1\,488\,161}}$$

Entonces, descubrimos que la fracción del numerados y la del denominador tienen un nuevo sentido y que podemos poner:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Esta fórmula relaciona la probabilidad condicionada por A con probabilidades calculadas antes de saber que A ha ocurrido. La costumbre es tomarla como *definición* de la probabilidad condicionada.

PROBABILIDAD DE UN SUCESO CONDICIONADA POR OTRO

5.19

La probabilidad de que ocurra el suceso B cuando sabemos que A ha ocurrido se denomina probabilidad de B **condicionada** *por A, y se designa por el símbolo $P(B \mid A)$.*
La probabilidad condicionada se calcula a partir de las probabilidades incondicionales gracias a la relación:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

EJEMPLO 5.12 Si un estudiante está matriculado en una universidad pública, ¿cuál es la probabilidad de que sea estudiante de una diplomatura?

La pregunta hace referencia a una probabilidad condicionada.En español, la estructura de las oraciones condicionales es:

si *enunciado 1*, **entonces** *enunciado 2*

¿Cuál es el suceso que condiciona?, el suceso:

$C =$ "Estudia en una universidad pública"

¿Cuál es el suceso cuya probabilidad queremos calcular?, el suceso

$D =$ "Estudia una diplomatura".

Con esta notación, la pregunta que motiva este ejemplo se puede reformular de manera más breve: ¿cuánto vale $P(D \mid C)$? De acuerdo con la fórmula que hemos razonado, es

$$P(D \mid C) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)}$$

y, sin más que mirar los datos convenientes en la tabla 5.2, encontramos que

$$P(C) = \frac{1\,363\,984}{1\,488\,161} = 0.917$$

y

$$P(C \cap D) = \frac{316\,161}{1\,488\,161} = 0.212$$

luego

$$P(D \mid C) = \frac{0.212}{0.917} = 0.231$$

5.3.1 CÁLCULO CON PROBABILIDADES CONDICIONADAS

La probabilidad condicionada es un concepto rico que facilita el cálculo y añade matices a la interpretación de la probabilidad. Volvamos a examinar de nuevo el cociente que define la probabilidad condicionada. En la sección anterior, nuestro objetivo era calcular $P(B \mid A)$ partiendo de probabilidades incondicionales, por eso lo formulamos así

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ahora, pretendemos aprovechar la probabilidad condicionada para calcular probabilidades incondicionales. Por ello, reformulamos la igualdad anterior de la manera siguiente

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$$

Escrita así, parece una fórmula pensada para calcular $P(A \cap B)$ a partir de $P(A)$ y de $P(A \mid B)$ y, efectivamente, es así. Pero, sobre todo, su importancia radica en que posee una interpretación natural, cuando la aparición de los sucesos sigue cierta secuencia temporal, que resumimos en el recuadro siguiente:

FÓRMULA FUNDAMENTAL

5.20 *Si A y B son dos sucesos, la probabilidad de que ocurran ambos sucesos es igual a la probabilidad de que ocurra primero A, por la probabilidad de que ocurra B si ya ha ocurrido A.*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$$

EJEMPLO 5.13 De una urna que contiene cuatro bolas rojas y dos azules extraemos una bola y, sin devolverla a la urna, extraemos otra a continuación. Designemos por R_1 al suceso

$$R_1 = \text{“La primera bola es roja”}$$

y por R_2 al suceso

$$R_2 = \text{“La segunda bola es roja”}$$

Veremos cómo el cálculo más simple de la probabilidad del suceso “ambas bolas son rojas”, $P(R_1 \cap R_2)$, pasa por aplicar la fórmula anterior.

La probabilidad de que la primera bola sea roja es $4/6$; este es un cálculo bien simple, ya que la bola se extrae al azar y hay seis bolas en la urna, de las que cuatro son rojas. La probabilidad condicionada $P(R_2 \mid R_1)$ también se calcula con

facilidad. Podemos decir que es un dato "inmediato" de este problema. Si hemos sacado ya una bola roja, la urna contiene tres rojas y dos azules, y se tiene

$$P(R_2 \mid R_1) = \frac{3}{5}$$

Por el contrario, observemos que ninguna de las probabilidades $P(R_1 \cap R_2)$ y $P(R_2)$ es inmediata. Lo razonable es calcular la primera gracias a la fórmula fundamental.

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2 \mid R_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

De nuevo, insistimos en lo natural de esta fórmula que se lee: la probabilidad de obtener dos bolas rojas en dos extracciones consecutivas es igual a la probabilidad de obtener una bola roja en la primera extracción, por la probabilidad de obtener una bola roja en la segunda extracción, condicionado a que obtuvimos una bola roja en la primera.

Lograr un método general y sencillo para calcular probabilidades como $P(R_2)$ será el motivo de nuestro próximo análisis.

5.3.2 FÓRMULA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

El ejemplo 5.13 es el paradigma de muchos fenómenos aleatorios que están compuestos por dos sorteos que se suceden en el tiempo, tales que el resultado del primero determina las condiciones del segundo. Primero se extrae una bola de una urna cuya composición, conocida, determina las probabilidades de los sucesos que sólo dependen de esa extracción. Luego, extraemos otra bola sin haber devuelto la primera a la urna, lo que significa que, ahora, la composición de la urna *depende* del color de la bola que hayamos extraído anteriormente. En esta clase de fenómenos, los datos "naturales" son las probabilidades de extraer una bola de un color determinado en la primera extracción y la probabilidad de extraer una bola de un color en el segundo sorteo, condicionada por el color de bola anterior. La fórmula fundamental permite calcular la probabilidad de que ocurran dos sucesos en función de estos datos naturales. En este apartado trataremos de calcular la probabilidad de un suceso determinado por el color de la segunda bola extraída.

Para centrar la discusión, consideremos el fenómeno del ejemplo 5.13 y el cálculo de la probabilidad de que la segunda bola sea roja, $P(R_2)$. Este cálculo, como ya señalamos, no es inmediato a partir de las condiciones del fenómeno.

Primero, conviene entender bien que el suceso R_2 ocurre siempre que la segunda bola sea roja, sin tener en cuenta cuál haya sido el color de la

primera. Esta observación nos da la clave para calcularla; la probabilidad de que la segunda bola sea roja es la suma de la probabilidad de que la primera bola sea roja *y* que la segunda sea roja, más la probabilidad de que la primera bola sea azul *y* la segunda sea roja. Con símbolos, si R_1 y R_2 representan a los sucesos obtener una bola roja en la primera y segunda extracción, y A_1 representa al suceso "obtener una bola azul en la primera extracción", resulta

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(A_1 \cap R_2)$$

Cada una de estas probabilidades se puede calcular gracias a la fórmula fundamental, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_1 \cap R_2) + P(A_1 \cap R_2) \\ &= P(R_1)P(R_2 \mid R_1) + P(A_1)P(R_2 \mid A_1) \end{aligned}$$

Ahora, hemos *resuelto* el problema, en el sentido de haber reducido el cálculo de la probabilidad desconocida, $P(R_2)$, a los datos. Los valores

$$P(R_1) = \frac{4}{6}, \qquad P(R_2 \mid R_1) = \frac{3}{5}, \qquad P(A_1) = \frac{2}{6}, \qquad P(R_2 \mid A_1) = \frac{4}{5}$$

se deducen inmediatamente de las condiciones del fenómeno y tenemos

$$P(R_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$$

FÓRMULA DE LAS PROBABILIDAD TOTAL

La fórmula anterior es un caso particular de la denominada **fórmula de la probabilidad total**.

5.21 *Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son sucesos disjuntos cuya unión es el suceso seguro, la probabilidad de cualquier suceso A se calcula mediante la expresión*

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \cdots + P(B_n)P(A \mid B_n)$$

EJEMPLO 5.14 Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 azules. Elegimos una bola al azar y la introducimos en otra urna que contenía 2 bolas rojas y una azul. Después elegimos una bola al azar de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea roja?

La composición de la segunda urna antes de extraer una bola de ella depende del color que tenga la primera bola. Por eso, las probabilidades condicionadas son los datos "naturales" de este fenómeno. Designemos, como antes, por R_1 y R_2 los

sucesos elegir una bola roja en la primera y segunda extracción, respectivamente; y de manera similar, A_1 y A_2, elegir una bola azul. Los datos son:

$$P(R_1) = \frac{5}{8}, \qquad P(A_1) = \frac{3}{8}$$

y

$$P(R_2 \mid R_1) = \frac{3}{4}, \qquad P(A_2 \mid R_1) = \frac{1}{4}, \qquad P(R_2 \mid A_1) = \frac{1}{2}, \qquad P(A_2 \mid A_1) = \frac{1}{2}$$

La fórmula de la probabilidad total hace automático el cálculo de $P(R_2)$.

$$P(R_2) = P(R_1)P(R_2 \mid R_1) + P(A_1)P(R_2 \mid A_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = 0.656$$

5.3.3 REGLA DE BAYES

Otra vez vamos a examinar la fracción que define la probabilidad condicionada para darle una nueva forma. Consideremos dos sucesos, A y B. La fórmula fundamental nos asegura que se cumple

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A).$$

Si cambiamos los papeles de A y B tenemos también la igualdad

$$P(B \cap A) = P(B)P(A \mid B).$$

Pero, la intersección, $A \cap B$, es conmutativa, es decir, $A \cap B = B \cap A$, por lo que $P(A \cap B) = P(B \cap A)$. Entonces tenemos la igualdad

$$P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

y, tras despejar $P(A \mid B)$, obtenemos

$$P(A \mid B) = P(A)\frac{P(B \mid A)}{P(B)},$$

que es la celebrada **regla de Bayes**.



Thomas Bayes (1702–1761).

REGLA DE BAYES

Si A y B son dos sucesos, la probabilidad de que A haya ocurrido, supuesto que B ha ocurrido, se puede calcular mediante la fórmula: 5.22

$$P(A \mid B) = P(A)\frac{P(B \mid A)}{P(B)},$$

denominada regla de Bayes.

Aparentemente, la regla de Bayes no es más que otra forma de calcular la probabilidad condicionada y, de hecho, así es. Su importancia radica en su interpretación. Para poner de relieve esa interpretación, conviene emplear unos términos peculiares. La probabilidad $P(A)$ se denomina probabilidad *previa*, mientras que $P(A \mid B)$ se denomina probabilidad *posterior*. Estos términos sugieren el marco en el que se aplica la regla. Se trata de valorar cómo se modifica la probabilidad del suceso A, cuando poseemos una nueva evidencia, la información de que B ha ocurrido. La probabilidad previa, $P(A)$, es el resultado de valorar la probabilidad de que A ocurra, *antes* de disponer de la nueva evidencia. La probabilidad posterior $P(A \mid B)$ es el resultado de la nueva evaluación de la probabilidad de que A ocurra, después de disponer de la nueva evidencia. La fórmula de Bayes

$$P(A \mid B) = P(A)\left(\frac{P(B \mid A)}{P(B)}\right),$$

muestra que la probabilidad posterior es igual a la probabilidad previa, multiplicada por un factor que valora la nueva evidencia. Analicemos ese factor, el numerador es $P(B \mid A)$, lo que indica que, si $P(B)$ está fija, cuánto más verosímil sea B supuesto que A ha ocurrido, más verosímil será A, supuesto que B ha ocurrido. El denominador es $P(B)$, esto significa que, fijo el numerador, cuánto menos probable sea B, más verosimilitud añade a que A haya ocurrido.

EJEMPLO 5.15 Lanzamos una moneda equilibrada dos veces, si al menos uno de los resultados es cara, ¿cuál es la probabilidad de que ambos resultados sean cara.

Primero, identificaremos los sucesos que intervienen y los designaremos por símbolos. El suceso que aporta información adicional es "Al menos uno de los resultados es cara"; lo designaremos por B, para seguir la misma notación que hemos empleado antes.

$$B = \{\text{"Al menos uno de los resultados es cara"}\}$$

Por otra parte está el suceso cuya probabilidad queremos valorar, y que designaremos por A.

$$A = \{\text{"Ambos resultados son cara"}\}$$

Cuando nuestra información se reduce a saber que se lanza dos veces una moneda equilibrada, la probabilidad de A es $1/4$, porque hay cuatro casos posibles, igualmente probables, y sólo uno favorable. Esta es la probabilidad *previa* de A.

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Pero, ahora, sabemos que B ha ocurrido; es decir, que alguno de los resultados es cara, y queremos calcular la probabilidad de A ante esta nueva evidencia; esto es, la probabilidad posterior $P(A \mid B)$.

De acuerdo con a la regla de Bayes, se tiene

$$P(A \mid B) = P(A)\left(\frac{P(B \mid A)}{P(B)}\right),$$

luego sólo resta hallar $P(B)$ y $P(B \mid A)$. De los cuatro casos tres son favorables a B, luego

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

mientras que si A ocurre, es seguro que B ocurre, lo que implica $P(B \mid A) = 1$. En resumen, se tiene

$$P(A \mid B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Este resultado sorprende a muchas personas, porque razonan equivocadamente diciendo "si un resultado es cara, es tan probable que el otro sea cara como que sea cruz, luego la probabilidad es $1/2$". La regla de Bayes valora correctamente las nuevas evidencias: si alguno de los resultados es cara, nuestra incertidumbre se centra en cuál de los tres casos

ha ocurrido y, como todos tienen la misma probabilidad de suceder, es dos veces más probable que el otro resultado sea una cruz a que sea una cara.

Observemos la diferencia entre la cuestión anterior y la siguiente: lanzamos una moneda equilibrada dos veces, si el primero de los resultados es cara, ¿cuál es la probabilidad de que ambos resultados sean cara.

Sin dificultad, encontraremos que $P(A) = 1/4$, $P(B') = 1/2$ y $P(B' \mid A) = 1$, donde

$$B' = \{\text{"El primer resultado es cara"}\}$$

luego la regla de Bayes produce:

$$P(A \mid B') = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1/2} = \frac{1}{2}$$

conforme a lo que la mayoría espera, pero la evidencia de que disponemos ahora es distinta que en enunciado original.

EJEMPLO 5.16 Un profesor, experto en cálculo de probabilidades, se encuentra en el rellano de la escalera con un matrimonio; son sus nuevos vecinos. Se presenta y les da la bienvenida. La señora le dice que tienen dos hijos. En ese momento, el profesor estima que la probabilidad de que se trate de dos niñas es 0.25 (en primera aproximación, considera que es tan fácil que cada niño nacido sea varón como que sea mujer). De pronto, aparece una niña y el profesor comprende que es uno de los hijos. En ese momento, tiene una nueva información acerca de la composición de aquella familia, sabe que al menos uno de los hijos es una niña,

y estima la probabilidad de que tengan dos niñas en $1/3 = 0.333$. Esta situación reproduce exactamente el patrón del ejemplo anterior. La determinación del sexo en el nacimiento equivale al lanzamiento de una moneda, que suponemos equilibrada. El profesor quiere estimar la probabilidad de que sus vecinos tengan dos niñas, y recibe la evidencia adicional de que al menos uno de los hijos es una niña.

5.3.4 INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Al comienzo de esta sección analizamos cómo la información de que un suceso A ha ocurrido, modifica la probabilidad de que ocurra otro suceso B, ya que la estimación previa, dada por $P(B)$, se reemplaza por la estimación posterior $P(B \mid A)$. Sin embargo, no siempre la probabilidad condicionada es distinta de la inicial. Por ejemplo, si nos referimos a los datos de la tabla 5.2 y a los sucesos

$$A = \text{"Estudia en una universidad privada"}$$

y

$$B = \text{"Estudia una licenciatura "}$$

encontramos que $P(B) = 0.506$ y $P(B \mid A) = 0.507$. Prácticamente estas dos probabilidades son iguales, lo que implica que saber que A ha ocurrido no modifica nuestra estimación de la probabilidad de que B ocurra. En términos de proporciones diríamos: la proporción de alumnos de licenciatura entre los alumnos de universidades privadas es igual a la proporción de alumnos de licenciatura en toda la Universidad. Parece que tenemos todo el derecho de decir que el suceso B es **independiente** del suceso A.

INDEPENDENCIA DE SUCESOS

5.23 *En un fenómeno aleatorio determinado diremos que el suceso B es* ***independiente*** *del suceso A si se cumple*

$$P(B \mid A) = P(B)$$

Si en la igualdad que define la independencia sustituimos $P(B \mid A)$ por la fracción que la calcula, resulta

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

Así, la condición de independencia se puede expresar como

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Hemos encontrado una condición equivalente para que dos sucesos sean independientes.

SEGUNDA CONDICIÓN DE INDEPENDENCIA.

Dos sucesos A y B son independientes si se cumple 5.24

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Esta segunda versión es más útil, aunque la primera sea más intuitiva. Por ejemplo, nos muestra un aspecto que en la primera condición pasaba desapercibido: la independencia es un concepto simétrico. Si se cumple la segunda condición de independencia, se da en los dos sentidos. Es decir, si B es independiente de A, *necesariamente*, A es independiente de B.

EJEMPLO 5.17 Observamos el fenómeno aleatorio que consiste en lanzar una moneda equilibrada tres veces. Consideremos los sucesos definidos por

A = "No aparece tres veces el mismo resultado",
B = "A lo sumo aparece una cara"
C = "A lo sumo aparecen dos caras"

Queremos analizar las posibles relaciones de independencia que pueden existir entre ellos.

En primer lugar, observemos que el espacio de posibilidades adecuado para describir este fenómeno está formado por ocho elementos, que son todos los resultados posibles de los tres lanzamientos.

$$\Omega = \{CCC,\ CCX,\ CXC,\ CXX,\ XCC,\ XCX,\ XXC,\ XXX\}$$

Puesto que la moneda está equilibrada, es tan probable que salga cara como que salga cruz en cada lanzamiento y, es razonable, considerar que el modelo es uniforme. Así, cada uno de los 8 resultados posibles tiene la misma probabilidad 1/8.

Resulta fácil analizar qué resultados simples son favorables a cada suceso, basta con expresarlos como subconjuntos de Ω.

$$A = \{CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC\},$$
$$B = \{CXX, XCX, XXC, XXX\},$$
$$C = \{CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\},$$

Inmediatamente, obtenemos las probabilidades de cada suceso.

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{7}{8}$$

Ahora calcularemos las probabilidades de las intersecciones de cada par de sucesos. Por una parte, tenemos

$$A \cap B = \{CXX, XCX, XXC\}$$

y $P(A \cap B) = 3/8$.

Por otra parte, se cumple $A \subset C$, ya que si como mucho aparecen dos caras, no pueden ser los tres resultados iguales. Esta inclusión supone que $A \cap C = A$ y, se tiene

$$P(A \cap C) = P(A) = \frac{3}{4}$$

Por último, también se tiene $B \subset C$, ya que si a sumo tenemos una cara, no podemos tener más de dos caras. Así, $B \cap C = B$ y se cumple

$$P(B \cap C) = P(B) = \frac{1}{2}$$

Ya tenemos todos los datos necesarios para analizar la independencia. Primero, entre A y B. Se tiene:

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8} = P(A)P(B)$$

luego A y B son sucesos independientes. Segundo, el par A y C. Se tiene

$$P(A \cap C) = \frac{3}{4} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} = P(A)P(C)$$

luego A y C no son independientes. Por último, el par B y C.

$$P(B \cap C) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} = P(B)P(C)$$

luego tampoco son independientes.

5.3.5 SERIES INDEPENDIENTES DE FENÓMENOS ALEATORIOS

En las series de observaciones de fenómenos aleatorios, la independencia se presenta muchas veces como una hipótesis física impuesta por las condiciones de experimentación. Esta hipótesis supone que ninguna nueva observación del fenómeno está influida por los resultados que hayamos observado antes. En estas circunstancias, es natural aceptar que todos los sucesos correspondientes a esa observación deben ser independientes de cualquier suceso dependiente de una observación anterior.

EJEMPLO 5.18 El sorteo de Navidad de la Lotería nacional es un buen ejemplo de fenómeno aleatorio que se observa una vez cada año. Parece razonable aceptar que el resultado de un año no se ve afectado por los resultados de años anteriores. Es como si los sorteos comenzaran de nuevo cada año, sin pasado ninguno. Las observaciones sucesivas constituyen una serie independiente de fenómenos.

Sin embargo, en otras observaciones repetidas es dudosa la independencia entre fenómenos. Por ejemplo, si una persona se somete a dos cuestionarios sucesivos para medir su coeficiente de inteligencia, podemos dudar que los resultados que

obtenga sean independientes. Las personas aprenden, y resolver las cuestiones del primer cuestionario le ayuda a mejorar su rendimiento en el segundo.

Cuando un fenómenos aleatorio se puede descomponer como una serie de fenómenos independientes, el cálculo de muchas probabilidades se simplifican considerablemente, ya que no precisamos formar el espacio de posibilidades y contar casos, sino que basta con conocer las probabilidades de que ocurra cada suceso en su observación correspondiente. La herramienta clave de cálculo es una regla denominada de multiplicación.

REGLA DE MULTIPLICACIÓN

5.25

Supongamos que observamos una serie de fenómenos aleatorios independientes. Sea A_1 un suceso del primer fenómeno, A_2 un suceso del segundo fenómeno, etc., hasta A_n, suceso del último fenómeno. La probabilidad de que ocurran simultáneamente todos estos sucesos es igual al producto de sus probabilidades.

$$P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

EJEMPLO 5.19 La probabilidad de que un recién nacido en España sea una niña es, aproximadamente 0.485. Cada nacimiento se puede considerar como un fenómeno independiente de los nacimientos anteriores. La probabilidad de que una mujer que ha tenido dos partos haya dado a luz dos niñas es

$$\begin{aligned} P(\text{"Dos niñas"}) &= P(\text{"Primer hijo mujer"})P(\text{"Segundo hijo mujer"}) \\ &= (0.485)^2 \\ &= 0.235 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.20 Los tests de diagnóstico para detectar enfermedades no están exentos de error. Con una frecuencia pequeña, aparece lo que se denomina *falso positivo*, en el que una persona sana es clasificada como enferma por el resultado de un test. Naturalmente, las probabilidades de estos errores son muy pequeñas.

Consideremos un test que tenga una probabilidad igual a 0.003 de dar un falso positivo y supongamos que las 250 personas que trabajan en un hospital están sanas y se someten a esta prueba. Es razonable aceptar que el resultado de la prueba en cada persona es independiente de los resultados en las restantes. En estas condiciones, la probabilidad de que no resulte ningún falso positivo se puede calcular gracias a la regla de multiplicación. Designemos por A_i al suceso

$$A_i = \text{"El test del empleado } i \text{ no resulta falso positivo"}$$

y sea A el suceso

$$A = \text{"No hay ningún falso positivo"}$$

Este suceso es igual a la intersección de los anteriores, ya que, para que no haya ningún falso positivo, la primera prueba no tiene que resultar falso positivo, ni la segunda, etc., ni la última. De la regla de multiplicación, se sigue

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{250}) \\ &= P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_{250}) \end{aligned}$$

Ahora, si la probabilidad de un falso positivo es 0.003, la de no tener un falso positivo será 0.997. Así, obtenemos

$$\begin{aligned} P(A) &= \underbrace{(0.997)(0.997)\cdots(0.997)}_{\text{250 veces}} \\ &= (0.997)^{250} = 0.472 \end{aligned}$$

Observemos que la probabilidad de tener *algún* falso positivo es igual a

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.472 = 0.528$$

Así pues, hay una probabilidad superior al 50 % de tener algún falso positivo.

5.4 VARIABLES DE LA ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

5.4.1 CONCEPTOS BÁSICOS EN ESTADÍSTICA

El origen de Estadística puede remontarse a los recuentos de datos. El hombre hace acopio de datos para tener información sobre características de ciertos colectivos que no se pueden determinar mediante una única observación, sino que son consecuencia de realizar observaciones sobre varios individuos aislados. En consonancia con sus orígenes, en Estadística se utilizan los términos población y unidad estadística para referirse a los colectivos e individuos.

POBLACIÓN

*Se denomina **población** al conjunto de seres u objetos acerca de los que se desea obtener información.* 5.26

UNIDAD ESTADÍSTICA

*Se denomina **unidad estadística**, **individuo**, o **elemento** a cada uno de los miembros de la población.* 5.27

EJEMPLO 5.21 La proporción de hombres y de mujeres en un grupo social determinado es una característica colectiva del grupo, hay que efectuar un recuento de los individuos observando a qué sexo pertenecen; luego, con una operación matemática se obtiene la respuesta de la cuestión planteada.

El estudio de este tipo de características de los colectivos es uno de los primeros objetivos de la Estadística. Hay que notar que el resultado de los recuentos de las observaciones individuales conducen normalmente a unos datos *numéricos*. Asimismo, la información sobre el colectivo suele tener también carácter numérico. Una primera definición de Estadística trata de dar cuenta de esta idea en la forma siguiente:

ESTADÍSTICA

*La **Estadística** es la ciencia que estudia, mediante métodos cuantitativos, características de las poblaciones obtenidas como síntesis de la observación de unidades estadísticas.* 5.28

Conviene precisar un poco más qué tipo de características de los colectivos caen dentro del ámbito de la Estadística; así se comprenderá mejor su alcance y campo de aplicación. Es evidente que a nadie se le ocurre hacer una estadística de los miembros de su familia. Este fenómeno resulta cercano para el individuo por lo que no precisa de recuentos. Sin embargo, hay otras muchas situaciones en que la comprensión del fenómeno colectivo requiere la ayuda de la Estadística. Pensemos, en primer lugar, en aquellas situaciones en que el simple registro de las observaciones individuales no

es suficiente para tener un visión de conjunto del problema. Y ello, por diferentes razones: porque la población objeto de estudio es muy numerosa, como cuando se quiere tener información sobre el nivel de estudios de toda la población de un país; porque, aunque la población no sea numéricamente elevada, las observaciones individuales se producen en intervalos de tiempo grandes, por lo que no resulta sencillo llevar un registro mental de las mismas, como cuando se quiere tener información sobre el número de partos con cuatrillizos en una población; porque las observaciones individuales producen en el receptor una impresión diferente, como ocurre cuando el observador está influido por un prejuicio del estilo "las mujeres conducen peor que los hombres". Pueden incluirse también aquellas situaciones en que el observador precisa confirmar de manera objetiva, es decir, con el apoyo de resultados numéricos, impresiones subjetivas que, en principio, son ciertas. Por ejemplo, un investigador puede tener la impresión de que en una tribu, la edad del varón de la pareja es usualmente mayor que la de la mujer, o bien que la poligamia es una circunstancia excepcional; pero, sólo con la ayuda de los datos estadísticos estará en condiciones de confirmar su impresión de una manera objetiva. En fin, pueden considerarse también aquellas situaciones en que, aun disponiendo de información numérica sobre el fenómeno, el concurso de la Estadística puede ayudar a precisarlo mejor y disminuir la posibilidad de error. Un ejemplo de esta situación son aquellas investigaciones que conllevan mediciones, como puede ser la cantidad, en gramos, de un preparado que hace letal a una dosis del mismo; en este caso, es necesario repetir varias veces la experiencia para tener una información de conjunto más precisa que la que se obtiene con una única observación.

Un estadio más perfeccionado de los recuentos son los censos. Cuando se pretende disponer de información sobre toda la población, cabe la solución, en general únicamente al alcance del *estado*, de hacer un censo.

CENSO

5.29 *Un **censo** consiste en anotar determinadas características de todos los individuos de una población.*

El registro de los datos que se refieren a todos los individuos constituye una *descripción* global de la población. Pero además, es posible establecer también, a partir de los datos individuales, ciertas consecuencias, usualmente de tipo *numérico*, que se derivan de las observaciones realizadas y significan información nueva sobre el colectivo.

EJEMPLO 5.22 El *census* romano incluía los datos de cada cabeza de familia. A partir de ellos se calculaba la cantidad de impuestos que correspondía a cada uno.

Una variante de los censos son las recopilaciones de datos que dan cuenta, como decían los aritméticos políticos, de las cosas notables de los estados. Las ideas teóricas, los métodos prácticos y las técnicas para realizar esta labor de recopilación y sistematización de los conjuntos de datos dan origen a un apartado particular dentro de la Estadística.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

*La **Estadística Descriptiva** es la parte de la Estadística que estudia las ideas, métodos y técnicas para la descripción gráfica y numérica de los conjuntos numerosos.* 5.30

Los métodos que utiliza la Estadística Descriptiva para describir a los conjuntos numerosos son las tablas de frecuencias, las representaciones gráficas, los resúmenes numéricos de los datos, etc. El resultado de su aplicación es una especie de fotografía del colectivo objeto de estudio.

Como hicimos notar en la introducción, la Estadística tiene una vocación más ambiciosa que limitarse a la mera descripción estática del conjunto de datos que se han obtenido como resultado de un recuento o un censo. Un paso más avanzado consiste en pensar que dichos datos no son más que una parte de un conjunto más amplio, que es el conjunto que realmente se quiere investigar.

MUESTRA

*Se denomina **muestra** al subconjunto de individuos que son observados para obtener información sobre el total de la población a que pertenecen.* 5.31

Si el conocimiento de las poblaciones se tiene que basar en el examen de muestras, es natural preguntarse cómo extender la información que se obtiene mediante el estudio de los datos observados en un subconjunto a todo el universo del que proceden. Es decir, se puede plantear cómo extender las conclusiones sobre la muestra a toda la población. Este paso desde lo particular, la muestra, a lo general, la población, es una de las aportaciones más importantes de la Estadística al pensamiento científico y supone una auténtica revolución sobre la manera de generar conocimiento. Los métodos para hacerlo configuran el núcleo de la Estadística matemática, enlazando con las ideas pioneras de los siglos XVII y XVIII.La novedad del método ha hecho acuñar una terminología nueva: la expresión Inferencia estadística. Este concepto es completamente diferente del método deductivo o del método de inducción completa utilizado tradicionalmente por la Ciencia.

INFERENCIA ESTADÍSTICA

5.32 *La **Inferencia estadística** es la parte de la Estadística que estudia los métodos para establecer conclusiones sobre una población a partir de una muestra de la misma.*

Los métodos de la Inferencia estadística permiten establecer rigurosas conclusiones científicas acerca de las poblaciones mediante el examen de una muestra o parte de las mismas. Estas conclusiones tienen la forma de estimaciones sobre constantes de la naturaleza, predicciones del comportamiento de fenómenos en que interviene el azar, confirmación o refutación de hipótesis establecidas por los investigadores, etc.

5.4.2 VARIABLES Y OBSERVACIONES

Los datos estadísticos proceden de observar atributos o medir magnitudes en cierto número de individuos de una población.

VARIABLE ESTADÍSTICA

5.33 *Los atributos o magnitudes que se observan en los individuos de la población se denominan **variables estadísticas** o, simplemente, **variables**.*

- *De los atributos, diremos que presentan **modalidades**.*
- *De las magnitudes, diremos que toman **valores**.*

Las modalidades o valores de una variable deben ser **incompatibles** y **exhaustivos**; es decir, todo individuo puede presentar una y solamente una modalidad.

EJEMPLO 5.23 El *número de hijos*, *raza*, la *religión*, el *sexo* o el *peso* de una persona son variables estadísticas. La *raza* y la *religión* son atributos, el *número de hijos* y el *peso* son magnitudes. El *sexo* es una variable que tiene dos modalidades: *masculino* o *femenino*. El *número de hijos* es una variable que toma los valores 0, 1, 2, ..., etc., hasta el valor máximo que se presente en la población.

OBSERVACIÓN

5.34 *El conjunto de modalidades o valores de cada variable medidos en un individuo constituye una **observación**.*

EJEMPLO 5.24 La tabla 5.3 muestra un extracto de las observaciones que recogió F. Galton en la *International Exhibition* de 1884 y que publicó en el *Journal of the Anthropological Institute* en 1889, en relación con sus trabajos sobre correlación. En adelante la llamaremos *tabla de Galton*. La tabla incluye las variables siguientes:

- *Edad*, que viene expresada en años y toma los valores 23, 24 y 25.
- *Estado civil*, que tiene dos modalidades: 'soltero' y 'casado'.
- *Color de ojos*, que tiene seis modalidades: 'azul', 'avellana', 'gris', 'marrón', 'negro' y 'verde'.
- *Lugar de residencia*, que tiene cinco modalidades: 'campo', 'ciudad', 'suburbio', 'mar' y 'varios'.
- *Estatura*, que viene expresada en 'pulgadas' y toma valores comprendidos entre 59.4 y 79.5.
- *Peso*, que viene expresada en 'libras' y toma valores comprendidos entre 107.25 y 236.00.

Los valores que corresponden a un individuo constituyen una observación. Por ejemplo,

23, Soltero, Marrón, Suburbio, 64.00, 111.50

es la observación que corresponde al primer individuo de la tabla.

Hay que notar que algunas observaciones están incompletas, puesto que les falta el correspondiente valor o modalidad en alguna variable. Por ejemplo, la observación 35 carece de la modalidad correspondiente a la variable *residencia*. Por otra parte, se puede apreciar que algunas modalidades son muy poco frecuentes, como es el caso de 'mar' en la variable *lugar de residencia* que solo se observa en un individuo. Estas circunstancias son habituales cuando se manejan los datos en bruto procedentes de un censo o una muestra.

5.4.3 CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES

Las variables estadísticas se clasifican atendiendo a las propiedades de la escala de medida con que se valora el atributo o magnitud subyacente. Una primera clasificación distingue entre las que a cada unidad estadística le asignan una modalidad del atributo y las que le asignan un valor numérico de la magnitud correspondiente.

VARIABLES CUALITATIVAS

Una variable se denomina ***cualitativa*** *cuando mide atributos y sus modalidades no son numéricas sino simples "etiquetas".* 5.35

EJEMPLO 5.25 Las variables *estado civil*, *color de ojos* y *lugar de residencia* son variables cualitativas.

Tabla 5.3: Tabla de observaciones de F. Galton (1884).

SUJETO	EDAD	ESTADO	COLOR OJOS	RESIDENCIA	ESTATURA	PESO
1	23	Soltero	Marrón	Suburbio	64.00	111.50
2	23	Soltero	Azul	Suburbio	72.20	143.00
3	23	Soltero	Negro	Ciudad	66.10	125.50
4	23	Soltero	Negro	Suburbio	66.60	146.00
5	23	Soltero	Gris	Ciudad	69.80	143.50
6	23	Soltero	Azul	Ciudad	67.50	143.00
7	23	Soltero	Negro	Ciudad	68.70	156.25
8	23	Soltero	Marrón	Ciudad	67.10	147.00
9	23	Soltero	Azul	Suburbio	71.50	179.50
10	23	Soltero	Azul	Ciudad	71.80	145.00
11	23	Casado	Azul	Ciudad	71.20	143.75
12	23	Soltero	Azul	Suburbio	68.10	177.50
13	23	Soltero	Marrón	Campo	68.30	155.50
14	23	Soltero	Negro	Suburbio	67.20	142.00
15	23	Soltero	Gris	Suburbio	69.00	141.50
16	23	Soltero	Azul	Suburbio	79.50	203.25
17	23	Soltero	Azul	Campo	67.30	139.00
18	23	Soltero	Gris	Ciudad	69.30	156.50
19	23	Soltero	Azul	Ciudad	64.50	118.00
20	23	Soltero	Marrón	Suburbio	67.20	127.00
21	23	Soltero	Verde	Varias	68.30	156.00
22	23	Soltero	Avellana	Suburbio	65.40	129.50
23	23	Soltero	Gris	Ciudad	70.70	143.25
24	23	Soltero	Marrón	Ciudad	64.00	126.75
25	23	Soltero	Marrón	Ciudad	72.70	145.00
26	23	Soltero	Gris	Campo	73.80	151.50
27	23	Soltero	Gris	Suburbio	72.00	164.00
28	23	Soltero	Azul	Campo	62.60	121.00
29	23	Soltero	Marrón	Ciudad	62.30	129.00
30	23	Soltero	Azul	Ciudad	67.80	128.25
31	23	Soltero	Marrón	Ciudad	66.00	132.25
32	23	Soltero	Marrón	Ciudad	72.30	147.00
33	23	Soltero	Azul	Ciudad	69.60	141.75
34	23	Soltero	Marrón	Ciudad	62.10	121.00
35	23	Casado	Marrón		67.20	141.50
36	23	Soltero	Azul	Campo	67.60	146.25
37	23	Soltero	Azul	Suburbio	66.30	143.00
38	23	Soltero	Gris	Ciudad	68.50	148.75
39	23	Soltero	Azul	Ciudad	65.20	123.00
40	23	Soltero	Gris	Ciudad	62.90	110.50
41	23	Soltero	Marrón	Suburbio	65.50	122.50
42	23	Soltero	Azul	Ciudad	69.80	142.50
43	23	Soltero	Azul	Campo	65.80	125.25
44	23	Soltero	Gris	Ciudad	69.20	135.25
45	23	Soltero	Gris	Ciudad	66.80	154.00
46	23	Casado	Azul	Suburbio	67.50	143.00
47	23	Soltero	Marrón	Suburbio	65.30	127.00
48	23	Soltero	Azul	Suburbio	68.20	137.50
49	23	Soltero	Marrón	Ciudad	69.70	161.50
50	23	Soltero	Gris	Campo	70.10	147.00
51	23	Soltero	Azul	Ciudad	66.20	131.00
52	23	Soltero	Gris	Campo	65.40	134.75
53	23	Soltero	Azul	Ciudad	64.60	135.25
54	23	Soltero	Azul	Suburbio	69.70	169.25
55	23	Soltero	Gris	Campo	69.50	172.50
56	23	Soltero	Azul		63.90	145.00
57	23	Casado	Marrón	Suburbio	68.70	135.50
58	23	Soltero	Avellana	Ciudad	66.20	142.00
59	23	Soltero	Marrón	Ciudad	68.10	123.25
60	23	Soltero	Azul	Suburbio	62.40	117.00
61	23	Soltero	Gris	Ciudad	74.00	152.50
62	23	Soltero	Azul	Ciudad	65.60	134.00
63	23	Soltero	Marrón	Ciudad	63.00	115.00
64	23	Soltero	Azul	Ciudad	66.70	131.25
65	23	Soltero	Azul	Suburbio	66.50	131.00
66	23	Soltero	Azul	Ciudad	71.00	143.25
67	23	Soltero	Azul	Ciudad	69.20	137.00
68	23	Soltero	Azul	Ciudad	68.20	158.50
69	23	Soltero	Azul	Campo	66.80	145.00
70	23	Soltero	Gris	Ciudad	66.50	137.50
71	23	Soltero	Gris	Suburbio	65.60	147.75
72	23	Soltero	Gris	Campo	68.90	153.00
73	23	Soltero	Azul	Ciudad	69.20	160.50
74	23	Soltero	Azul	Ciudad	69.20	136.00
75	23	Soltero	Azul	Ciudad	69.30	155.50
76	23	Soltero	Avellana	Ciudad	66.40	153.00
77	23	Soltero	Gris	Suburbio	67.20	146.00
78	23	Soltero	Azul	Suburbio	68.70	141.50
79	23	Soltero	Azul	Ciudad	69.40	145.00
80	23	Soltero	Marrón	Suburbio	64.40	148.00
81	23	Soltero	Marrón	Ciudad	59.40	109.50
82	23	Soltero	Gris	Campo	68.70	147.75
83	23	Soltero	Azul	Ciudad	71.20	157.25
84	23	Soltero	Gris	Ciudad	69.60	157.00
85	23	Soltero	Gris	Suburbio	69.60	142.50
86	23	Soltero	Gris	Ciudad	66.00	128.25
87	23	Soltero	Gris	Ciudad	68.20	134.00
88	23	Soltero	Avellana	Ciudad	67.80	140.00
89	23	Soltero	Marrón	Ciudad	68.20	138.00
90	23	Soltero	Azul	Suburbio	65.30	139.50
91	23	Soltero	Marrón	Ciudad	70.30	154.00
92	23	Soltero	Gris	Ciudad	70.00	164.50
93	23	Soltero	Avellana	Suburbio	63.90	120.50
94	23	Soltero	Azul	Suburbio	67.50	151.00
95	23	Soltero		Ciudad	71.50	152.50
96	23	Soltero	Azul	Campo	64.70	130.50
97	23	Soltero	Marrón	Ciudad	68.20	153.25
98	23	Soltero	Gris	Ciudad	68.00	158.00
99	23	Soltero		Ciudad	67.00	143.00
100	23	Soltero	Azul	Suburbio	70.80	154.00
101	23	Soltero	Negro	Ciudad	69.30	138.75
102	23	Soltero		Suburbio	62.75	129.50
103	23	Soltero	Gris	Ciudad	68.10	139.25
104	23	Soltero	Azul	Suburbio	67.00	157.00
105	23	Soltero	Azul	Suburbio	62.00	131.50
106	23	Soltero	Marrón	Suburbio	65.20	124.00
107	23	Soltero	Marrón	Suburbio	64.25	115.00
108	23	Soltero	Azul	Suburbio	67.00	140.00
109	23	Soltero	Negro	Campo	68.75	151.50
110	23	Soltero	Marrón	Ciudad	72.50	152.00
111	23	Soltero	Negro	Suburbio	64.00	119.00
112	23	Soltero	Marrón	Suburbio	68.10	139.50
113	23	Soltero	Gris	Campo	67.20	141.00
114	23	Casado	Azul	Suburbio	66.00	142.25
115	23	Soltero	Marrón	Suburbio	66.00	127.50
116	23	Soltero	Marrón	Suburbio	67.00	139.25
117	23	Soltero	Gris	Campo	71.80	145.50
118	23	Soltero	Azul	Suburbio	67.20	135.00
119	23	Soltero	Marrón	Ciudad	68.30	130.00
120	23	Soltero	Azul	Campo	64.40	124.50
121	23	Soltero	Gris	Ciudad	71.30	154.25
122	23	Soltero	Marrón	Campo	71.60	145.25
123	23	Soltero	Azul	Suburbio	67.70	149.25
124	23	Soltero	Gris	Ciudad	66.80	131.75
125	23	Soltero	Gris	Ciudad	66.50	113.00
126	23	Soltero	Azul	Ciudad	70.00	147.25
127	23	Soltero	Gris	Ciudad	72.30	164.00
128	23	Soltero	Gris	Ciudad	66.70	144.00
129	23	Soltero	Marrón	Suburbio	62.50	120.75
130	23	Soltero	Marrón	Ciudad	69.00	131.50
131	23	Soltero	Avellana	Ciudad	67.40	132.50
132	23	Soltero	Marrón	Ciudad	66.00	126.50
133	23	Soltero	Marrón	Ciudad	68.80	148.50
134	23	Soltero	Marrón	Campo	67.50	137.50
135	23	Soltero	Marrón	Ciudad	70.75	153.50
136	23	Soltero	Azul	Ciudad	69.20	141.50
137	23	Casado	Gris	Suburbio	69.80	236.00
138	23	Casado	Gris	Campo	66.50	132.50
139	23	Soltero	Gris	Campo	68.30	149.00
140	23	Soltero	Gris	Ciudad	67.60	142.00
141	23	Soltero	Marrón	Suburbio	69.50	132.00
142	23	Soltero	Gris	Ciudad	65.00	138.50
143	23	Soltero	Verde	Ciudad	70.50	145.25
144	23	Soltero	Marrón	Ciudad	68.40	138.50
145	24	Soltero	Marrón	Ciudad	64.00	143.00
146	24	Soltero	Gris	Suburbio	65.30	133.50
147	24	Soltero	Gris	Campo	70.20	122.00
148	24	Soltero	Azul	Suburbio	66.70	136.00
149	24	Soltero	Gris	Ciudad	72.00	150.00
150	24	Casado	Gris	Suburbio	71.80	165.50
151	24	Soltero	Gris	Suburbio	72.90	162.50
152	24	Soltero	Gris	Suburbio	65.10	137.75
153	24	Soltero	Marrón	Ciudad	68.40	138.00
154	24	Soltero	Azul	Ciudad	69.40	137.00
155	24	Soltero	Azul	Suburbio	64.00	122.00
156	24	Soltero	Gris	Ciudad	65.60	116.50
157	24	Soltero	Azul	Ciudad	70.70	204.75
158	24	Soltero	Marrón	Suburbio	67.60	154.25
159	24	Soltero	Azul	Ciudad	67.20	123.00
160	24	Soltero	Gris	Ciudad	70.20	149.25
161	24	Soltero	Marrón	Ciudad	69.70	159.00
162	24	Soltero	Azul	Campo	65.40	183.50
163	24	Soltero	Azul	Ciudad	67.20	122.50
164	24	Soltero	Marrón	Ciudad	67.60	141.50
165	24	Soltero	Azul	Ciudad	68.00	139.00
166	24	Soltero	Marrón	Suburbio	72.00	153.75
167	24	Soltero	Marrón	Suburbio	71.60	170.75
168	24	Soltero	Marrón	Suburbio	68.60	119.00
169	24	Soltero	Marrón	Suburbio	64.30	126.50
170	24	Soltero	Gris	Suburbio	66.70	131.75
171	24	Soltero	Azul	Suburbio	69.50	150.50
172	24	Soltero	Marrón	Suburbio	70.20	146.00
173	24	Soltero	Azul	Ciudad	71.40	143.00
174	24	Soltero	Marrón	Ciudad	71.00	129.75
175	24	Soltero	Avellana	Suburbio	65.00	140.75
176	24	Soltero	Azul	Campo	72.60	186.75
177	24	Soltero		Ciudad	67.00	119.00
178	24	Soltero	Azul	Ciudad	71.20	167.00
179	24	Soltero	Marrón	Ciudad	64.90	126.00
180	24	Soltero	Gris	Ciudad	67.80	145.25
181	24	Soltero	Azul	Ciudad	65.80	130.50
182	24	Soltero	Marrón	Campo	65.60	131.00
183	24	Soltero	Gris	Ciudad	70.20	176.00
184	24	Soltero	Gris	Ciudad	69.50	140.25
185	24	Soltero	Marrón	Ciudad	69.20	151.75
186	24	Soltero	Azul	Suburbio	64.60	126.00
187	24	Soltero	Marrón	Campo	71.40	152.50
188	24	Soltero	Gris	Suburbio	66.50	139.25
189	24	Soltero	Gris	Campo	66.30	127.50
190	24	Soltero	Azul	Ciudad	67.30	150.50
191	24	Soltero	Avellana	Suburbio	64.40	133.50
192	24	Soltero	Marrón	Ciudad	62.60	138.00
193	24	Soltero	Avellana	Ciudad	68.60	139.00
194	24	Soltero	Gris	Suburbio	69.90	139.50
195	24	Soltero	Azul	Suburbio	66.40	127.00
196	24	Soltero	Azul	Ciudad	67.00	137.50
197	24	Soltero	Azul	Ciudad	72.40	172.50
198	24	Soltero	Azul	Ciudad	67.70	153.50
199	24	Soltero	Azul	Ciudad	68.60	164.00
200	24	Soltero	Azul	Ciudad	69.00	140.50

SUJETO	EDAD	ESTADO	COLOR OJOS	RESIDENCIA	ESTATURA	PESO
201	24	Soltero	Azul	Ciudad	74.10	170.00
202	24	Soltero	Avellana	Suburbio	65.60	126.50
203	24	Soltero	Gris	Ciudad	68.40	150.00
204	24	Soltero	Gris	Suburbio	73.70	154.00
205	24	Soltero	Gris	Ciudad	70.60	173.25
206	24	Soltero	Azul	Ciudad	68.60	133.25
207	24	Soltero	Marrón	Campo	69.70	168.25
208	24	Soltero	Gris	Campo	61.00	133.50
209	24	Soltero	Avellana	Ciudad	65.00	137.50
210	24	Soltero	Marrón	Ciudad	69.20	152.25
211	24	Soltero	Gris	Suburbio	67.30	134.25
212	24	Soltero	Marrón	Suburbio	68.00	145.00
213	24	Soltero	Marrón	Suburbio	68.40	141.00
214	24	Soltero	Marrón	Ciudad	64.30	144.25
215	24	Soltero	Azul	Ciudad	69.30	139.50
216	24	Soltero	Gris	Campo	69.50	143.50
217	24	Soltero	Marrón	Campo	66.20	139.50
218	24	Soltero	Gris	Ciudad	66.20	126.00
219	24	Soltero	Gris	Ciudad	65.50	118.00
220	24	Soltero	Gris	Suburbio	69.50	150.00
221	24	Soltero	Marrón	Ciudad	70.40	180.25
222	24	Soltero	Azul	Suburbio	70.20	151.75
223	24	Soltero	Marrón	Campo	66.40	141.00
224	24	Soltero	Azul	Campo	67.50	147.00
225	24	Soltero	Gris	Campo	68.70	154.00
226	24	Soltero	Azul	Ciudad	64.80	121.50
227	24	Soltero	Gris	Campo	68.80	145.00
228	24	Soltero	Marrón	Suburbio	68.50	149.50
229	24	Soltero	Azul	Ciudad	67.20	137.25
230	24	Soltero	Gris	Suburbio	65.10	140.25
231	24	Soltero	Azul	Ciudad	72.20	141.50
232	24	Soltero	Azul	Ciudad	66.70	122.00
233	24	Soltero	Gris	Ciudad	68.40	158.50
234	24	Soltero	Gris	Ciudad	71.20	138.00
235	24	Soltero	Marrón	Suburbio	73.10	157.50
236	24	Soltero	Azul	Ciudad	73.25	163.00
237	24	Soltero	Azul	Campo	68.40	154.50
238	24	Soltero	Gris	Suburbio	65.70	128.00
239	24	Soltero	Marrón	Ciudad	63.25	122.50
240	24	Soltero	Marrón	Mar	67.20	154.00
241	24	Soltero	Azul	Ciudad	68.75	154.00
242	24	Soltero	Gris		67.00	131.00
243	24	Soltero	Gris	Suburbio	69.70	152.75
244	24	Soltero	Gris	Suburbio	70.60	206.75
245	24	Soltero	Marrón	Campo	65.30	124.50
246	24	Soltero	Azul	Ciudad	68.30	145.00
247	24	Soltero	Azul	Ciudad	68.90	133.00
248	24	Soltero	Gris	Campo	66.10	123.50
249	24	Soltero	Azul	Suburbio	69.50	160.00
250	24	Soltero	Marrón	Ciudad	63.20	143.75
251	24	Soltero	Gris	Ciudad	66.80	131.00
252	24	Soltero	Azul	Ciudad	71.60	151.50
253	24	Soltero		Ciudad	68.20	130.50
254	24	Soltero	Marrón	Campo	68.80	145.75
255	24	Soltero	Negro	Ciudad	68.40	147.00
256	24	Soltero	Marrón	Campo	69.30	167.00
257	24	Soltero	Marrón	Campo	63.50	140.00
258	24	Soltero	Verde	Ciudad	69.70	148.00
259	24	Soltero	Marrón	Ciudad	67.90	142.00
260	24	Soltero	Marrón	Suburbio	66.60	134.50
261	24	Soltero	Negro	Campo	65.80	128.00
262	24	Soltero	Marrón	Suburbio	63.30	120.00
263	24	Casado	Marrón	Suburbio	68.00	142.75
264	24	Casado	Marrón	Campo	68.90	142.50
265	24	Casado	Negro	Campo	68.30	137.25
266	24	Casado	Gris	Campo	68.10	142.00
267	24	Casado	Azul	Ciudad	63.90	122.25
268	24	Casado	Azul	Suburbio	71.80	155.50
269	24	Casado	Avellana	Ciudad	69.10	154.75
270	24	Casado	Gris	Ciudad	65.50	137.50
271	24	Casado	Avellana		68.20	161.50
272	24	Casado	Gris	Ciudad	64.60	155.75
273	24	Casado	Avellana	Suburbio	68.60	166.00
274	24	Casado	Azul	Ciudad	65.75	141.00
275	24	Casado	Avellana	Ciudad	68.00	142.50
276	24	Casado	Azul	Ciudad	73.20	147.25
277	24	Casado	Azul	Ciudad	66.60	146.50
278	24	Casado	Azul	Suburbio	69.20	144.50
279	24	Casado	Azul	Ciudad	73.00	147.75
280	24	Casado		Ciudad	69.60	146.00
281	24	Casado	Negro	Suburbio	63.20	132.50
282	24	Casado	Azul	Ciudad	72.20	161.00
283	24	Casado	Marrón	Ciudad	67.60	139.00
284	24	Casado	Marrón	Ciudad	67.10	144.75
285	25	Soltero	Marrón	Ciudad	73.50	177.50
286	25	Soltero	Avellana		74.20	169.25
287	25	Soltero	Marrón	Ciudad	68.70	158.00
288	25	Soltero	Azul	Ciudad	71.50	203.50
289	25	Soltero	Gris	Suburbio	69.10	157.00
290	25	Soltero	Gris	Ciudad	73.10	196.50
291	25	Soltero	Marrón	Suburbio	66.30	117.75
292	25	Soltero	Avellana	Suburbio	69.60	141.00
293	25	Soltero	Marrón	Campo	75.80	186.75
294	25	Soltero	Marrón	Ciudad	65.80	127.50
295	25	Soltero	Avellana	Ciudad	64.70	135.50
296	25	Soltero	Avellana	Suburbio	68.10	141.75
297	25	Soltero	Gris	Ciudad	69.30	153.75
298	25	Soltero	Marrón	Ciudad	63.70	136.50
299	25	Soltero	Gris	Campo	68.10	151.00
300	25	Soltero	Azul	Ciudad	65.50	141.75

SUJETO	EDAD	ESTADO	COLOR OJOS	RESIDENCIA	ESTATURA	PESO
301	25	Soltero	Azul	Ciudad	72.00	167.00
302	25	Soltero	Azul	Ciudad	63.80	131.00
303	25	Soltero	Avellana	Ciudad	65.50	134.00
304	25	Soltero	Azul	Campo	66.40	129.00
305	25	Soltero	Marrón	Ciudad	66.50	155.00
306	25	Soltero	Avellana	Ciudad	69.40	160.25
307	25	Soltero	Gris	Campo	65.60	142.50
308	25	Soltero	Avellana	Suburbio	66.80	123.50
309	25	Soltero	Azul	Campo	67.50	170.00
310	25	Soltero	Marrón	Suburbio	63.30	131.75
311	25	Soltero	Marrón	Ciudad	65.80	126.00
312	25	Soltero	Azul	Suburbio	66.40	128.50
313	25	Soltero	Gris	Ciudad	67.60	140.25
314	25	Soltero	Negro	Campo	69.60	158.00
315	25	Soltero	Azul	Suburbio	66.00	130.00
316	25	Soltero	Azul	Campo	71.30	171.25
317	25	Soltero	Avellana	Suburbio	71.00	164.25
318	25	Soltero	Gris	Suburbio	66.80	139.00
319	25	Soltero	Gris	Ciudad	67.80	143.00
320	25	Soltero	Azul	Suburbio	67.90	141.75
321	25	Soltero	Gris	Ciudad	70.20	147.25
322	25	Soltero	Gris	Ciudad	68.00	170.00
323	25	Soltero	Marrón		66.30	159.50
324	25	Soltero	Avellana	Ciudad	69.30	199.00
325	25	Soltero	Negro	Ciudad	64.90	149.00
326	25	Soltero	Azul	Campo	65.20	138.00
327	25	Soltero	Gris	Ciudad	64.50	115.00
328	25	Soltero	Avellana	Suburbio	71.20	150.25
329	25	Soltero	Marrón	Ciudad	69.70	157.75
330	25	Soltero	Gris	Ciudad	65.80	129.50
331	25	Soltero	Azul	Campo	68.90	138.50
332	25	Soltero	Gris	Ciudad	65.80	129.25
333	25	Soltero	Marrón	Campo	66.70	136.75
334	25	Soltero	Gris	Ciudad	69.10	138.00
335	25	Soltero	Marrón	Ciudad	69.50	160.00
336	25	Soltero	Marrón	Ciudad	70.70	166.25
337	25	Soltero	Marrón	Suburbio	66.70	130.00
338	25	Soltero	Azul	Ciudad	64.20	119.75
339	25	Soltero	Gris	Ciudad	65.20	126.00
340	25	Soltero	Azul	Ciudad	66.30	120.75
341	25	Soltero	Gris	Suburbio	66.70	137.25
342	25	Soltero	Azul	Ciudad	69.40	166.00
343	25	Soltero	Azul	Suburbio	64.50	107.25
344	25	Soltero	Marrón	Campo	68.70	160.75
345	25	Soltero	Gris	Ciudad	71.20	168.50
346	25	Soltero	Avellana	Ciudad	68.30	137.50
347	25	Soltero	Marrón	Ciudad	62.20	133.75
348	25	Soltero	Marrón	Suburbio	67.00	130.00
349	25	Soltero	Gris	Campo	65.80	141.00
350	25	Soltero	Gris	Ciudad	68.00	166.00
351	25	Soltero	Azul	Ciudad	68.00	147.50
352	25	Soltero	Marrón	Suburbio	71.50	152.00
353	25	Soltero	Azul	Campo	69.00	140.00
354	25	Soltero	Gris	Ciudad	69.10	149.50
355	25	Soltero	Marrón	Suburbio	68.00	132.25
356	25	Soltero	Gris	Suburbio	67.10	149.00
357	25	Soltero	Gris	Ciudad	66.10	141.50
358	25	Soltero	Avellana	Campo	69.20	162.00
359	25	Soltero	Marrón	Suburbio	71.40	151.00
360	25	Soltero	Gris	Ciudad	66.70	123.50
361	25	Soltero		Ciudad	64.10	123.50
362	25	Soltero	Gris	Ciudad	68.70	141.50
363	25	Soltero	Azul	Campo	75.60	186.25
364	25	Soltero	Azul	Ciudad	68.80	129.00
365	25	Soltero	Azul	Ciudad	63.60	140.00
366	25	Soltero	Azul	Ciudad	72.90	168.50
367	25	Soltero	Marrón	Ciudad	73.00	162.50
368	25	Soltero	Gris	Ciudad	69.80	143.50
369	25	Soltero	Gris	Campo	66.30	137.00
370	25	Soltero	Marrón	Suburbio	68.80	167.00
371	25	Soltero	Gris	Ciudad	67.90	134.00
372	25	Soltero	Azul	Ciudad	66.80	140.75
373	25	Soltero	Azul	Ciudad	69.60	149.00
374	25	Soltero	Marrón	Suburbio	66.50	148.50
375	25	Soltero	Gris	Suburbio	70.00	153.75
376	25	Soltero	Marrón	Suburbio	65.30	123.00
377	25	Soltero	Gris	Suburbio	66.50	138.00
378	25	Soltero	Azul	Ciudad	70.90	177.00
379	25	Soltero	Azul	Ciudad	72.10	149.25
380	25	Soltero	Marrón	Campo	70.30	141.00
381	25	Casado	Azul	Suburbio	71.00	138.50
382	25	Casado	Marrón	Suburbio	68.50	145.50
383	25	Casado	Gris	Suburbio	65.70	138.00
384	25	Casado	Marrón	Suburbio	68.10	140.25
385	25	Casado	Gris	Ciudad	71.50	135.25
386	25	Casado	Marrón	Ciudad	67.80	127.50
387	25	Casado	Gris	Campo	62.20	118.25
388	25	Casado	Azul	Ciudad	69.50	155.25
389	25	Casado	Azul	Ciudad	72.90	158.00
390	25	Casado	Azul	Suburbio	71.20	188.50
391	25	Casado	Marrón	Ciudad	68.40	135.50
392	25	Casado	Gris	Ciudad	66.80	134.25
393	25	Casado	Azul	Ciudad	69.20	133.00
394	25	Casado	Marrón	Ciudad	68.10	145.50
395	25	Casado	Negro	Ciudad	69.60	164.00
396	25	Casado	Gris	Suburbio	72.30	166.50
397	25	Casado	Marrón	Ciudad	66.70	135.75
398	25	Casado	Azul	Ciudad	67.10	124.25
399	25	Casado	Negro	Ciudad	71.30	152.75
400	25	Casado	Gris	Ciudad	69.60	136.00

5.36 *Una variable se denomina* **cuantitativa** *cuando los valores que toma son numéricos.*
Según las propiedades del conjunto de valores que toma pueden ser:

- **Discretas**, *si toman valores discretos como* 0, 1, 2, . . . , *etc.*
- **Continuas** *si es razonable suponer que puede tomar cualquier valor intermedio.*

EJEMPLO 5.26 La variable *número de hijos de una pareja* es una variable cuantitativa discreta. Las variables *estatura* y *peso* se consideran variables continuas.

Hay que observar, sin embargo, que la distinción entre variable discreta y continua es, a veces, un tanto arbitraria. En la práctica, debido a las limitaciones de los aparatos de medida, todos los valores observados son números enteros, sin más que considerar la medida expresada en las unidades apropiadas. Por ejemplo, si medimos la estatura en décimas de pulgada, los valores de la variable *estatura* en la tabla de Galton serían 640, 722, 661, . . . , y cabría la posibilidad de considerar que la variable *estatura* es discreta. Cuando se afirma que la variable *estatura* es continua se hace referencia a la naturaleza intrínseca de la variable, ya que puede, idealmente, tomar cualquier valor positivo. Se puede llegar entonces al convenio de que, para variables continuas, una medida concreta representa un intervalo de valores; por ejemplo, si la precisión utilizada es de décimas de pulgada y se dice que una persona tiene una estatura de 640, se quiere significar que su verdadera estatura está comprendida entre 639.5 y 640.5 décimas de pulgada.

EJEMPLO 5.27 Las variables que hacen referencia a magnitudes relacionadas con el espacio, tiempo, masa y sus posibles combinaciones, velocidad, densidad, etc. se consideran variables continuas. Por extensión, se suelen considerar variables continuas aquellas que pueden tomar un gran número de valores, aun cuando sean valores aislados. Un ejemplo es la variable *salario*; los valores que puede tomar son, evidentemente, discretos pues basta expresarlo en la menor unidad monetaria disponible, digamos, céntimos de euro; sin embargo si identificamos dicha unidad monetaria con la precisión de la medida, podemos considerarla continua.

Otra clasificación de las variables, que coincide en parte con la anterior, se basa en la estructura aritmética del conjunto de los valores que toma.

VARIABLES NOMINALES

*Variables **nominales** son las que representan atributos cuyas modalidades no pueden ser ordenadas ni operadas conforme a las reglas aritméticas.* 5.37

EJEMPLO 5.28

- El sexo es una variable nominal. No tiene sentido ordenar ni sumar sus modalidades.
- También son nominales variables como *color de ojos, lugar de residencia,* etc.

VARIABLES ORDINALES

*Variables **ordinales** son las que tienen modalidades que pueden ser ordenadas de mayor a menor.* 5.38

EJEMPLO 5.29

- Las variables ordinales aparecen con frecuencia en las Ciencias sociales. Por ejemplo, si en una encuesta se pregunta: *"¿Está usted satisfecho con la decisión del gobierno respecto de los impuestos?"*, las modalidades que puede tener la respuesta pueden ser: *muy, bastante, poco* o *nada* satisfecho. Estas modalidades, aunque cualitativas, pueden ordenarse de acuerdo al *"grado de satisfacción"*, aunque no podemos juzgar sobre la diferencia entre las clases. No tiene sentido decir que los ciudadanos "poco satisfechos" se diferencian de los "nada satisfechos" en la misma medida en que los "satisfechos" se diferencian de los "poco satisfechos".
- También son variables de este tipo la *calificación* en 'estrellas' de los hoteles o en 'tenedores' de los restaurantes; la *ubicación* de un partido político en el arco parlamentario, según la distinción 'extrema izquierda', 'izquierda', 'centro', 'derecha' o 'extrema derecha', etc.

VARIABLES DE INTERVALO

*Variables medidas **en escala de intervalos** son las que valoran alguna cualidad "cuantificable" de los individuos en la que el 0 de la escala de medida tiene un carácter relativo.* 5.39

EJEMPLO 5.30

- Una variable que se emplea con frecuencia en las Ciencias sociales es el *coeficiente de inteligencia (CI)* de un individuo. Su valor numérico se calcula en función de las respuestas que dan los sujetos a un cierto test. Un coeficiente de inteligencia 'normal' ronda el valor 100. En esta escala, tanto el valor 0 como el 100 tienen carácter relativo. No puede afirmarse que un

individuo que obtiene un 0 carece absolutamente de inteligencia. En cambio, sí puede decirse que la diferencia que existe entre las puntuaciones 90 y 100 es la misma que entre 100 y 110: en ambos casos la segunda puntuación supone 10 puntos más que la primera. Sin embargo, en esta escala no tiene sentido la comparación de proporciones: si un individuo alcanza una puntuación de 100 no puede decirse que sea el 'doble' de inteligente que un sujeto que obtiene una calificación de 50.

- La *temperatura*, medida en la escala Celsius, es una variable de intervalo. El 0 y el 100 de la escala así como la unidad de medida, el grado centígrado, son valores definidos por convenio. En esta escala tienen sentido las operaciones suma y resta; la diferencia de temperatura existente entre -40° y -30° es la misma que la que se observa entre 30° y 40°; sin embargo, carece de sentido comparar por cociente los valores -40° y 40°.

VARIABLES DE RAZÓN

5.40 *Variables medidas* ***en escala de razón*** *son las que valoran una cualidad de modo que el* 0 *tiene un sentido absoluto. Tomar el valor* 0 *significa ausencia absoluta de la cualidad.*

EJEMPLO 5.31

- La longitud o el peso son variables medidas en escala de razón. Un objeto de peso 0 carece de peso. Para estas variables sí tiene sentido la comparación de razón: si un objeto pesa dos veces más que otro, su peso es 'doble' que el del segundo.
- Otras variables de este tipo son la *edad* en años, el *salario* en euros, etc.

5.4.4 DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS DE UNA VARIABLE

FRECUENCIAS

Los datos de un problema estadístico, tal como se presentan tras realizar un censo o una muestra, tienen una apariencia desordenada, difícil de interpretar, como se aprecia en la tabla de Galton. Uno de los fines de la Estadística descriptiva es proporcionar métodos que sirvan para resumir los datos, de manera que su interpretación sea más fácil.

Frecuencias absolutas

La primera transformación de los datos suele ser el cálculo de las **frecuencias absolutas** de las distintas modalidades o valores.

*La **frecuencia absoluta** de una modalidad o valor de la variable es el número de observaciones que presentan esa modalidad o valor.* 5.41

Para calcular las frecuencias absolutas, identificamos, en primer lugar, las diferentes modalidades o valores que puede tomar la variable y las representamos por

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

siendo k el número de modalidades o valores distintos. La notación anterior, con los puntos suspensivos en medio de una lista de valores, se emplea con frecuencia en Estadística: es una forma general de escribir que la lista puede tener hasta k valores distintos. A continuación, mediante recuento, encontramos el número de observaciones con modalidad o valor x_i, para cada $i = 1, \ldots, k$. Dicho número, que denotamos con F_i, es la frecuencia absoluta de la modalidad o valor.

Puesto que las modalidades o valores son incompatibles y exhaustivos, si denotamos N al número total de observaciones tendremos el siguiente resultado.

La suma de las frecuencias absolutas es igual al número de observaciones N: 5.42

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k = N$$

El "sumatorio"

En Estadística se suele utilizar el símbolo $\sum$, que se lee *suma* o *sumatorio*, para denotar, en forma abreviada, una suma de varios términos. Por ejemplo, la expresión $F_1 + F_2 + \cdots + F_k$ puede escribirse como

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k = \sum_{i=1}^{k} F_i.$$

Obsérvese que el símbolo incluye un índice, en este caso la letra i, que sirve para "llevar la cuenta" de los términos que se están sumando; también se incluyen los extremos, inferior y superior, de dicho índice, entre los que se extiende la suma; en el caso anterior son, respectivamente, 1 y k. Hay que hacer notar que la letra que denota el índice actúa a modo de "contador interno" de la suma, por lo que puede intercambiarse libremente por otra; es decir, las notaciones $\sum_{i=1}^{k} F_i$ y $\sum_{j=1}^{k} F_j$ significan exactamente lo mismo: $F_1 + F_2 + \cdots + F_k$. Cuando no hay peligro de confusión por deducirse claramente del contexto, pueden suprimirse en el sumatorio bien sea el índice, bien sean los extremos de la suma, e incluso ambos; en concreto, podemos encontrarnos con las siguientes notaciones equivalentes:

$$\sum_{i=1}^{k} F_i = \sum_{1}^{k} F_i = \sum_i F_i = \sum F_i$$

EJEMPLO 5.32 Consideremos la tabla de Galton. Vamos a calcular las frecuencias absolutas de las modalidades de la variable *color de ojos*. La variable presenta seis modalidades: $x_1 =$ 'azul', $x_2 =$ 'avellana', $x_3 =$ 'gris', $x_4 =$ 'marrón', $x_5 =$ 'negro' y $x_6 =$ 'verde'. Si efectuamos el recuento encontramos las frecuencias absolutas siguientes: $F_1 = 127$, $F_2 = 27$, $F_3 = 111$, $F_4 = 110$, $F_5 = 15$ y $F_6 = 3$. Podemos también observar que algunos sujetos adolecen del correspondiente dato. Para recoger estos casos es usual añadir una modalidad adicional, que puede denominarse $x_7 =$ 'no consta'. Se tiene entonces $F_7 = 7$.

$$\sum_{i=1}^{7} F_i = 127 + 27 + 111 + 110 + 15 + 3 + 7 = 400$$

que es el total de observaciones N.

Frecuencias relativas

Las frecuencias absolutas no permiten comparar fácilmente la distribución de dos poblaciones distintas que tengan distinto número de observa-

ciones. Para hacer esa comparación es preferible emplear las frecuencias *relativas*, que son la proporción de las frecuencias absolutas al total de observaciones.

FRECUENCIA RELATIVA

5.43 *La **frecuencia relativa** de la modalidad o valor x_i es la proporción de observaciones que presentan el valor x_i. Se representa por f_i y, con fórmulas, se expresa:*

$$f_i = \frac{F_i}{N}$$

Puesto que la suma de las frecuencias absolutas es igual al número de observaciones, la suma de todas las frecuencias relativas debe ser igual a 1.

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_k = \frac{F_1 + F_2 + \cdots + F_k}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

5.44 *La suma de las frecuencias relativas de todas las modalidades o valores es igual a 1.*

Las frecuencias relativas expresan el *tanto por uno* de una modalidad o valor en el conjunto de datos. Si se multiplican por 100 se obtiene el *porcentaje* de la modalidad o valor.

PORCENTAJE

5.45 *El **porcentaje** de una modalidad o valor x_i es igual a multiplicar por 100 su frecuencia relativa. Si se representa por p_i se tiene:*

$$p_i = 100 \cdot f_i$$

EJEMPLO 5.33 Dado que el total de observaciones es $N = 400$, las frecuencias relativas del ejemplo anterior son:

$$f_1 = \frac{F_1}{N} = \frac{127}{400} = 0.3175 \quad f_2 = \frac{F_2}{N} = \frac{27}{400} = 0.0675 \quad f_3 = \frac{F_3}{N} = \frac{111}{400} = 0.2775$$
$$f_4 = \frac{F_4}{N} = \frac{110}{400} = 0.2750 \quad f_5 = \frac{F_5}{N} = \frac{15}{400} = 0.0375 \quad f_6 = \frac{F_6}{N} = \frac{3}{400} = 0.0075$$
$$f_7 = \frac{F_7}{N} = \frac{7}{400} = 0.0175$$

Los porcentajes son los números anteriores multiplicados por 100: $p_1 = 31.75\,\%$, $p_2 = 6.75\,\%$, $p_3 = 27.75\,\%$, $p_4 = 27.50\,\%$, $p_5 = 3.75\,\%$, $p_6 = 0.75\,\%$, $p_7 = 1.75\,\%$

Frecuencias acumuladas

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ los valores que toma una variable y supongamos que están ordenados, como es el caso de variables medidas en una escala nominal, de intervalo o razón. Entonces podemos considerar las **frecuencias acumuladas**.

FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA

*La **frecuencia absoluta acumulada** del valor x_j es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores menores o igual que x_j. Si se representa por N_j se tiene:* 5.46

$$N_j = F_1 + F_2 + \cdots + F_j.$$

FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA

*La **frecuencia relativa acumulada** del valor x_j es la suma de las frecuencias relativas de todos los valores menores o igual que x_j. Si se representa por n_j se tiene:* 5.47

$$n_j = f_1 + f_2 + \cdots + f_j.$$

EJEMPLO 5.34 Consideremos la variable *edad* de la tabla de Galton. Los valores que toma son $x_1 = 23$, $x_2 = 24$ y $x_3 = 25$ con frecuencias absolutas $F_1 = 144$, $F_2 = 140$ y $F_3 = 116$. Las frecuencias relativas son: $f_1 = \frac{144}{400} = 0.36$, $f_2 = \frac{140}{400} = 0.35$ y $f_3 = \frac{116}{400} = 0.29$.

Las frecuencias absolutas acumuladas son:

$$\begin{aligned} N_1 &= F_1 &&= &&= 144 \\ N_2 &= F_1 + F_2 &&= 144 + 140 &&= 284 \\ N_3 &= F_1 + F_2 + F_3 &&= 144 + 140 + 116 &&= 400 \end{aligned}$$

Las frecuencias relativas acumuladas son:

$$\begin{aligned} n_1 &= f_1 &&= &&= 0.36 \\ n_2 &= f_1 + f_2 &&= 0.36 + 0.35 &&= 0.71 \\ n_3 &= f_1 + f_2 + f_3 &&= 0.36 + 0.35 + 0.29 &&= 1.00 \end{aligned}$$

Tabla de frecuencias absolutas	
Modalidades o valores	*Frecuencias absolutas*
x_1	F_1
x_2	F_2
$\vdots$	$\vdots$
x_k	F_k
	N

Tabla 5.4: Tabla de frecuencias absolutas.

TABLAS DE FRECUENCIAS

Las modalidades o valores de una variable junto con sus frecuencias, absolutas o relativas, se presentan usualmente en forma de tabla. La estructura general de una **tabla de frecuencias**, absolutas o relativas, se puede

Tabla de frecuencias relativas	
Modalidades o valores	*Frecuencias relativas*
x_1	f_1
x_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$
x_k	f_k
	1

Tabla 5.5: Tabla de frecuencias relativas.

ver en las tablas 5.4 y 5.5. En general, cualquier tabla de frecuencias, absolutas o relativas, de una variable estadística tiene dos columnas. En la primera se señalan las modalidades o valores distintos que toma la variable. En la segunda aparecen las frecuencias absolutas o relativas de cada valor modalidad o valor. Esta disposición recibe el nombre de **distribución de frecuencias**.

Una ***distribución de frecuencias****, absolutas o relativas, de una variable estadística consiste en una presentación en forma de tabla de los distintos valores o modalidades, x_i, que toma la variable junto con sus respectivas frecuencias absolutas F_i, o relativas f_i.*

EJEMPLO 5.35 En la tabla 5.6 se incluyen la distribución de frecuencias absolutas y relativas de la variable estadística *color de ojos* de la tabla de Galton.

Tabla de frecuencias absolutas	
COLOR DE OJOS	
Modalidad	*Frecuencia*
Azul	127
Avellana	27
Gris	111
Marrón	110
Negro	15
Verde	3
No consta	7
Total	400

Tabla de frecuencias relativas	
COLOR DE OJOS	
Modalidad	*Frecuencia*
Azul	0.3175
Avellana	0.0675
Gris	0.2775
Marrón	0.2750
Negro	0.0375
Verde	0.0075
No consta	0.0175
Total	1.0000

Tabla 5.6: Distribución de frecuencias absolutas y relativas de la variable estadística *color de ojos* de la tabla de Galton.

EJEMPLO 5.36 Consideremos la variable estadística *lugar de residencia* de la tabla de Galton. Para simplificar, agrupamos las modalidades 'mar', 'varias' y 'no consta' en una misma modalidad que llamamos 'otros o NC'. En la tabla 5.7 se incluyen las tablas de frecuencias de dicha variable en tres casos: para todas observaciones, para los sujetos que presentan la modalidad 'soltero' en la variable *estado* y para

Todos			Solteros			Casados		
Modalidad	*Frec. absoluta*	*Frec. relativa*	*Modalidad*	*Frec. absoluta*	*Frec. relativa*	*Modalidad*	*Frec. absoluta*	*Frec. relativa*
Campo	63	0.1575	Campo	58	0.1657	Campo	5	0.1000
Ciudad	212	0.5300	Ciudad	185	0.5286	Ciudad	27	0.5400
Suburbio	117	0.2925	Suburbio	101	0.2886	Suburbio	16	0.3200
Otros o NC	8	0.0200	Otros o NC	6	0.0171	Otros o NC	2	0.0400
Total	400	1.0000	Total	350	1.0000	Total	50	1.0000

Tabla 5.7: Distribución de frecuencias de la variable *lugar de residencia* de la tabla de Galton según la variable *estado*.

los sujetos cuyo *estado* es 'casado'. Gracias a las frecuencias relativas, lo valores de las tres tablas están expresados de manera homogénea, tantos por uno, y podemos comparar los datos del *lugar de residencia* para solteros, casados y el conjunto de los datos. Las tablas sugieren que los casados tienen menos tendencia que los solteros a residir en el campo.

Tabla de frecuencias				
Modalidades o valores	*Frecuencias absolutas*	*Frecuencias relativas*	*Frecuencias absolutas acumuladas*	*Frecuencias relativas acumuladas*
x_1	F_1	$f_1 = \frac{F_1}{N}$	F_1	f_1
x_2	F_2	$f_2 = \frac{F_2}{N}$	$F_1 + F_2$	$f_1 + f_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	F_k	$f_k = \frac{F_k}{N}$	$F_1 + F_2 + \cdots + F_k$	$f_1 + f_2 + \cdots + f_k$
	N	1		

Tabla 5.8: Tabla de frecuencias de una variable estadística

En la misma tabla se puede incluir las frecuencias absolutas, la frecuencias relativas, las frecuencias absolutas acumuladas y las frecuencias relativas acumuladas. Se obtiene una **tabla general de frecuencias**. En la ta-

bla 5.8 se puede ver este tipo de tabla. Su estructura tiene cinco columnas: la primera muestra los valores distintos que toma la variable; la segunda, las frecuencias absolutas de cada uno de los valores; la tercera, las frecuencias relativas de cada valor, calculadas como cociente entre la frecuencia absoluta y el número de observaciones; la cuarta, las frecuencias absolutas acumuladas y la quinta, las frecuencias relativas acumuladas

EJEMPLO 5.37 La tabla 5.9 muestra la tabla general de frecuencias de la variable *edad* de la tabla de Galton.

Tabla de frecuencias
EDAD

Edad	Frec. abs.	Frec. rel.	Frec. acum. abs.	Frec. acum. rel.
23	144	0.36	144	0.36
24	140	0.35	284	0.71
25	116	0.29	400	1.00
Total	400	1.00		

Tabla 5.9: Tabla de frecuencias de la variable *edad* de la tabla de Galton.

5.5 DESCRIPCIÓN GRÁFICA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

En muchas ocasiones es preferible dar una representación gráfica de la tabla de frecuencias. Las gráficos expresan con sencillez relaciones y propiedades que, a partir de los valores de la tabla, sólo las personas acostumbradas a manejar números son capaces de apreciar. La utilización de gráficos tiene varias ventajas. En particular, permiten descubrir fácilmente las observaciones anormales y detectar errores de codificación, identificar rápidamente algunos valores característicos, como el máximo y mínimo, y comparar de manera sencilla varias variables estadísticas representándolas en el mismo gráfico. Sin embargo no están exentos de inconvenientes. Los gráficos no pueden considerarse un sustituto de las tablas de frecuencias sino que únicamente las complementan, ya que su lectura no tiene la precisión de las tablas; además, hay que tener presente que las unidades de escala influyen en la percepción que se tiene del gráfico y pueden conducir a exagerar hechos insignificantes o disminuir otros importantes. En Estadística descriptiva se emplea una variedad enorme de representaciones gráficas y dibujos.

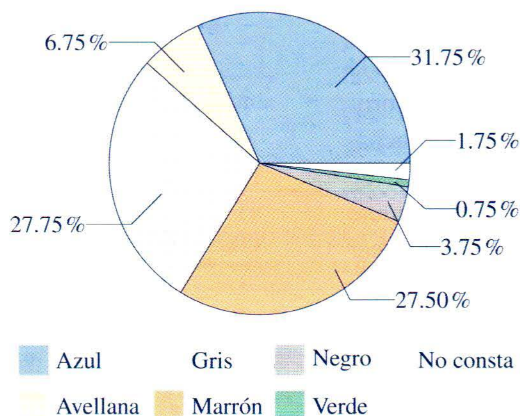
5.5.1 VARIABLES CUALITATIVAS

El principio básico para la representación de variables cualitativas es la proporcionalidad entre áreas y frecuencias. Las representaciones más importantes son los *diagramas de sectores*, los *diagramas de barras* y los *pictogramas.*

DIAGRAMAS DE SECTORES

Los **diagramas de sectores** consisten en un círculo de radio dado que representa el total de observaciones. El círculo se divide en sectores, uno por cada modalidad de la variable observada. El tamaño de cada sector se rige por el convenio siguiente: el área de cada sector es proporcional a la frecuencia de la modalidad. Como el área de un sector es proporcional al ángulo, los sectores se escogen de modo que sus ángulos son proporcionales a la frecuencia de modalidad. Puesto que el círculo completo tiene 360°, a una modalidad que tenga frecuencia relativa f le corresponderá un sector con ángulo igual a $f \cdot 360^{o}$. Los diagramas de sectores muestran con claridad la estructura porcentual de una población clasificada en varias modalidades.

EJEMPLO 5.38 Vamos a construir un diagrama de sectores que represente la variable *color de ojos* de la tabla de Galton. Se parte de la tabla de frecuencias y se completa



Color de ojos				
Modalidad	*Frec. absoluta*	*Frec. relativa*	*Porcentaje %*	*Ángulo*
Azul	127	0.3175	31.75	$114^{\text{o}}\ 18'$
Avellana	27	0.0675	6.75	$24^{\text{o}}\ 18'$
Gris	111	0.2775	27.75	$99^{\text{o}}\ 54'$
Marrón	110	0.2750	27.50	$99^{\text{o}}\ 00'$
Negro	15	0.0375	3.75	$13^{\text{o}}\ 30'$
Verde	3	0.0075	0.75	$2^{\text{o}}\ 42'$
No consta	7	0.0175	1.75	$6^{\text{o}}\ 18'$
Total	400	1.0000	100.00	360°

Figura 5.3: Diagrama de sectores de la variable *color de ojos* de la tabla de Galton.

con una columna con el número de grados de cada sector. Consideremos la primera modalidad x_1 = 'azul' cuya frecuencia es $f_1 = 0.3175$. Para calcular el ángulo del sector correspondiente razonamos así: el círculo completo tiene 360° y el color 'azul' supone el 31.75 % del total; luego le corresponde un sector con un ángulo igual al 31.75 % de 360°, es decir,

$$0.3175 \cdot 360^{\text{o}} = 114{,}30^{\text{o}} = 114^{\text{o}}\ 18'$$

De modo similar se calculan los ángulos correspondientes al resto de las variables. La figura 5.3 muestra la tabla de ángulos y el diagrama de sectores correspondiente.

Los diagramas de sectores también son útiles cuando se quiere comparar la importancia relativa de las modalidades de una variable en diferentes segmentos de la población, en particular, con respecto a otras variables. Para hacer esa comparación se utilizan varios diagramas de sectores.

EJEMPLO 5.39 En la tabla 5.7 se mostró la distribución de frecuencias de la variable *lugar de residencia* de la tabla de Galton según las distintas modalidades de la variable *estado*. La figura 5.4 representa los diagramas de sectores para dicha variable *lugar de residencia* en los dos casos posibles de la variable *estado*, 'soltero' y 'casado'. Basta un rápido vistazo a los diagramas de sectores de la figura 5.4 para tener una primera impresión de como está repartida la población. Más de la mitad vive en la ciudad, tanto solteros como casados. La proporción de casados que vive en el campo es ligeramente menor que la de solteros. El aspecto de las dos distribuciones es muy similar por lo que no parece que la variable *estado* tenga mucha influencia en la variable *lugar de residencia*.

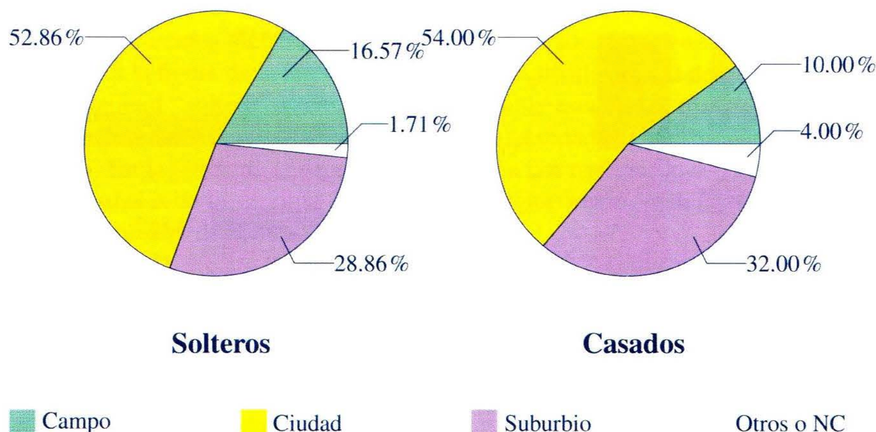


Figura 5.4: Diagrama de sectores de la variable *lugar de residencia* de la tabla de Galton, según las modalidades de la variable *estado*.

DIAGRAMAS DE BARRAS

Si hay que representar un gran número de modalidades, o hay algunas que tienen una frecuencia relativa muy pequeña, los diagramas de sectores no son muy ilustrativos, ya que, para la vista, es difícil apreciar la importancia de sectores que tienen ángulos pequeños. Entonces, es preferible emplear los **diagramas de barras**, incluso para representar frecuencias relativas. También, si lo que se quiere es destacar las frecuencias absolutas de cada modalidad, es necesario recurrir a los diagramas de barras. En este tipo de gráficos la frecuencia de cada modalidad o valor se representa mediante un *rectángulo* o *barra*. El tamaño de cada barra se calcula de acuerdo con el convenio siguiente: el área del rectángulo es proporcional a la frecuencia. En particular, si todos los rectángulos tienen la misma base, su altura es proporcional a la frecuencia que se quiere representar. Los diagramas de barras se pueden emplear para representar tanto frecuencias absolutas como relativas. También es frecuente incluir en cada barra un número con la frecuencia correspondiente.

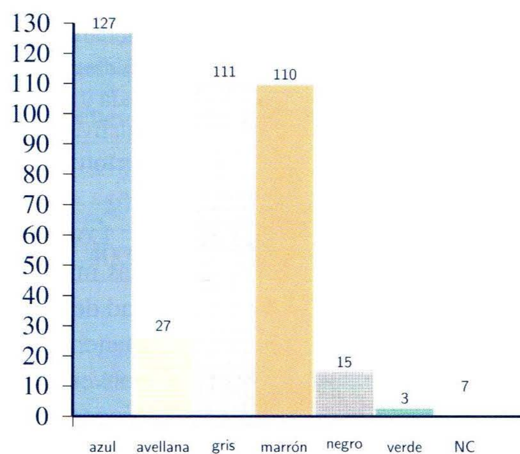


Figura 5.5: Diagrama de barras que representa la variable *color de ojos* de la tabla de Galton.

EJEMPLO 5.40 La figura 5.5 muestra el diagrama de barras correspondiente a la variable *color de ojos* de la tabla de Galton. Puesto que hemos escogido barras con

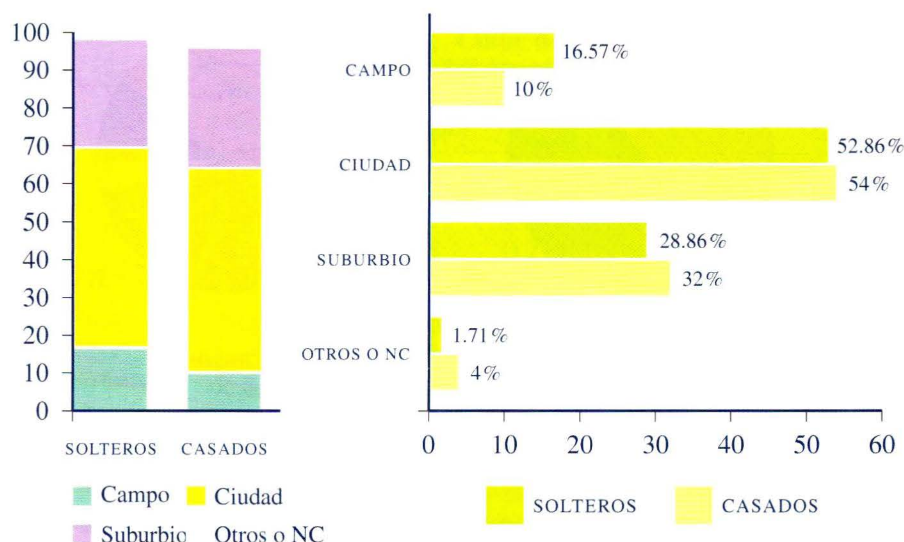


Figura 5.6: Representaciones mediante diagramas de barras de la variable *lugar de residencia* de la tabla de Galton en relación con la variable *estado*.

igual base, basta con elegir una escala conveniente en el eje de ordenadas. Sobre el eje de abscisas se levantan los rectángulos que describen la frecuencia de cada modalidad. La altura de cada rectángulo es proporcional a la frecuencia absoluta. El diagrama de barras informa con claridad del número de individuos que tienen cada uno de los colores de ojos posibles, pero hacen difícil percibir la importancia relativa de cada una. Para destacar este aspecto, son preferibles los diagramas de sectores, como hemos visto en el apartado anterior.

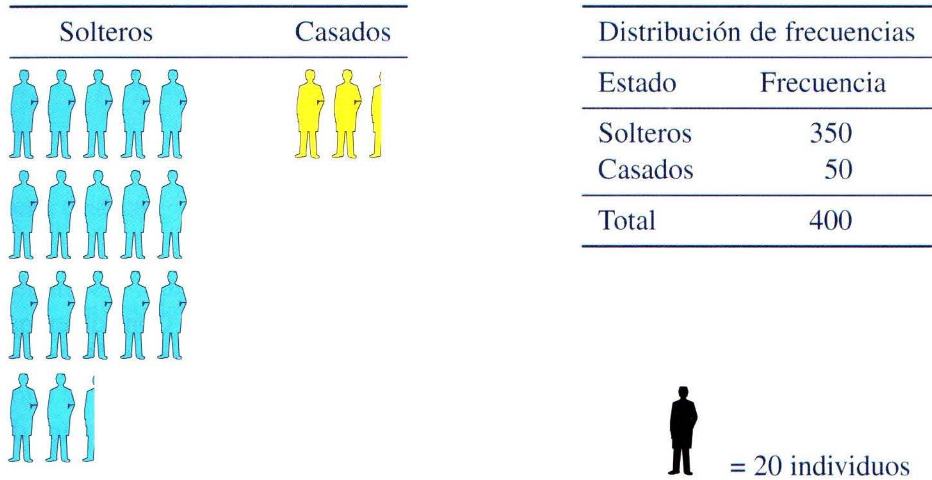
Los diagramas de barras también permiten comparar variables. Hay varias maneras de hacerlo. Una de ellas se basa en utilizar, para cada modalidad de una de las variables, un barra de área igual a la unidad y trocearla de manera proporcional a la frecuencia de la modalidad de la otra variable. Es conveniente emplear barras de igual base, de forma que la frecuencia sea proporcional a la altura. Otra alternativa consiste en presentar, para cada modalidad de una de las variables, una serie de barras, una por cada modalidad de la otra variable, con área proporcional a su frecuencia. También en este caso el gráfico se simplifica si se usan barras de igual base. Las barras pueden tener orientación horizontal o vertical. No hay ningún criterio para preferir una cosa a la otra, salvo el criterio estético que gobierne la composición del documento.

EJEMPLO 5.41 La figura 5.6 muestra dos maneras distintas de representar mediante

diagrama de barras la variable *lugar de residencia* de la tabla de Galton, con respecto a las diferentes modalidades de la variable *estado*. Los datos son los de la tabla 5.7. En la figura de la izquierda, cada barra equivale al total de la frecuencia de la modalidad, 'soltero' o 'casado', de la variable *estado*; los trozos de las barras se corresponden con las frecuencias de las modalidades de la variable *lugar de residencia*. En la figura de la derecha, se muestran por parejas, de acuerdo con las dos modalidades de la variable *estado*, las barras que representan las frecuencias de las modalidades de la otra variable.

PICTOGRAMAS

Las variables cualitativas admiten también una representación muy plástica mediante dibujos, iconos, símbolos, mapas, etc. Estos gráficos son de comprensión muy sencilla y se denominan, de una manera general, **pictogramas**. Para confeccionarlos hay que tener presente el principio de que el *tamaño* del símbolo que ilustra cada modalidad ha de ser proporcional a la frecuencia de la misma. Por ello, hay que tener precaución cuando se emplean gráficos de superficie o volumen, porque su tamaño se incrementa con el cuadrado o el cubo de la dimensión básica. Una solución práctica es incluir una referencia que dé una indicación de la frecuencia a la que equivale cada símbolo utilizado en el gráfico.



Distribución de frecuencias	
Estado	Frecuencia
Solteros	350
Casados	50
Total	400

Figura 5.7: Pictograma de la distribución de la variable *estado* de la tabla de Galton.

EJEMPLO 5.42 La figura 5.7 muestra un pictograma que representa la distribución de frecuencias de la variable *estado* de la tabla de Galton. Cada símbolo equivale

a 20 individuos, por lo que la mitad de un símbolo son 10 individuos. El dibujo correspondiente a cada modalidad, 'soltero' o 'casado', es proporcional a su frecuencia.

5.5.2 VARIABLES CUANTITATIVAS

La representación de las distribuciones de frecuencias de variables cuantitativas puede hacerse, de forma similar a las variables cualitativas, mediante diagramas de barras, que en este caso se suelen llamar *histogramas*.

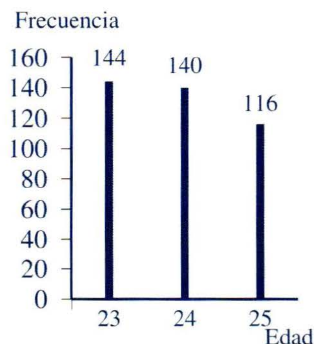
HISTOGRAMAS

El **histograma** es similar al diagrama de barras empleado para variables cualitativas. Se construye de forma análoga atendiendo al principio de proporcionalidad entre áreas y frecuencias.

Variables discretas

Puesto que los valores que toman las variables discretas son números enteros, es frecuente que en lugar de utilizar rectángulos se empleen simples líneas rectas levantadas sobre el lugar del eje en que se ubican los diferentes valores de la variable.

EJEMPLO 5.43 En la figura 5.8 se muestra la tabla de frecuencias de la variable *edad* de la tabla de Galton y el histograma correspondiente.



Edad	Frecuencia
23	144
24	140
25	116
Total	400

Figura 5.8: Histograma de la variable *edad* de la tabla de Galton.

Variables continuas

Los datos que proceden de variables cuantitativas continuas, si se miden con cierta precisión, suelen aparecer repetidos pocas veces. Consideremos, por ejemplo, la tabla de Galton. Una simple ojeada a los valores de la variable *peso* produce la impresión de que la frecuencia de cada uno de ellos es baja: la mayor parte sólo aparece una o dos veces, mientras que los de mayor frecuencia se repiten, como mucho, ocho veces. Si los representamos directamente, obtendremos un diagrama con muchas barras de alturas muy semejantes. En estas condiciones, el histograma no tiene mucho sentido, pues difícilmente cumple su objetivo de dar una impresión gráfica de la distribución de frecuencias. Para lograr una representación más significativa se recurre al **histograma con valores agrupados**.

*Un **histograma** con valores agrupados se construye de la manera siguiente:* 5.49

1. *Se determina el **rango** de posibles valores de la variable, a partir de los valores mínimo y máximo que se observan en los datos.*

2. *Se divide el rango en k **intervalos de clase**,*

$$[e_{i-1}, e_i) \quad i = 1, \ldots, k$$

formados por los valores x tales que

$$e_{i-1} \leq x < e_i, \quad i = 1, \ldots, k$$

*La **amplitud** de la clase es el número $a_i = e_i - e_{i-1}$.*

3. *Se calcula la **marca de clase** x_i, que es el punto medio de cada intervalo de clase,*

$$x_i = \frac{e_{i-1} + e_i}{2}$$

4. *Se calcula la frecuencia absoluta de cada intervalo de clase contando el número de observaciones que caen dentro del mismo.*

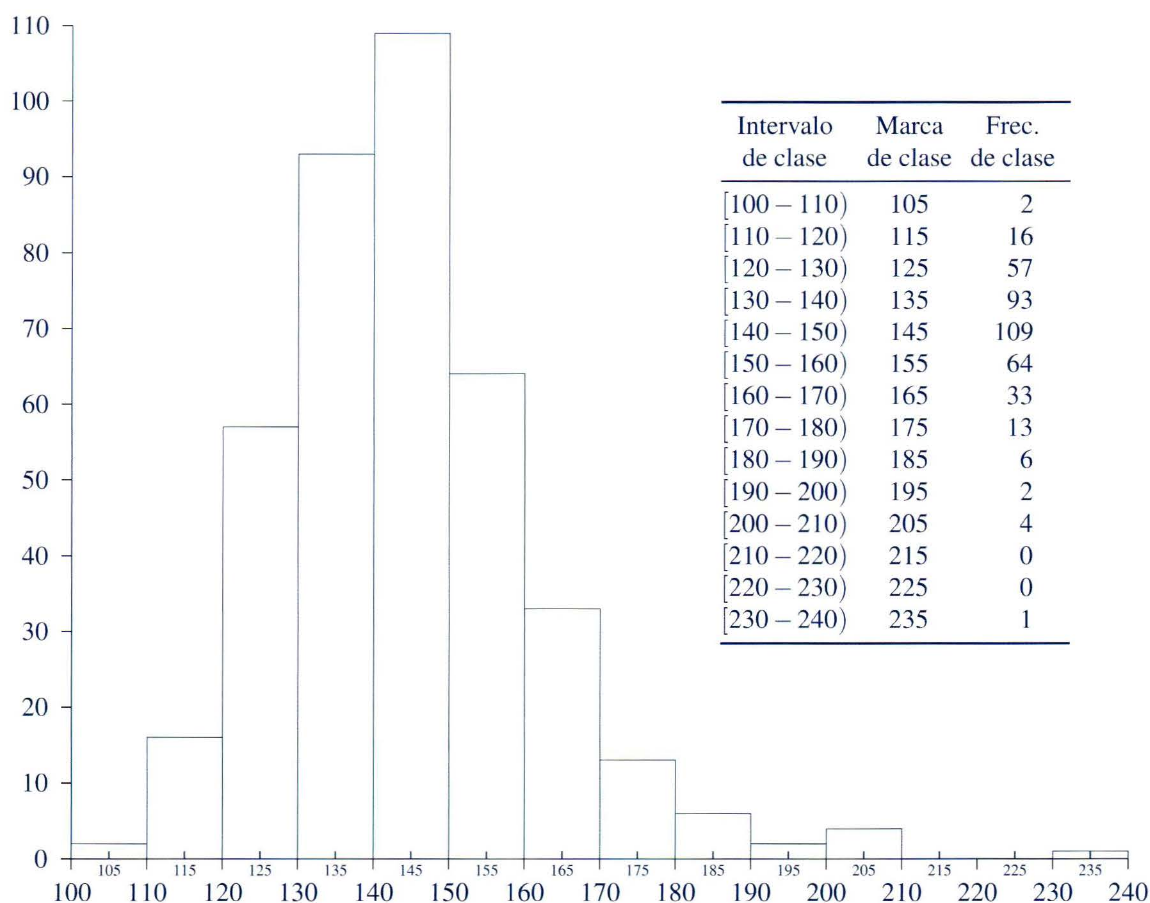
5. *Se dibujan las barras del diagrama en forma de rectángulos, cuya base es igual a la longitud del intervalo de clase y su área es proporcional a la frecuencia del intervalo.*

Hay algunas observaciones adicionales de carácter práctico que merece la pena destacar.

a) El rango debe incluir los valores mínimo y máximo que se observan en los datos. Es posible que sea conveniente extenderlo más allá de estos límites, hacia arriba y hacia abajo, de forma que los intervalos de clase sean todos de igual tamaño.

b) Aunque no es una exigencia estricta, es muy conveniente que todos los intervalos de clase tengan igual amplitud. En ocasiones, esta condición puede no cumplirse en los intervalos de clase extremos, puesto que pueden recoger todos los valores inferiores, o superiores, a un determinado valor mínimo, o máximo.

c) Cuando todos los intervalos tienen la misma amplitud, la altura del



Intervalo de clase	Marca de clase	Frec. de clase
[100 – 110)	105	2
[110 – 120)	115	16
[120 – 130)	125	57
[130 – 140)	135	93
[140 – 150)	145	109
[150 – 160)	155	64
[160 – 170)	165	33
[170 – 180)	175	13
[180 – 190)	185	6
[190 – 200)	195	2
[200 – 210)	205	4
[210 – 220)	215	0
[220 – 230)	225	0
[230 – 240)	235	1

Figura 5.9: Histograma de valores agrupados de la variable *peso* de la tabla de Galton.

rectángulo del diagrama es proporcional a la frecuencia de la clase.

d) La construcción de los intervalos de clase producen el efecto de *discretizar* una variable continua. La marca de clase puede considerarse un valor que representa a todo el intervalo, en particular, para realizar cálculos.

e) No hay ninguna regla predeterminada para saber cuántas clases debemos elegir, salvo que cualquier valor debe pertenecer a una y solamente a una clase. Un número demasiado elevado de clases puede producir irregularidades en la representación porque, accidentalmente, existan clases con poca frecuencia. En sentido contrario, un núme-

ro demasiado restringido de clases puede conducir a una pérdida de información. Los programas de ordenador suelen calcular de forma automática el número de intervalos; no obstante, en la práctica no hay que tener temor a experimentar con números de clase diferentes, a fin de conseguir una mejor representación de la tabla de datos.

EJEMPLO 5.44 Vamos a construir un histograma de datos agrupados para representar la variable *peso* de la tabla de datos de Galton.

a) Identificamos, en primer lugar, el rango de la variable. El valor más pequeño que se encuentra en la tabla es 107.25, que corresponde a la observación 344, mientras que el valor mayor es 236 que muestra la observación 137. Podemos considerar que los valores de la variable pueden oscilar, digamos, entre 100 y 240. Entonces, establecemos que el rango de la variable es el intervalo $[100-240]$.

b) Dividimos el rango en intervalos de clase. Si elegimos una amplitud igual a 10 para todos, obtenemos los siguientes:

$[100-110)$ $[110-120)$ $[120-130)$ $[130-140)$ $[140-150)$ $[150-160)$ $[160-170)$

$[170-180)$ $[180-190)$ $[210-200)$ $[200-210)$ $[210-220)$ $[220-230)$ $[230-240)$

d) Calculamos las frecuencias de cada intervalo de clase que se reflejan, junto con la marca de clase.

e) Finalmente, el histograma de datos agrupados para la variable *peso* de la tabla de Galton viene representado en la figura 5.9.

5.6 DESCRIPCIÓN NUMÉRICA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Las descripciones gráficas de las distribuciones de frecuencias de las variables estadísticas que hemos visto en la sección anterior dan una primera impresión visual de las características de su distribución de frecuencias.

Examinemos el histograma de la figura 5.9. La lectura del eje de abscisas nos informa del rango de valores de la variable, de los valores que ocupan los lugares *centrales* de la distribución, de la existencia de algún dato 'anómalo', aparentemente demasiado alejado del resto de valores; el eje de ordenadas nos dice cómo se *concentran*, o *dispersan*, los valores alrededor del centro de la escala; el análisis de conjunto nos da una idea de la *forma* de la distribución. Podemos concluir que la distribución tiene un único pico, aproximadamente situado en el centro del rango de valores, contiene algún dato 'anómalo' que debería inspeccionarse, es más o menos simétrica alrededor de su centro y está ligeramente más concentrada hacia los valores menores. En síntesis, las gráficas nos informan de tres aspectos de una distribución de frecuencias: su *centro*, la *dispersión* de los valores alrededor del centro y su *forma*. Frente a la impresión subjetiva que obtenemos gráficamente de los aspectos anteriores, es necesario disponer de números concretos que midan de manera objetiva dichas características. Este es el objetivo de este apartado: el estudio de las *medidas de centralización* –también llamadas *medidas de tendencia central*, *medidas de posición* o, simplemente, *promedios*–, y las *medidas de dispersión*; en los temas complementarios pueden encontrarse algunas *medidas de forma*. En conjunto, constituyen un resumen, o representación numérica, de una distribución de frecuencias de una variable estadística.

5.6.1 MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

MEDIA ARITMÉTICA

Una de las medidas de centralización más utilizada es la **media aritmética** o, simplemente, **media**.

MEDIA ARITMÉTICA

5.50 *La **media aritmética** de una serie de valores numéricos es igual al cociente entre la suma de los valores y el número de valores.*
Con símbolos: el valor medio de una magnitud cuantificable X, que presenta n valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se representa por $\bar{x}$ y se calcula mediante la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

EJEMPLO 5.45 Una pequeña empresa tiene cinco empleados. Sus salarios mensuales, en euros, vienen en la tabla 5.10 El salario medio es:

$$\bar{x} = \frac{1200 + 1425 + 1600 + 1350 + 1100}{5} = 1335 \text{ euros}$$

Para muchos cálculos y análisis, basta con saber el salario medio, que representa a todos los salarios cobrados por los empleados de la empresa.

Empleado	Salario
1	1200
2	1425
3	1600
4	1350
5	1100

Tabla 5.10: Salarios de los empleados de una empresa.

EJEMPLO 5.46 El *índice de precios al consumo* es una cifra que resume las variaciones de precios de muchos productos. Es un promedio que trata de reducir esa diversidad a una única magnitud. Esta pretensión, en cierto modo utópica, exige sacrificar parte de la información contenida en los datos, en aras de lograr una característica simple y manejable que, en algún sentido, represente a todo el conjunto de variaciones de precios.

Actualmente, con el auxilio de los ordenadores, o incluso las calculadoras de bolsillo, no es difícil realizar las operaciones para calcular la media u otras medidas. Normalmente, basta introducir los datos y aplicar la 'función', o 'pulsar' la tecla, correspondiente.

EJEMPLO 5.47

a) La *estatura media* de todos los individuos de la tabla de Galton es

$$\frac{64.00 + 72.20 + 66.10 + \cdots + 71.30 + 69.60}{400} = 68.00 \text{ pulgadas}$$

b) El *peso medio* de todos los individuos de la tabla de Galton es

$$\frac{111.50 + 143.00 + 125.50 + \cdots + 152.75 + 136.00}{400} = 144.06 \text{ libras}$$

Si los datos están dados en forma de tabla de frecuencias, el cálculo de la media aritmética puede ser abreviado.

Tabla de frecuencias

Núm. hijos x_i	Núm. mujeres F_i	Producto $x_i \cdot F_i$
0	67434	0
1	27338	27338
2	34474	68948
3	6500	19500
4	1267	5068
Total	137013	120854

Número de hijos nacidos vivos que se observa en la población de mujeres entre 15 y 49 años con residencia en la Comunidad Autónoma de Cantabria.

Fuente: INE: Demografía y Población. Encuesta de fecundidad 1999.

Tabla 5.11: Distribución del número de hijos por mujer.

EJEMPLO 5.48 La tabla 5.11, muestra las frecuencias de la variable *número de hijos nacidos vivos* que tienen las *mujeres entre 15 y 49 años con residencia en la Comunidad Autónoma de Cantabria*, según la *Encuesta de fecundidad de 1999*, publicada en el epígrafe Demografía y Población por el Instituto Nacional de Estadística (INE) de España. De acuerdo con su definición, el número medio de hijos por mujer es igual a:

$$\text{número medio de hijos por mujer} = \frac{\text{total de hijos}}{\text{número de mujeres}}$$

Cálculo de la media Tabla de frecuencias absolutas		
Valores x_i	*Frec. abs.* F_i	*Productos* $x_i \cdot F_i$
x_1	F_1	$x_1 \cdot F_1$
x_2	F_2	$x_2 \cdot F_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	F_n	$x_n \cdot F_n$
Total	N	$\sum x_i \cdot F_i$
$\bar{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot F_i}{N}$		

(a)

Cálculo de la media Tabla de frecuencias relativas		
Valores x_i	*Frec. rel* f_i	*Productos* $x_i \cdot f_i$
x_1	f_1	$x_1 \cdot f_1$
x_2	f_2	$x_2 \cdot f_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n	$x_n \cdot f_n$
Total	1	$\sum x_i \cdot f_i$
$\bar{x} = \sum x_i \cdot f_i$		

(b)

Tabla 5.12: Cálculo de la media en una tabla de frecuencias.

El número total de mujeres es la suma de las frecuencias absolutas que aparecen en la tabla:

$$67434 + 27338 + 34474 + 6500 + 1267 = 137013$$

Para hallar el número total de hijos, basta multiplicar cada valor por su frecuencia y sumar; por ejemplo, el producto $2 \cdot 34474$ indica la aportación, al total de hijos, de las 34474 mujeres que tienen 2 hijos. Entonces

$$\begin{aligned}\text{total de hijos} &= 0 \cdot 67434 + 1 \cdot 27338 + 2 \cdot 34474 + 3 \cdot 6500 + 4 \cdot 1267 \\ &= 120854\end{aligned}$$

Este cálculo equivale a sumar, uno a uno, el número de hijos de cada mujer. Si imaginamos que hemos ordenado en una fila las 137013 mujeres, colocándolas en orden creciente según el número de hijos, primero encontraríamos 67434 mujeres sin hijos, y tendríamos que sumar 67434 ceros; luego, encontraríamos 27338 mujeres con un hijo, y tendríamos que sumar 27338 veces 1, así sucesivamente. Estos cálculos están indicados en la tabla 5.11. En resumen encontramos

$$\bar{x} = \frac{120854}{137013} = 0.8821$$

El ejemplo anterior nos conduce al siguiente resultado:

MEDIA ARITMÉTICA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

Si los datos están resumidos en una tabla de frecuencias absolutas, como la tabla 5.12 (a), la media aritmética, $\overline{x}$, se calcula por la fórmula: 5.51

$$\overline{x} = \frac{x_1F_1 + x_2F_2 + \cdots + x_nF_n}{F_1 + F_2 + \cdots + F_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iF_i}{N}$$

Si expresamos la fórmula para calcular la media a partir de las frecuencias absolutas de la forma:

$$\overline{x} = x_1\frac{F_1}{F_1 + F_2 + \cdots + F_n} + \cdots + x_n\frac{F_1}{F_1 + F_2 + \cdots + F_n}$$

encontraremos que es un promedio de los valores de la variable por cocientes de la forma:

$$\frac{F_i}{F_1 + F_2 + \cdots + F_n} = \frac{F_i}{N}$$

que son las frecuencias relativas, f_i, de cada valor. Esta observación nos permite escribir la fórmula para calcular la media a partir de la tabla de frecuencias relativas.

MEDIA ARITMÉTICA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS RELATIVAS

Si los datos están resumidos en una tabla de frecuencias relativas, como la tabla 5.12 (b), la media aritmética, $\overline{x}$, se calcula por la fórmula: 5.52

$$\overline{x} = x_1f_1 + x_2f_2 + \cdots + x_nf_n = \sum_{i=1}^{n} x_if_i$$

EJEMPLO 5.49 La tabla 5.13 muestra cómo calcular la media a partir de las frecuencias relativas de la distribución de la tabla 5.11. Como se puede apreciar, la media buscada se obtiene directamente como suma de la tercera columna de la tabla.

Tabla de frecuencias		
Núm. hijos x_i	Frec. relativa f_i	Producto $x_i \cdot f_i$
0	0.4922	0.0000
1	0.1995	0.1995
2	0.2516	0.5032
3	0.0474	0.1423
4	0.0092	0.0370
Total	1.0000	0.8821

Tabla 5.13: Cálculo de la media del número de hijos usando las frecuencias relativas.

Cuando se han agrupado los datos de una variable continua en forma de tabla de frecuencias y, por alguna razón, no se dispone de los datos originales, es posible todavía calcular de forma aproximada la media, tomando como valores x_i las marcas de clase y como frecuencias f_i las frecuencias del intervalo.

EJEMPLO 5.50 Para calcular la media de la variable *peso* de la tabla de Galton a partir de la tabla incluida en la figura 5.9 disponemos los cálculos como se muestra en la tabla 5.14. La media se obtiene al sumar la columna de productos de las marcas de clase por las frecuencias. El valor que resulta por este procedimiento es $\overline{x} = 144.3250$. Podemos compararlo con el que se obtuvo anteriormente mediante

Intervalo de clase	Marca de clase x_i	Frecuencia absoluta F_i	Frecuencia relativa f_i	Productos $x_i f_i$
$[100-110)$	105	2	0.0050	0.5250
$[110-120)$	115	16	0.0400	4.6000
$[120-130)$	125	57	0.1425	17.8125
$[130-140)$	135	93	0.2325	31.3875
$[140-150)$	145	109	0.2725	39.5125
$[150-160)$	155	64	0.1600	24.8000
$[160-170)$	165	33	0.0825	13.6125
$[170-180)$	175	13	0.0325	5.6875
$[180-190)$	185	6	0.0150	2.7750
$[190-200)$	195	2	0.0050	0.9750
$[200-210)$	205	4	0.0100	2.0500
$[210-220)$	215	0	0.0000	0.0000
$[220-230)$	225	0	0.0000	0.0000
$[230-240)$	235	1	0.0025	0.5875
		$N = 400$		$\bar{x} = 144.3250$

Tabla 5.14: Cálculo de la media de la variable *peso* de la tabla de Galton a partir de la tabla de valores agrupados.

la aplicación directa de la definición de media, 144.06. Se observa un ligero error, consecuencia de la agrupación de valores.

Propiedades de la media

La media es una de las medidas de centralización más conocidas y utilizadas. Su popularidad está motivada, sin duda, por la sencillez de su cálculo y sus propiedades. Sin embargo, no está exenta de inconvenientes. Vamos comentar algunas de sus características.

1. En el cálculo de la media intervienen *todos* los valores de la variable y siempre es un número comprendido entre el mínimo y el máximo de ellos. Sin embargo, no tiene por qué coincidir con uno de los valores que toma la variable, lo cual puede dar lugar a que su significado sea difícil de interpretar. En un ejemplo anterior nos encontramos con que el número medio de hijos por mujer era 0.8821. Este número sólo puede entenderse de manera abstracta, considerando que son

los hijos que tiene una mujer 'media' o 'ideal' que representa a toda la población y no se corresponde, evidentemente, con ninguna mujer real.

2. La media es muy sensible a la influencia de unas pocas observaciones extremas. Por ejemplo, si las puntuaciones de un estudiante en los exámenes son 8, 9, 8 y 10 la nota media es 8.75; mientras que si las puntuaciones fuesen 8, 9, 8 y 0 la media bajaría a 6.25. Los valores muy extremos de una variable pueden ser 'anómalos', producto de errores en la recogida de los datos; pero también puede ocurrir que sean observaciones excepcionales que deban ser incluidas en los datos. En este caso, la media puede no ser un buen resumen de la distribución.

3. Cuando se dispone de la tabla bruta de datos es siempre posible el cálculo de la media de una variable. Sin embargo, si se manejan datos de 'segunda mano', ya elaborados en forma de tabla de frecuencias, puede darse la circunstancia de que no sea posible calcular la media. Por ejemplo, los resultados de la Encuesta de fecundidad de 1999 en mujeres entre 15 y 49 años para el *total nacional*, publicada por el INE, son los siguientes:

x_i	0	1	2	3	4	5 y más
F_i	4738369	1580253	2674505	868432	197807	105871

Los valores de la variable *número de hijos vivos* de una mujer son 0, 1, 2, 3, 4, 5 y más. La última modalidad es abierta, por lo que, estrictamente hablando, no se puede calcular la media de la distribución de frecuencias, al no ser posible precisar un valor numérico concreto para esta clase.

4. La media tiene dos propiedades muy útiles que concuerdan con lo que nos sugiere la intuición:

   a) No le afecta un cambio en el origen de medida de los valores de la variable.

   b) Si se cambia la escala de medida, la media cambia proporcionalmente.

Es sencillo razonar que las cosas son efectivamente de este modo. Sean los posibles valores de la variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$, medidos en una

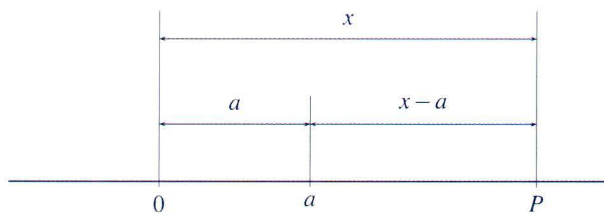


Figura 5.10: Cambio de origen de la escala.

determinada escala, en la que se ha fijado el origen y la unidad de medida. Supongamos que se cambia el origen de medida al punto a y se mantiene la unidad de medida; entonces los nuevos valores medidos serán: $x_1 - a, x_2 - a, \ldots, x_n - a$. En la figura 5.10 se justifica esa transformación de los valores medidos. Consideremos una observación P. Si su medida respecto del origen 0 era x, cuando el origen sea el punto a, la medida correspondiente, distancia entre P y a, será $x - a$. Como consecuencia de esta transformación, la media de las nuevas medidas es igual a $\bar{x} - a$, ya que se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + \cdots + (x_n - a)}{n} &= \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - na}{n} \\ &= \bar{x} - a \end{aligned}$$

Por otra parte, si cambiamos la unidad de medida de forma que la nueva unidad sea igual a b unidades de antes, las medidas anteriores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se transforman en $x_1/b, x_2/b, \ldots, x_n/b$ y la media de los nuevos valores es:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b} + \cdots + \frac{x_n}{b}\right) = \frac{\bar{x}}{b}$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

- *Si se cambia el origen de medida a un punto de medida a respecto del origen anterior, la nueva media se transforma de la misma manera, y se cumple:*

$$\overline{x}_{\text{nueva}} = \overline{x}_{\text{anterior}} - a$$

- *Si se cambia la unidad de medida, la media cambia proporcionalmente al factor de escala. Si la unidad nueva es igual a b unidades de antes, la nueva media se transforma según la relación:*

$$\overline{x}_{\text{nueva}} = \frac{1}{b}\overline{x}$$

EJEMPLO 5.51 La temperatura se mide en grados Celsius (C) o grados Farenheit (F). El paso de una a otra supone hacer un cambio de origen y escala. La expresión que permite pasar de grados Celsius a grados Farenheit es $F = \frac{9}{5}C + 32$. Con las notaciones anteriores es $a = -32$ y $b = \frac{5}{9}$. Los siguientes datos ficticios representan la temperatura máxima de una ciudad durante los doce meses del año, expresada en grados Celsius.

Mes	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
°C	5	10	15	20	25	30	35	40	25	20	20	10

La temperatura media en grados centígrados es:

$$\overline{C} = \frac{5+10+15+20+25+30+35+40+25+20+20+10}{12} = 21.25$$

Si hacemos el cambio a grados Farenheit, mediante la fórmula anterior, obtenemos los siguientes datos:

Mes	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
°F	41	50	59	68	77	86	95	104	77	68	68	50

La temperatura media en grados Farenheit es

$$\overline{F} = \frac{41+50+59+68+77+86+95+104+77+68+68+50}{12} = 70.25$$

Como podemos comprobar, entre $\overline{C}$ y $\overline{F}$ se cumple la relación que permite pasar de grados Celsius a Farenheit, ya que $70.25 = \frac{9}{5}22.5 + 32$, es decir, $\overline{F} = \frac{1}{b}\overline{C} - a$.

5.6.2 MEDIDAS DE DISPERSIÓN

La media aritmética es un indicador del centro de una distribución de frecuencias. Cuando la utilizamos como valor representativo de la serie de valores, estamos aceptando la simplificación de que cada valor es igual a esta medida resumen. Es decir, al usar la media aritmética pensamos que cada individuo de la población es igual al individuo 'medio'. Esa simplificación es aceptable si los valores están muy agrupados alrededor de la media, y no lo es si hay grandes diferencias entre ellos y la media. Si la variable toma siempre el mismo valor en todos los individuos, la media es igual al valor común y es completamente representativa. Si los datos varían mucho, resulta difícil aceptar que la media los representa. Lo bien o mal que una medida de centralización representa al conjunto de observaciones depende de una característica interna de los datos como es su *dispersión* o *variabilidad* respecto de la medida. La dispersión de los datos se puede cuantificar de diversas formas. En este sección estudiaremos algunas de las más utilizadas.

RANGO

La idea más simple para medir la dispersión de una variable es dar el valor mayor y menor que toma. La diferencia entre ambos se denomina *rango*.

RANGO

5.54 *El **rango** o **recorrido** de una variable es la diferencia entre los valores máximo y mínimo de la variable. Se representa por R.*

$$R = x_{máx} - x_{mín}$$

EJEMPLO 5.52 El rango de la variable *salario* de la tabla 5.20 es

$$R = 3000 - 900 = 2100 \text{ euros.}$$

EJEMPLO 5.53

- El rango de la variable *estatura* de la tabla de Galton es $R = 79.50 - 59.40 = 20.1$ pulgadas.
- El rango de la variable *peso* de la tabla de Galton es $R = 236 - 107.25 = 128.75$ libras.

VARIANZA Y DESVIACIÓN TÍPICA

La importancia de la media aritmética como medida de centralización nos lleva a plantearnos el problema de cómo caracterizar de manera numérica la dispersión de una serie de valores alrededor de su media. Supongamos que los valores son $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y su media es $\overline{x}$. La diferencia $x_i - \overline{x}$ expresa lo próximo o alejado que está el valor x_i de la media. Podemos pensar en medir la dispersión total de la serie de valores sumando las dispersiones individuales, es decir, podemos tomar como medida de la dispersión total la cantidad $(x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + \cdots + (x_n - \overline{x})$. Ahora bien, la cantidad anterior no es útil como medida de dispersión ya que, cualquiera que sea el conjunto de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, siempre es igual a cero. En efecto, como $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ se tiene $n\overline{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, de forma que

$$(x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + \cdots + (x_n - \overline{x}) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - n\overline{x} = 0$$

No es difícil comprender qué está ocurriendo. Las cantidades $(x_i - \overline{x})$ son negativas cuando x_i es inferior a la media y positivas en caso contrario. La media está en el *centro* de la serie; es, por así decirlo, un punto de equilibrio entre los valores. Entonces unas cantidades $(x_i - \overline{x})$ se compensarán con las otras resultando que la suma es nula. Para solucionar este inconveniente se adopta el criterio de elevar las desviaciones al cuadrado, haciendo que todas tomen valor positivo. Así, se tiene la serie $(x_1 - \overline{x})^2$, $(x_2 - \overline{x})^2$, $\ldots$, $(x_n - \overline{x})^2$. Podemos pensar ahora que si sumamos los términos anteriores, $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$, ya tenemos una medida de la dispersión respecto de la media. Pero la suma anterior todavía tiene un defecto. Pensemos que tenemos dos conjuntos de valores: uno con muchos datos muy concentrados alrededor de la media y otro con pocos datos muy alejados de la media. En el primer conjunto los términos $(x_i - \overline{x})^2$ son muy pequeños, mientras que en el segundo son grandes. Es natural pensar que el primer conjunto está menos disperso que el segundo, por lo que la medida de dispersión debiera valer menos en el primer conjunto. Pero pudiera ocurrir que la suma de muchos términos pequeños llegase a ser muy grande, desvirtuando la idea de que los datos están poco dispersos alrededor de su media. Para evitar esta influencia del número de datos de la serie se toma como medida de la dispersión la media aritmética de los valores $(x_i - \overline{x})^2$.

VARIANZA

5.55 *La **varianza** de un conjunto de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es la media aritmética de los cuadrados de sus desviaciones respecto de la media. Se representa por s^2 y la fórmula para calcularla es:*

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

La varianza se representa por un cuadrado para hacer hincapié en que se trata de un número positivo. Otra medida de la dispersión muy empleada es la raíz cuadrada de la varianza, que se denomina *desviación típica*.

DESVIACIÓN TÍPICA

5.56 *La raíz cuadrada de la varianza se denomina **desviación típica**. Se representa por s y la fórmula para calcularla es:*

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

EJEMPLO 5.54 Vamos a calcular la varianza y desviación típica de los datos de la tabla 5.10. Para un mejor comprensión haremos los cálculos con detalle, organizándolos como se muestra en la tabla 5.15. La media es $\bar{x} = 1335$. Restamos esta cantidad a cada uno de los valores de la variable para calcular las desviaciones respecto de la media. El resultado viene en la tercera columna. Los valores inferiores a la media muestran una desviación negativa y los superiores positiva. La suma es igual a cero. En la cuarta columna se incluyen las desviaciones elevadas al cuadrado. La varianza es la media aritmética de estos números:

	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	1200	−135	18225
2	1425	90	8100
3	1600	265	70225
4	1350	15	225
5	1100	−235	55225
	Total	0	152000

Tabla 5.15: Cálculo de la varianza de los salarios.

$$s^2 = \frac{152000}{5} = 30400 \text{ euros al cuadrado}$$

La desviación típica es la raíz cuadrada del valor anterior: $s = \sqrt{30400} = 174.36$ euros.

EJEMPLO 5.55 Con el auxilio de un ordenador podemos calcular la varianza y desviación típica de las variables *estatura* y *peso* de todos los individuos de la tabla de Galton.

a) Si recordamos que la estatura media era 68.00 pulgadas, tenemos

$$s_e^2 = \frac{(64.00 - 68.00)^2 + \cdots + (69.60 - 68.00)^2}{400} = 7.52 \text{pulgadas cuadradas}$$

La desviación típica es $s_e = 2.74$.

b) Si recordamos que el peso medio era 144.06 libras, tenemos

$$s_p^2 = \frac{(111.50 - 144.06)^2 + \cdots + (136.00 - 144.06)^2}{400} = 290.28\text{libras}^2$$

La desviación típica es $s_p = 17.04$ libras.

Si los datos están en una tabla de frecuencias, el cálculo de la varianza se sigue de las expresiones correspondientes al cálculo de la media aritmética para tablas de frecuencias, puesto que, por definición, la varianza es la media aritmética del cuadrado de las desviaciones a la media. Tenemos los siguientes resultados:

VARIANZA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS.

Si los datos están resumidos en una tabla de frecuencias absolutas, como la tabla 5.12 (a), la varianza, s^2, se calcula por la fórmula: 5.57

$$s^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2F_1 + (x_2-\overline{x})^2F_2 + \cdots + (x_n-\overline{x})^2F_n}{F_1+F_2+\cdots+F_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2F_i}{N}$$

VARIANZA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS RELATIVAS.

Si los datos están resumidos en una tabla de frecuencias relativas, como la tabla 5.12 (b), la varianza, s^2, se calcula por la fórmula: 5.58

$$s^2 = (x_1-\overline{x})^2f_1 + (x_2-\overline{x})^2f_2 + \cdots + (x_n-\overline{x})^2f_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2f_i$$

EJEMPLO 5.56 En la tabla 5.16 se muestra la disposición de los cálculos para encontrar la varianza de una serie de datos dispuestos en tabla de frecuencias. La variable es el *número de hijos* de una población de mujeres. Se obtiene que la varianza es $s^2 = 1.0029$ hijos al cuadrado. La desviación típica es $s = \sqrt{1.0029} = 1.0014$.

Propiedades de la varianza y la desviación típica

Para saber interpretar de manera precisa la varianza y desviación típica y saber utilizar adecuadamente estas medidas es conveniente tener presente las consideraciones que se exponen a continuación.

1. La varianza mide la dispersión con respecto a la media aritmética. Por lo tanto sólo debe utilizarse cuando se elige ésta como medida de centralización.

Encuesta de fecundidad (1999). Comunidad de Cantabria. Número hijos vivos por mujer							
x_i	F_i	f_i	x_iF_i	$(x_i-\overline{x})$	$(x_i-\overline{x})^2$	$(x_i-\overline{x})^2\cdot F_i$	$(x_i-\overline{x})^2\cdot f_i$
0	67434	0.4922	0	-0.8821	0.7780	52465.94	0.3829
1	27338	0.1995	27338	0.1179	0.0139	380.25	0.0028
2	34474	0.2516	68948	1.1179	1.2498	43085.08	0.3145
3	6500	0.0474	19500	2.1179	4.4857	29156.79	0.2128
4	1267	0.0092	5068	3.1179	9.7215	12317.19	0.0899
Total	137013	1.0000	120854			137405.25	1.0029

$$\overline{x}=\frac{120854}{137013}=0.88 \qquad s^2=\frac{137405.25}{137013}=1.0029 \qquad s=\sqrt{1.0029}=1.0014$$

Tabla 5.16: Cálculo de la varianza y desviación típica en una tabla de frecuencias.

Demostración de la igualdad $s^2=\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}-\overline{x}^2$

Hay que desarrollar el cuadrado de las diferencias $(x_i-\overline{x})^2$, hacer las operaciones algebraicas y tener en cuenta la definición de media:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\overline{x})^2}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2-2x_i\overline{x}+\overline{x}^2)}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}-2\overline{x}\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}+\frac{\sum_{i=1}^n \overline{x}^2}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}-2\overline{x}\,\overline{x}+\frac{n\,\overline{x}^2}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}-2\overline{x}^2+\overline{x}^2 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}-\overline{x}^2 \end{aligned}$$

2. La varianza es siempre no negativa y toma el valor cero únicamente cuando todos los valores de la variable son iguales, en cuyo caso coinciden con la media y hay ausencia total de dispersión. En los demás casos la varianza es positiva y, cuanto mayor es la dispersión de los datos con respecto a la media, tanto mayor será el valor de la varianza.

3. La varianza se mide en las unidades de la variable elevadas al cuadrado, mientras que la desviación típica se mide en las mismas unidades que la variable.

4. Una igualdad interesante que relaciona la varianza, la media y la suma de los cuadrados de los valores es la siguiente:

5.59 *La varianza es igual a la media de los cuadrados de los datos menos el cuadrado de la media.*

$$s^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-\overline{x}^2=\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}-\overline{x}^2$$

Si los cálculos se hacen a mano, la fórmula anterior reduce el número de operaciones que hay que realizar, ya que evita calcular las diferencias de

los valores a la media. Además, tiene importancia teórica, ya que relaciona tres cantidades que tienen interpretación estadística, como son la media, la varianza y la media de los valores de la variable al cuadrado.

5. Si se cambia el origen de medida de los valores de la variable no se modifican el valor de la varianza ni el de la desviación típica, mientras que si se cambia la escala de medida, la varianza cambia en proporción al cuadrado de la nueva unidad y la desviación típica en proporción a dicha nueva unidad.

   Esta propiedad se comprueba de modo análogo a como se hizo en el caso de la media. Supongamos que los valores originales son $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y que se efectúa un traslado de origen resultando unos nuevos valores $(x_1 - a), (x_2 - a), \ldots, (x_n - a)$. Como sabemos la nueva media es $\overline{x} - a$, por lo que las desviaciones de los nuevos valores respecto de su media serán

$$[(x_i - a) - (\overline{x} - a)] = (x_i - \overline{x})$$

   Como estos valores no cambian, tanto la varianza como la desviación típica quedan inalteradas.

   Supongamos ahora que se efectúa un cambio de escala, pasando los nuevos valores a ser de la forma $\frac{x_1}{b}, \frac{x_2}{b}, \ldots, \frac{x_n}{b}$. Recordemos que la nueva media es $\frac{\overline{x}}{b}$. Entonces las desviaciones son

$$\left(\frac{x_1}{b} - \frac{\overline{x}}{b}\right), \left(\frac{x_2}{b} - \frac{\overline{x}}{b}\right), \ldots, \left(\frac{x_n}{b} - \frac{\overline{x}}{b}\right)$$

   La nueva varianza será:

$$\begin{aligned} s^2_{\text{nueva}} &= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{x_1}{b} - \frac{\overline{x}}{b}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b} - \frac{\overline{x}}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{b} - \frac{\overline{x}}{b}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{b^2}\left[\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n}\right] \\ &= \frac{1}{b^2}\, s^2_{\text{anterior}} \end{aligned}$$

   Hemos llegado al siguiente resultado:

INFLUENCIA DE LA ESCALA DE MEDIDA EN LA VARIANZA Y LA DESVIACIÓN TÍPICA

5.60

- *Si se cambia el origen de medida a un punto de medida a respecto del origen anterior no cambian ni la varianza ni la desviación típica.*
- *Si se cambia la unidad de medida, la varianza cambia proporcionalmente al cuadrado del factor de escala y la desviación típica proporcionalmente al factor de escala. Si la unidad nueva es igual a b unidades de antes, la nueva varianza se transforma según la relación:*

$$s^2_{\text{nueva}} = \frac{1}{b^2}\, s^2_{\text{anterior}}$$

y la nueva desviación típica se trasforma según la relación

$$s_{\text{nueva}} = \frac{1}{b}\, s_{\text{anterior}}$$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN

La varianza y la desviación típica dependen de la unidad de medida que se emplea para medir la variable. Esto es un grave inconveniente cuando se quiere comparar la dispersión de poblaciones medidas con distintas escalas. Para tener una medida invariante respecto de la unidad de medida empleada, se dispone del denominado **coeficiente de variación**.

COEFICIENTE DE VARIACIÓN

5.61

Se llama ***coeficiente de variación*** *al cociente entre la desviación típica y la media, supuesto que ésta es distinta de cero. Se representa por CV y su expresión es*

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

Suele expresarse en forma de porcentaje, multiplicando para ello el valor anterior por 100.

EJEMPLO 5.57

- El coeficiente variación de la variable *estatura* de la tabla de Galton es

$$CV_e = \frac{2.7}{68} = 0.0397$$

o bien en porcentaje $CV_e = 3.97\,\%$.

- El coeficiente variación de la variable *peso* de la tabla de Galton es

$$CV_p = \frac{17.04}{144.06} = 0,1183$$

  o bien en porcentaje $CV_e = 11.83\,\%$.

Podemos concluir que la variable *peso* muestra una mayor variabilidad que la variable *estatura*.

Propiedades del coeficiente de variación

1. El coeficiente de variación es un número sin unidades que, como se ha dicho, se suele expresar como porcentaje.

2. Dado que es un coeficiente para comparar la variabilidad, que es una cualidad esencialmente no negativa, sólo tiene sentido cuando es positivo. Entonces sólo se debe usar cuando los datos son positivos para poder asegurar que la media es positiva.

3. El coeficiente es una medida de la dispersión invariante respecto de un cambio de escala, como consecuencia de las propiedades de la media y la desviación típica. Sin embargo no es invariante frente al cambio de origen porque el numerador queda inalterado pero el denominador cambia.

CUESTIONES DE AUTOEVALUACIÓN

5.1 Lanzamos una moneda dos veces consecutivas. Consideramos el espacio de posibilidades formado por los cuatro casos $\Omega = \{$☺☺, ☺⊛, ⊛☺, ⊛⊛$\}$. En este espacio, el suceso "obtener más caras que cruces" es igual a:

a) {☺⊛, ⊛☺}

b) {☺⊛, ⊛☺, ☺☺}

c) {☺☺}

5.2 Lanzamos una moneda dos veces consecutivas. Consideramos el espacio de posibilidades formado por los cuatro puntos: $\Omega = \{$☺☺, ☺⊛, ⊛☺, ⊛⊛$\}$. El suceso contrario de "obtener alguna cara" es igual a:

a) {☺⊛, ⊛☺}

b) {☺☺}

c) {⊛⊛}

5.3 Lanzamos una moneda tres veces consecutivas. Consideremos el espacio de posibilidades formado por los ocho resultados posibles de los tres lanzamientos. El suceso "obtener al menos dos caras" es igual a:

a) {☺☺☺, ☺☺⊛, ☺⊛☺, ⊛☺☺}

b) {☺☺☺}

c) {☺☺⊛, ☺⊛☺, ⊛☺☺}

5.4 Lanzamos una moneda tres veces consecutivas. Consideremos el espacio de posibilidades formado por los ocho resultados posibles de los tres lanzamientos. El suceso contrario del suceso "algún resultado es cara" es igual a:

a) "algún resultado no es cara"

b) "todos los resultados son cruz"

c) "algún resultado es cara y alguno es cruz"

5.5 Lanzamos una moneda tres veces consecutivas. Consideremos el espacio de posibilidades formado por los ocho resultados posibles de los tres lanzamientos. El suceso

$A = \{$ ☺☺☺, ☺☺⊛, ☺⊛⊛, ⊛⊛⊛, ⊛⊛☺, ⊛☺☺ $\}$

es igual a:

a) "obtener al menos dos caras o dos cruces".

b) "obtener al menos dos resultados consecutivos iguales".

c) "que los tres resultados no sean iguales".

5.6 Lanzamos una moneda cuatro veces consecutivas. Consideremos el espacio de posibilidades formado por los dieciséis resultados posibles de los cuatro lanzamientos. El suceso contrario de "obtener más caras que cruces" es igual a:

a) "obtener más cruces que caras"

b) "obtener menos caras que cruces"

c) "obtener al menos tantas cruces como caras"

5.7 Lanzamos un dado dos veces consecutivas. Consideremos el espacio de posibilidades formado por los 36 resultados posibles de los dos lanzamientos. El suceso

{⚀⚂, ⚁⚃, ⚂⚄, ⚃⚅}

es igual a:

a) "el resultado del segundo lanzamiento es mayor que el primero"

b) "los resultados de los dos lanzamientos son distintos"

c) "la diferencia entre el resultado del segundo lanzamiento y el del primero es 2"

5.8 Si el suceso A ha ocurrido, se puede asegurar que el suceso

a) $A \cap B$ también ha ocurrido.

b) $A \cup B$ también ha ocurrido.

c) A^c también ha ocurrido.

5.9 Si el suceso $A \cap B^c$ ha ocurrido, se puede asegurar que el suceso

a) A ha ocurrido.

b) B ha ocurrido.

c) $A \cup B$ no ha ocurrido.

5.10 Si el suceso $A^c \cap B^c$ ha ocurrido, se puede asegurar que el suceso

a) $A \cap B^c$ ha ocurrido.

b) $A \cap B$ ha ocurrido.

c) $A \cup B$ no ha ocurrido.

5.11 Lanzamos una moneda dos veces consecutivas. Consideramos como espacio de posibilidades el formado por los cuatro puntos:

Ω = {◎◎, ◎⊗, ⊗◎, ⊗⊗}

Sea A el suceso "el primer resultado es cara" y B el suceso "el segundo resultado es cara", entonces el suceso $A \cup B$ es igual a:

a) "Ambos resultados son cara"

b) "Al menos un resultado es cara"

c) "Más de un resultado es cara"

5.12 Un dado está cargado de manera que al lanzarlo, sus sucesos simples ocurren con las siguientes probabilidades:

Modelo no uniforme del lanzamiento del dado

Suceso	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
Probabilidad	0.1	0.1	0.3	0.1	0.2	0.2

En un lanzamiento, la probabilidad de obtener más de cuatro puntos es:

a) 0.3

b) 0.1

c) 0.4

5.13 Un dado está cargado de manera que al lanzarlo, sus sucesos simples aparecen con las siguientes probabilidades:

Modelo no uniforme del lanzamiento del dado

Suceso	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
Probabilidad	0.2	0.2	0.1	?	0.3	0.1

La probabilidad de que aparezca ⚃ es:

a) 0.1

b) No lo podemos saber, faltan datos.

c) Es imposible que un dado tenga esas probabilidades.

5.14 Lanzamos dos veces una dado equilibrado. La probabilidad de que un resultado sea el doble del otro es:

a) $1/6$

b) $2/6$

c) $2/11$

5.15 Lanzamos dos veces una moneda equilibrada. La probabilidad de obtener alguna cara es:

a) $2/4$

b) $3/4$

c) $2/3$

5.16 Lanzamos tres veces una moneda equilibrada. La probabilidad de obtener alguna cara es:

a) $2/3$

b) $3/4$

c) $7/8$

5.17 Lanzamos tres veces una moneda equilibrada. La probabilidad de obtener dos resultados iguales consecutivos es:

a) $3/4$

b) $3/8$

c) $7/8$

5.18 Se lanza un dado equilibrado dos veces. La probabilidad de que la suma de los resultados sea 7 es:

a) $1/6$

b) $7/36$

c) $5/36$

5.19 De una urna que contiene 2 bolas azules y 3 rojas se extraen dos bolas sucesivamente, sin devolver la primera a la urna. La probabilidad de que alguna de las bolas sea azul es:

a) 0.5

b) 0.6

c) 0.7

5.20 De una urna que contiene 3 bolas azules y 2 rojas, extraemos dos bolas sin devolver la primera a la urna. La probabilidad de obtener dos bolas de distinto color es:

a) $1/2$

b) $3/5$

c) $2/3$

5.21 De una urna que contiene 2 bolas azules y 2 rojas y 1 verde se extraen dos bolas sucesivamente, sin devolver la primera a la urna. La probabilidad de que una de las dos bolas sea la verde es:

a) 0.8

b) 0.6

c) 0.4

5.22 Lanzamos un dado dos veces, la probabilidad de que primer resultado sea mayor que el segundo es igual a:

a) $5/12$

b) $1/2$

c) $1/3$

5.23 De una urna que contiene 5 bolas, numeradas con los números 1, 2, 3, 4 y 5, se extraen dos bolas sucesivamente, sin devolver la primera a la urna. La probabilidad de que el número de la primera bola sea mayor el de la segunda es:

a) $9/20$

b) $1/2$

c) $11/20$

5.24 Si $P(A) = 0.2$ y $P(A \cap B) = 0.1$, la probabilidad condicionada $P(B \mid A)$ es igual a:

a) 0.5

b) 0.02

c) 0.1

5.25 Si $P(A) = 0.2$ y $P(B \mid A) = 0.6$, la probabilidad $P(A \cap B)$ es igual a:

a) 0.3

b) 0.12

c) 0.6

5.26 Si $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \mid B) = 0.1$, la probabilidad condicionada $P(B \mid A)$ es igual a:

a) 0.5

b) 0.2

c) 0.1

5.27 Si $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$ y $P(A \cap B) = 0.1$, la probabilidad condicionada $P(A \mid B^c)$ es igual a:

a) 1/7

b) 2/7

c) 2/3

5.28 Lanzamos dos veces una moneda. Si sabemos que ha aparecido alguna cara, la probabilidad de que los dos resultados sean cara es:

a) 1/2

b) 1/3

c) 1/4

5.29 De una urna que contiene 3 bolas azules, 2 rojas y una verde, extraemos una bola al azar. Si sabemos que la bola extraída no es verde, la probabilidad de que sea roja es:

a) $2/5$

b) $1/2$

c) $3/5$

5.30 Lanzamos un dado dos veces, si el primer resultado ha sido mayor que el segundo, la probabilidad de que el primero sea un 6 es igual a:

a) $1/2$

b) $1/3$

c) $1/4$

5.31 Lanzamos un dado dos veces, si la suma de los resultados es 7, la probabilidad de que el primero sea un 6 es igual a:

a) $1/5$

b) $1/6$

c) $1/7$

5.32 De una urna que contiene 4 bolas azules y 5 rojas se extraen dos bolas, sucesivamente, sin devolver la primera a la urna. Si la primera bola ha sido roja, la probabilidad de que la segunda bola sea azul es:

a) $1/2$

b) 1

c) $4/9$

5.33 De una urna contiene 2 bolas azules, 2 rojas y 2 verdes, extraemos una bola al azar. Sea A el suceso "no es roja" y B el suceso "no es verde", la probabilidad $P(A \mid B)$ es igual a:

a) 0.25

b) 0.5

c) 1/3

5.34 De una urna que contiene 4 bolas azules y 5 rojas se extraen dos bolas, sucesivamente, sin devolver la primera a la urna. La probabilidad de que la segunda bola sea roja es:

a) $5/8$

b) $5/9$

c) $3/5$

5.35 De una urna que contiene 4 bolas rojas y 2 azules extraemos una bola y, sin devolverla a la urna, extraemos otra a continuación. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

a) $4/15$

b) $2/5$

c) $8/15$

5.36 Las monedas M_1 y M_2 son idénticas, salvo que M_1 tiene probabilidad 0.2 de salir cara, mientras que la probabilidad de salir cara al lanzar M_2 es 0.4. Elegimos una de las monedas al azar y la lanzamos, la probabilidad de que salga cara es:

a) 0.5

b) 0.4

c) 0.3

5.37 Tenemos tres urnas que contienen 3 bolas azules y 2 rojas la primera, 3 azules y 3 rojas la segunda, y 2 azules y 3 rojas la tercera. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, sucesivamente, sin devolver la primera a la urna. La probabilidad de obtener dos bolas azules es:

a) $1/5$

b) $2/5$

c) $3/5$

5.38 Si $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ y $P(A \mid B) = 0.2$, la probabilidad condicionada $P(B \mid A)$ es igual a:

a) 0.5

b) 0.25

c) 0.15

5.39 Las monedas M_1 y M_2 son idénticas, salvo que M_1 tiene probabilidad 0.2 de salir cara, mientras que la probabilidad de salir cara al lanzar M_2 es 0.4. Elegimos una de las monedas al azar y la lanzamos; si ha salido cara, la probabilidad de que se trate de la moneda M_2 es:

a) 0.6

b) 0.5

c) 2/3

5.40 De una urna que contiene 4 bolas azules y 5 rojas, extraemos dos bolas, sucesivamente, sin devolver la primera a la urna. Si la segunda bola ha sido roja, la probabilidad de que la primera haya sido azul es:

a) $1/2$

b) $5/8$

c) $5/9$

5.41 Tenemos tres urnas, la primera contiene 2 bolas azules; la segunda 1 bola azul y 1 roja; la tercera 2 bolas rojas. Elegimos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola extraída es roja, la probabilidad de que la tercera urna haya sido elegida es:

a) $1/2$

b) $2/3$

c) $3/4$

5.42 Si $P(A) = 0.2$ y $P(A \mid B) = 0.2$, se cumple:

a) los sucesos A y B son independientes

b) $P(A \mid B) = P(B \mid A)$

c) no pueden ser iguales esas probabilidades

5.43 Si $P(A) = P(A \mid B) = 0.2$, se cumple:

a) $P(B) = 0.2$

b) $P(B) = P(B \mid A)$

c) no pueden ser iguales esas probabilidades

5.44 Si A y B son sucesos independientes, con probabilidades respectivas $P(A) = 0.2$ y $P(B) = 0.3$, la probabilidad $P(A \cap B)$ es igual a:

a) 2/3

b) 0.06

c) 0.5

5.45 Si A y B son sucesos independientes, con probabilidades respectivas $P(A) = 0.2$ y $P(B) = 0.3$, la probabilidad condicionada $P(A \mid B^c)$ es igual a:

a) 0.2

b) 0.06

c) 0.14

5.46 La moneda M_1 está cargada de manera que al lanzarla, sale cara con probabilidad 0.4; La moneda M_2 está cargada de manera que al lanzarla, sale cara con probabilidad 0.6. Escogemos al azar una de las monedas y la lanzamos dos veces. La probabilidad de que salgan dos caras es:

a) 0.26

b) 0.25

c) 0.36

5.47 Sobre cuál de las siguientes características tiene sentido realizar un estudio estadístico:

a) el número de patas de las hormigas.

b) el grupo sanguíneo de los habitantes de Londres.

c) el tamaño de los planetas del sistema solar.

5.48 Sobre cuál de las siguientes características no tiene sentido realizar un estudio estadístico:

a) el nivel de renta de los hogares españoles.

b) la fertilidad de los delfines.

c) el número de átomos de las moléculas de agua.

5.49 Si para realizar un estudio estadístico se examinan un cierto número de individuos de una población, los individuos observados

a) constituyen una muestra de la población.

b) dan lugar a un censo de la población.

c) han de ser elegidos con cuidadosa precisión.

5.50 En un estudio estadístico, la observación de las características de los individuos de una muestra

a) da escasos indicios de las características globales del colectivo.

b) permite establecer conclusiones sobre las propiedades colectivas de los miembros de la población.

c) es conveniente, aunque sería preferible realizar un censo.

5.51 En un estudio estadístico, las variables estadísticas son

a) los atributos o magnitudes que se se observan en cada individuo.

b) principalmente la media y la varianza.

c) las frecuencias con las que aparece cada observación.

5.52 Una variable estadística que mide atributos cuyas modalidades no son numéricas se llama

a) cualitativa.

b) cuantitativa discreta.

c) cuantitativa continua.

5.53 ¿Qué variables no toman valores numéricos que pueden ser operados conforme a las reglas de la aritmética?.

a) Las variables de intervalo.

b) Las variables de razón.

c) Las variables nominales.

5.54 La fecha de caducidad de un producto farmacéutico es una variable

a) nominal.

b) ordinal.

c) cuantitativa.

5.55 El año de fabricación de un automóvil es una variable estadística

a) que se mide en escala de intervalos.

b) de tipo ordinal.

c) que se mide en escala de razón.

5.56 El latitud y el huso horario de un lugar son variables

a) cuantitativa y cualitativa respectivamente.

b) cuantitativas, continua y discreta respectivamente.

c) cuantitativa y ordinal respectivamente.

5.57 En una distribución de frecuencias relativas de una variable estadística cualitativa, la frecuencia relativa f_i de la modalidad x_i

a) es siempre mayor que 1.

b) es siempre menor o igual que 1.

c) puede ser mayor o menor que 1 según las características de la variable estadística considerada.

5.58 En una tabla de frecuencias, el cálculo de las frecuencias acumuladas tiene sentido

a) en cualquier caso.

b) si la variable es, por lo menos, ordinal.

c) sólo si la variable es cuantitativa.

5.59 En una tabla de frecuencias en la que aparecen las frecuencias relativas acumuladas

a) la suma de dichas frecuencias es 1.

b) la suma de dichas frecuencias es el número total de observaciones.

c) la última de dichas frecuencias es 1.

5.60 En un diagrama de sectores, que representa las frecuencias de distintas modalidades de una variable estadística, son proporcionales a cada frecuencia

a) los radios y los ángulos de los sectores.

b) los ángulos y las áreas de los sectores.

c) los radios y las áreas de los sectores.

5.61 Para representar la distribución de una variable estadística, en un histograma se representan

a) sólo las frecuencias de la variable.

b) sólo los valores de la variable.

c) los valores de la variable y sus frecuencias.

5.62 Para una variable estadística cuantitativa continua, la representación gráfica más adecuada de su distribución de frecuencias es

a) un diagrama de sectores.

b) un histograma con valores agrupados en intervalos.

c) un histograma sin necesidad de agrupar los valores en intervalos.

5.63 La media aritmética de una distribución de frecuencias absolutas de una variable estadística cuantitativa

a) coincide siempre con uno de los posibles valores de la variable.

b) nunca coincide con uno de los posibles valores de la variable.

c) puede coincidir o no con uno de los posibles valores de la variable.

5.64 Los salarios en euros de los 6 trabajadores de un taller son

1850	1690	1980	1590	2090	1780

Como 6 euros son 1000 de las antiguas pesetas, el salario medio de los trabajadores de la empresa es

a) 290500 pesetas.

b) 295000 pesetas.

c) 305000 pesetas.

5.65 La varianza de los salarios, en euros, de los 6 trabajadores de un taller es $s^2 = 28366.7$ euros^2. Como 6 euros son 1000 de las antiguas pesetas, la varianza de los salarios en pesetas es

a) 787963888.8.

b) 4727783.3.

c) 396345836.

5.66 La desviación típica de los salarios, en euros, de los 6 trabajadores de un taller es $s = 168.42$ euros. Como 6 euros son 1000 de las antiguas pesetas, la desviación típica de los salarios en pesetas es

a) 32600.

b) 28070.

c) 24480.

5.67 El coeficiente de variación de los salarios, en euros, de los 6 trabajadores de un taller es del 0.092. Como 6 euros son 1000 de las antiguas pesetas, el coeficiente de variación de los salarios en pesetas es

a) 15.33.

b) 0.092.

c) 1.533.

5.68 La media aritmética y la varianza de una serie de longitudes de tornillos, medidas en milímetros, son $\bar{x} = 17$ y $s^2 = 3.2$. Si se miden en centímetros, la media y la varianza serán

a) $\bar{x} = 1.7$ y $s^2 = 0.032$.

b) $\bar{x} = 1.7$ y $s^2 = 0.32$.

c) $\bar{x} = 170$ y $s^2 = 32$.

5.69 En una población, la temperatura máxima diaria, medida en grados centígrados, durante los últimos 36 días ha tenido un coeficiente de variación de 7.5 %. Si la temperatura se hubiese medido en grados Farenheit, relacionados con los grados centígrados por $F = 9/5\,C + 32$, el coeficiente de variación de los 36 datos sería

a) 7.5 %.

b) 13.5 %.

c) no hay datos suficientes para saberlo.

5.70 En una población, la temperatura máxima diaria, medida en grados centígrados, durante los últimos 36 días ha tenido una media de 27.6° y un coeficiente de variación de 7.5 %. Si la temperatura se hubiese medido en grados Farenheit, relacionados con los grados centígrados por $F = 9/5\,C + 32$, el coeficiente de variación de los 36 datos sería

a) 4.56 %.

b) 13.5 %.

c) no se puede saber.

SOLUCIONES DE LAS CUESTIONES DE AUTOEVALUACIÓN

5.1 *Respuesta correcta: c*

Sólo cuando ocurre (C)(C) obtenemos más caras que cruces; en los restantes casos posibles obtenemos tantas caras como cruces o menos caras que cruces.

5.2 *Respuesta correcta: c*

Lo contrario de tener alguna cara es tener ninguna, luego los dos resultados deben ser cruz.

5.3 *Respuesta correcta: a*

Para obtener al menos dos caras hay que obtener dos caras y una cruz u obtener tres caras.

5.4 *Respuesta correcta: b*

Lo contrario de tener alguna cara es no obtener caras, o bien, que todos los resultados sean cruces.

5.5 *Respuesta correcta: b*

No puede ser el suceso "obtener al menos dos caras o dos cruces", ya que este suceso es igual al espacio de posibilidades Ω, ya que si se lanza la moneda tres veces, siempre hay al menos dos resultados iguales. Tampoco es el suceso "que los tres resultados no sean iguales", ya que este contiene al resultado (C)(X)(C), que no está en nuestro suceso y, sin embargo, contiene al resultado (X)(X)(X).

El suceso es "obtener al menos dos resultados consecutivos iguales", formado por los resultados que tienen una racha de dos o tres resultados iguales.

5.6 *Respuesta correcta: c*

Para que no haya más caras que cruces, el número de cruces tiene que ser mayor o igual que el de caras, o bien, hay que obtener al menos tantas cruces como caras.

5.7 *Respuesta correcta: c*

No puede ser igual al suceso "el resultado del segundo lanzamiento es mayor que el primero", ya que, por ejemplo, no contiene al resultado ⚀⚁. Tampoco puede ser igual al suceso "los resultados de los dos lanzamientos son distintos", ya que, por ejemplo, no contiene al resultado ⚂⚁. Es igual al suceso "la diferencia entre el resultado del segundo lanzamiento y el del primero es 2", ya que todos sus elementos cumplen esta condición y contiene a todos los resultados que la verifican.

5.8 *Respuesta correcta: b*

El suceso $A \cap B$ ocurre cuando ocurren ambos sucesos simultáneamente; por ello, si sabemos que A ha ocurrido no podemos garantizar que $A \cap B$ haya ocurrido, ya que no sabemos si B ha ocurrido también.

El suceso A^c ocurre cuando A *no* ocurre; si sabemos que A ha ocurrido, podemos asegurar que A^c no ha ocurrido.

Por último, el suceso $A \cup B$ ocurre cuando alguno de los dos, A ó B, ocurren; si sabemos que A ha ocurrido, podemos asegurar que $A \cup B$ también ha ocurrido.

5.9 *Respuesta correcta: a*

Si el suceso $A \cap B^c$ ha ocurrido, entonces tanto A como B^c han ocurrido o, lo que es igual, A ha ocurrido y B no; también se sigue que no podemos asegurar que $A \cup B$ haya ha ocurrido, puede haber ocurrido o no.

5.10 *Respuesta correcta: c*

Si el suceso $A^c \cap B^c$ ha ocurrido, entonces tanto A^c como B^c no han ocurrido o, lo que es igual, A no ha ocurrido y B tampoco. Se sigue que $A \cap B^c$ no ha ocurrido, ya que A no lo ha hecho; también se sigue que $A \cap B$ no ha ocurrido, ya que ni A ni B han ocurrido; se sigue que $A \cup B$ no ha ocurrido, ya que ni A ni B han ocurrido.

5.11 *Respuesta correcta: b*

El suceso $A \cup B$ ocurre cuando alguno de los dos ocurre, luego al menos un resultado es cara.

5.12 *Respuesta correcta: c*

El suceso A = "obtener más de cuatro puntos" es igual a

$A = \{$ ⚄ , ⚅ $\}$

luego

$$P(A) = P(\text{⚄}) + P(\text{⚅}) = 0.2 + 0.2 = 0.4$$

5.13 *Respuesta correcta: a*

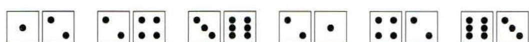
La suma de las probabilidades de los sucesos elementales debe ser igual a 1, luego se tiene que cumplir:

$$0.2 + 0.2 + 0.1 + P(\text{⚃}) + 0.3 + 0.1 = 1.0$$

luego $P(\text{⚃})$ tiene que ser igual a 0.1.

5.14 *Respuesta correcta: a*

Hay $6 \times 6 = 36$ casos posibles. Los casos favorables son seis:



Luego la probabilidad de $6/36 = 1/6$.

5.15 *Respuesta correcta: b*

Consideremos como espacio de posibilidades el formado por los cuatro resultados posibles de lanzar dos monedas:

$$\Omega = \{☺☺, ☺⊗, ⊗☺, ⊗⊗\}$$

Puesto que la moneda está equilibrada, todos los casos posibles tienen la misma probabilidad y el modelo es uniforme. Entre los cuatro casos hay tres favorables al suceso A = "obtener alguna cara",

$$A = \text{“obtener alguna cara”} = \{☺☺, ☺⊗, ⊗☺\}$$

De acuerdo con la regla de Laplace, la probabilidad del suceso es $3/4$.

Otro buen método para calcular esta probabilidad es hallar la probabilidad del suceso contrario. El suceso que nos interesa está formado por los casos que tienen una o dos caras, mientras que su contrario está formado por el caso que sólo tiene cruces. Calcular la probabilidad del suceso contrario supone aprovechar la sencillez de éste, frente a la mayor de complejidad del suceso A.

Un razonamiento equivocado es el siguiente: "Al lanzar dos veces la moneda pueden aparecer 0, 1 ó 2 caras, luego hay tres casos posibles; puesto que los dos casos 1 y 2, son favorables al suceso, la probabilidad es $2/3$." El error de este razonamiento está en suponer que los tres casos 0, 1 y 2 tienen la misma probabilidad, este modelo no es uniforme ya que hay dos maneras de tener una cara, que salga ☺⊗ o ⊗☺, mientras que sólo hay una manera de tener dos caras y sólo una de tener dos cruces.

5.16 *Respuesta correcta: c*

Consideremos como espacio de posibilidades el formado por los ocho resultados posibles de lanzar dos monedas.

$$\Omega = \{ ☺☺☺, ☺☺⊗, ☺⊗☺, ⊗☺☺, ☺⊗⊗, ⊗☺⊗, ⊗⊗☺, ⊗⊗⊗ \}$$

Puesto que el modelo es uniforme, todos los casos posibles tienen la misma probabilidad. Hay siete casos favorables al suceso "aparece alguna cara", luego su probabilidad es $7/8$. Otro método de cálculo es hallar la probabilidad del suceso contrario. El contrario de "aparece alguna cara" es "todos los resultados son cruz" que sólo tiene un caso favorable. La probabilidad del contrario es $1/8$ y la del suceso problema $1 - 1/8 = 7/8$.

5.17 *Respuesta correcta: a*

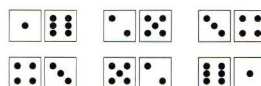
Consideremos como espacio de posibilidades el formado por los ocho resultados posibles de lanzar dos monedas.

$$\Omega = \{ ☺☺☺, ☺☺⊗, ☺⊗☺, ⊗☺☺, ☺⊗⊗, ⊗☺⊗, ⊗⊗☺, ⊗⊗⊗ \}$$

Puesto que el modelo es uniforme, todos los casos posibles tienen la misma probabilidad. El suceso contrario "no aparecen dos resultados iguales consecutivos" es mucho más simple, está formado por dos casos ☺⊗☺ y ⊗☺⊗. Así, la probabilidad del contrario es $2/8$ y la del suceso problema $1 - 2/8 = 6/8 = 3/4$.

5.18 *Respuesta correcta: a*

Hay $6 \times 6 = 36$ casos posibles, tantos como resultados distintos de los dos lanzamientos. Los casos favorables al suceso son seis:



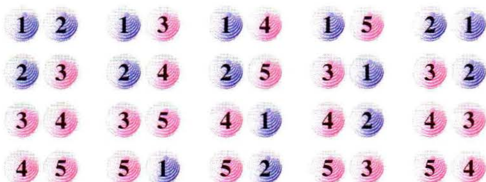
La probabilidad del suceso es $6/36 = 1/6$.

5.19 *Respuesta correcta: c*

El recurso de numerar las bolas sigue siendo útil para contar los casos sin equivocaciones. Supongamos que, además del color, las bolas se han numerado de 1 a 5 de la siguiente manera



Hay $5 \times 4 = 20$ casos posibles, que se representan por:



El suceso contrario es "que todas las bolas sean rojas" este suceso tiene $3 \times 2 = 6$ casos favorables, sus casos se representan por



La probabilidad del contrario es $6/20 = 0.3$, y la del suceso "que alguna bola sea azul" es $1 - 0.3 = 0.7$.

5.20 *Respuesta correcta: b*

Hay $5 \times 4 = 20$ casos posibles, ya que la primera bola puede ser elegida entre $3 + 2 = 5$ bolas que hay en la urna, y la segunda bola entre las $3 + 2 - 1 = 4$ bolas que hay en la urna después de extraer la primera. Si suponemos que, además del color, las bolas se han numerado y están marcadas de 1 a 5,



Para que las dos bolas sean de distinto color, la primera tiene que ser azul y la segunda roja o bien, la primera roja y la segunda azul. Hay $3 \times 2 = 6$ casos favorables a que la primera sea azul y la segunda roja. De manera exhaustiva, esos seis casos se representan:



De manera similar, hay $2 \times 3 = 6$ casos favorables a que la primera sea roja y la segunda azul, que se representan:



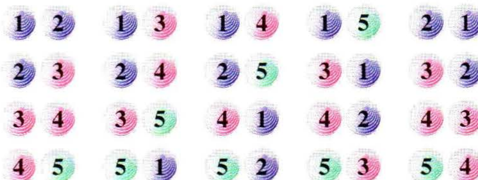
La probabilidad del suceso es $12/20 = 3/5$.

5.21 *Respuesta correcta: c*

Supongamos que, además del color, las bolas se han numerado de 1 a 5 de la siguiente manera



Hay $5 \times 4 = 20$ casos posibles, que se representan por:



Para que la bola verde sea elegida, o bien la primera es verde y la segunda no, lo que tiene $1 \times 4 = 4$ casos,



o bien la primera no es verde y la segunda sí, lo que tiene $4 \times 1 = 4$ casos .



En total hay 8 casos favorables y la probabilidad del suceso "la bola verde está entre las elegidas" es $8/20 = 0.4$.

5.22 *Respuesta correcta: a*

Al lanzar dos veces el dado hay $6 \times 6 = 36$ casos posibles. Por ejemplo, el par ⚁ ⚃ es uno de esos 36 casos posibles. De estos 36 casos, 15 son favorables a que el primer resultado sea mayor que el segundo, por ejemplo, ⚄ ⚃; en 6 casos hay un empate y en 15 el resultado del segundo es mayor que el primero. La probabilidad pedida es $15/36 = 5/12$.

5.23 *Respuesta correcta: b*

Hay $5 \times 4 = 20$ casos posibles. Puesto que los números no pueden repetirse, por cada caso en que la primera bola tiene un número mayor que la segunda hay otro caso,

su simétrico, en que la segunda bola tiene un número mayor que la primera. Por ejemplo, por el caso 3 2 es favorable al suceso del problema, y su caso simétrico 2 3 no lo es. Si por cada caso favorable hay uno desfavorable y al revés, la mitad de los casos posibles tienen que ser favorables y la otra mitad desfavorables. La probabilidad pedida es $10/20 = 1/2$.

5.24 *Respuesta correcta: a*

De la definición de probabilidad condicionada, se sigue

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

5.25 *Respuesta correcta: b*

De la definición de probabilidad condicionada, se sigue

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12$$

5.26 *Respuesta correcta: b*

Por la definición de probabilidad condicionada, se tiene

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ahora, $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = 0.04$, luego $P(B \mid A) = 0.04/0.2 = 0.2$.

5.27 *Respuesta correcta: a*

De la definición de probabilidad condicionada, se sigue

$$P(A \mid B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

Ahora, $P(B^c) = 1 - P(B) = 0.7$, y

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.1$$

Así resulta

$$P(A \mid B^c) = \frac{0.1}{0.7} = \frac{1}{7}$$

5.28 *Respuesta correcta: b*

Pongamos que A y B son los sucesos

A = "los dos resultados son cara"

y

B = "ha aparecido alguna cara

La probabilidad que hay que calcular es $P(A \mid B)$. La probabilidad de B se calcula fácilmente.

$$P(B) = P(\{⊙⊙, ⊛⊙, ⊙⊛\}) = \frac{3}{4}$$

Por otra parte, se tiene

$$P(A \cap B) = P(\{⊙⊙\}) = \frac{1}{4}$$

La probabilidad pedida es igual a:

$$P(A \mid B) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

5.29 *Respuesta correcta: a*

Entre azules y rojas hay 5 bolas, de las cuales 2 son rojas. Si se elige una bola al azar y no es verde, puede ser cualquiera de esas cinco bolas con igual probabilidad; luego la probabilidad de que sea roja es $2/5$.

Con fórmulas, se razona así: pongamos que A = "la bola es roja" y B = "la bola no es verde"; se tiene $P(B) = 5/6$, ya que de las seis bolas, cinco no son verdes; y $P(A \cap B) = 2/6$, ya que de las seis bolas, dos son rojas y, desde luego, no son verdes. Se sigue

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/6}{5/6} = \frac{2}{5}$$

5.30 *Respuesta correcta: b*

Pongamos A = "el primer resultado es 6" y B = "el primer resultado es mayor que el segundo"; hay $6 \times 6 = 36$ casos posibles de lanzar dos veces el dado, por ejemplo, el par ⚁ ⚃ es uno de esos 36 casos posibles. De estos 36 casos, 15 son favorables a que el primer resultado sea mayor que el segundo; por ejemplo, ⚄ ⚃ es uno de esos resultados; así se tiene $P(B) = 15/36$. Los casos favorables a que el primer resultado sea 6 y

que sea mayor que el segundo son cinco; así se tiene $P(A \cap B) = 5/36$. La probabilidad pedida es igual a

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/36}{15/36} = \frac{5}{15}$$

o bien $1/3$.

5.31 *Respuesta correcta: b*

Solución directa: de los $6 \times 6 = 36$ resultados posibles de lanzar dos veces un dado, hay 6 casos en los que la suma de los resultados es igual a 7.



Estos 6 casos son igualmente probables. Sólo uno de ellos es favorables a que el primer resultado sea 6, luego la probabilidad es $1/6$.

Solución formal: pongamos $A =$ "el primer resultado es 6" y $B =$ "la suma es 7"; hay $6 \times 6 = 36$ casos posibles de lanzar dos veces el dado; de estos 36 casos, 6 son favorables a que la suma sea 7; así, se tiene $P(B) = 6/36$. Sólo hay un caso favorable a que el primer resultado sea 6 y que la suma sea 7; así, se tiene $P(A \cap B) = 1/36$. La probabilidad pedida es igual a

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}$$

5.32 *Respuesta correcta: a*

Solución directa: si la primera ha sido roja, quedan cuatro azules y cuatro rojas en la urna. La probabilidad de que la próxima bola sea azul es $4/8 = 1/2$.

Solución formal: pongamos $A =$ "la segunda bola es azul" y $B =$ "la primera bola es roja". hay 9×8 casos posibles de extraer dos bolas, sin devolver la primera a la urna; de estos casos, 5×8 son favorables a que la primera bola sea roja (y la segunda de cualquier color); así, se tiene $P(B) = 40/72$. El número de casos favorables a que la primera bola sea roja y la segunda azul son 5×4; así, se tiene $P(A \cap B) = 20/72$. La probabilidad pedida es igual a

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{20/72}{40/72} = \frac{20}{40}$$

o bien $1/2$.

5.33 *Respuesta correcta: b*

Hay 6 casos posibles; cuatro casos son favorables a B y $P(B) = 4/6$. El suceso $A \cap B$ es "la bola es azul", tiene 2 casos favorables y $P(A \cap B) = 2/6$. La probabilidad condicionada es igual a

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/6}{4/6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

El razonamiento directo, en este caso, es más elemental; si sabemos que la bola extraída no es roja, hay 4 casos posibles, todos con igual probabilidad, y 2 casos favorables. La probabilidad es $2/4 = 0.5$.

5.34 *Respuesta correcta: b*

La primera bola puede ser o bien azul, con probabilidad $P(A_1) = 4/9$, o bien roja, con probabilidad $P(R_1) = 5/9$. En el primer caso, en la urna quedan 3 bolas azules y 5 rojas, así que la probabilidad de que la segunda bola sea roja si la primera fue azul es $P(R_2 \mid A_1) = 5/8$; en el segundo caso, cuando la primera es roja, quedan cuatro de cada color y $P(R_2 \mid R_1) = 1/2$. Según la fórmula de las probabilidades totales, se tiene

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(A_1)P(R_2 \mid A_1) + P(R_1)P(R_2 \mid R_1) \\ &= \frac{4}{9}\frac{5}{8} + \frac{5}{9}\frac{1}{2} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

También puede hacerse un razonamiento directo: hay 9×8 casos posibles para las dos bolas extraídas. El número de casos en los que la segunda bola es roja es 8×5, ya que la segunda bola debe ser una de la cinco rojas, y la primera bola puede ser cualquiera distinta de la primera. La probabilidad es $40/72 = 5/9$.

5.35 *Respuesta correcta: c*

Solución mediante la fórmula de la probabilidad total: pongamos $A =$ "las bolas son de distinto color". Si la primera bola es roja, lo que tiene probabilidad $P(R_1) = 4/6$, la probabilidad de que la segunda sea de distinto color que la primera es $P(A \mid R_1) = 2/5$. Si la primera bola es azul, lo que tiene probabilidad $P(A_1) = 2/6$, la probabilidad de que la segunda sea de distinto color que

la primera es $P(A \mid A_1) = 4/5$ La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(R_1)P(A \mid R_1) + P(A_1)P(A \mid A_2) \\ &= \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Solución directa: hay 6×5 casos posibles. Para que sean de distinto color, o la primera es roja y la segunda es azul, lo que tiene 4×2 casos favorables, o la primera es azul y la segunda es roja, lo que tiene 2×4 casos favorables. El número total de casos favorables es 16 y la probabilidad es $16/30 = 8/15$.

5.36 *Respuesta correcta: c*

Pongamos $C =$ "sale cara". Si se lanza la moneda M_1, lo que ocurre con probabilidad $P(M_1) = 1/2$, entonces la probabilidad de obtener cara es $P(C \mid M_1) = 0.2$. Si se lanza la moneda M_2, lo que ocurre con probabilidad $P(M_2) = 1/2$, entonces la probabilidad de obtener cara es $P(C \mid M_2) = 0.4$. La probabilidad de obtener cara es:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(M_1)P(C \mid M_1) + P(M_2)P(C \mid M_2) \\ &= 0.5\cdot 0.2 + 0.5\cdot 0.4 \end{aligned}$$

es decir $P(C) = 0.3$.

5.37 *Respuesta correcta: a*

En otra aplicación de la fórmula de la probabilidad total. Pongamos que A es el suceso "las dos bolas son azules". Las bolas se extraen de la primera urna con probabilidad $P(U_1) = 1/3$; cuando esto sucede, la probabilidad de extraer dos bolas azules es

$$P(A \mid U_1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

Las bolas se extraen de la segunda urna con probabilidad $P(U_2) = 1/3$; cuando esto sucede, la probabilidad de extraer dos bolas azules es

$$P(A \mid U_2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

Por último, Las bolas se extraen de la tercera urna con probabilidad $P(U_3) = 1/3$; cuando esto sucede, la probabilidad de extraer dos bolas azules es

$$P(A \mid U_3) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

La probabilidad total de obtener dos bolas azules es

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10} = \frac{2}{10}$$

luego la probabilidad es $1/5$.

5.38 *Respuesta correcta: b*

De acuerdo con la regla de Bayes, se tiene

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)}$$

Basta reemplazar los datos, para obtener

$$P(B \mid A = \frac{0.10}{0.4} = 0.25$$

5.39 *Respuesta correcta: c*

Es una aplicación de la fórmula de Bayes. Los datos son las probabilidades condicionadas de obtener cara en cada moneda

$$P(C \mid M_1) = 0.2, \qquad P(C \mid M_2) = 0.4$$

y las probabilidades previas de elegir cada una de las monedas, $P(M_1) = 0.5$, $P(M_2) = 0.5$. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda elegida al azar entre M_1 y M_2 es

$$P(C) = 0.5\cdot 0.2 + 0.5\cdot 0.4 = 0.3$$

La probabilidad posterior de que se trate de la moneda M_2 es

$$\begin{aligned} P(M_2 \mid C) &= \frac{P(M_2)P(C \mid M_2)}{P(C)} \\ &= \frac{0.5\cdot 0.4}{0.3} \\ &= \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

5.40 *Respuesta correcta: a*

La probabilidad de que la primera bola sea azul es $P(A_1) = 4/9$, y la probabilidad de que la segunda bola

sea roja si la primera fue azul es $P(R_2 \mid A_1) = 5/8$. La probabilidad de que la primera bola sea roja es $P(R_1) = 5/9$, y la probabilidad de que la segunda bola sea roja si la primera fue roja es $P(R_2 \mid R_1) = 4/8$. La probabilidad de que la segunda bola sea roja es:

$$P(R_2) = P(A_1)P(R_2 \mid A_1) + P(A_1)P(R_2 \mid A_1) = \frac{5}{9}$$

De acuerdo con la fórmula de Bayes, se tiene

$$\begin{aligned} P(A_1 \mid R_2) &= \frac{P(A_1)P(R_2 \mid A_1)}{P(R_2)} \\ &= \frac{4/9 \cdot 5/8}{5/9} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5.41 *Respuesta correcta: b*

Pongamos que U_i = "la urna i es elegida", para $i = 1, 2, 3$, y B = "la bola es roja". Se trata de calcular $P(U_3 \mid B)$. Por la fórmula de Bayes, se tiene

$$P(U_3 \mid B) = \frac{P(U_3)P(B \mid U_3)}{P(B)}$$

Puesto que las urnas se eligen al azar, se tiene

$$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$$

Ahora, la urna U_1 no contiene bolas rojas, luego $P(B \mid U_1) = 0$; de manera similar, obtenemos $P(B \mid U_2) = 1/2$ y $P(B \mid U_3) = 1$. De la fórmula de la probabilidad total, resulta

$$\begin{aligned} P(B) &= P(U_1)P(B|U_1) + P(U_2)P(B|U_2) + P(U_3)P(B|U_3) \\ &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Si reemplazamos en la fórmula de Bayes, obtenemos

$$P(U_3 \mid B) = \frac{P(U_3)P(B \mid U_3)}{P(B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Este resultado puede razonarse directamente. Imaginemos que las bolas de las urnas están numeradas como se muestra a continuación:



Si sabemos que la bola elegida es roja, no sabemos exactamente cuál es, pero hay tres casos posibles:



que tienen la misma probabilidad. De los tres casos, dos son favorables a que la urna elegida sea la tercera y uno a que sea la segunda. Luego la probabilidad es $2/3$.

5.42 *Respuesta correcta: a*

La intuición es clara: si saber que B ha ocurrido no altera la probabilidad de que A ocurra, entonces sucesos son independientes.

La comprobación aritmética es simple, se tiene

$$P(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B}{P(B)}$$

luego $P(A)P(B) = P(A \cap B)$ y los sucesos son independientes.

5.43 *Respuesta correcta: b*

Puesto que saber que B ha ocurrido no altera la probabilidad de que A ocurra, los sucesos A y B son independientes, y por ello, se tiene $P(B) = P(B \mid A)$. Sin embargo, no hay ninguna razón para que $P(B) = 0.2$, por lo que la alternativa (a) no es cierta.

5.44 *Respuesta correcta: b*

De la definición de independencia de sucesos, se sigue

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

luego la probabilidad es $0.2 \times 0.3 = 0.06$.

5.45 *Respuesta correcta: a*

De la definición de independencia de sucesos, se sigue

$$P(A \mid B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

Ahora, $P(B^c) = 1 - P(B) = 0.7$. Por otra parte, tenemos

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B),$$

pero, puesto que los sucesos son independientes, se cumple $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.06$, luego $P(A \cap B^c) = 0.2 - 0.06 = 0.14$. Así resulta

$$P(A \mid B^c) = \frac{0.14}{0.7} = 0.2$$

Observemos que $P(A \mid B^c) = P(A)$, lo que indica que A también es independiente de B^c.

5.46 *Respuesta correcta: a*

Es una aplicación de la probabilidad total y de la independencia de los sucesivos resultados de lanzar la moneda. Si la moneda elegida es M_1, la probabilidad de obtener dos caras es

$$P(\circledcirc\circledcirc \mid M_1) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$$

Si se elige M_2, la probabilidad de obtener dos caras es

$$P(\circledcirc\circledcirc \mid M_1) = 0.6 \times 0.6 = 0.36$$

Cada moneda puede ser elegida con igual probabilidad. En resumen, tenemos

$$\begin{aligned} P(\circledcirc\circledcirc) &= P(M_1)P(\circledcirc\circledcirc \mid M_1) + P(M_2)P(\circledcirc\circledcirc \mid M_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.16 + \frac{1}{2} \cdot 0.36 \end{aligned}$$

es decir, $P(\circledcirc\circledcirc) = 0.26$.

5.47 *Respuesta correcta: b*

Las hormigas tienen todas 6 patas y planetas en el sistema solar hay exactamente 9, con tamaños cuyo valor permanente es conocido. En cambio, los habitantes de Londres se cuentan por millones y el grupo sanguíneo varía de unos individuos a otros.

5.48 *Respuesta correcta: c*

Todas las moléculas de agua tienen dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno.

5.49 *Respuesta correcta: a*

Para disponer de un censo es necesario observar las características de *todos* los individuos de una población. La muestra es el conjunto de individuos de la población cuyas características se observan. Y, en la inmensa mayoría de los estudios estadísticos, los individuos que componen la muestra observada se seleccionan al azar.

5.50 *Respuesta correcta: b*

Un estudio estadístico, bien realizado, sobre una muestra adecuada de una población da información bastante precisa de las características colectivas (aunque no individuales) de todos los miembros de la población. La realización de un censo tiene normalmente un coste prohibitivo, contiene un volumen de datos muy difícil de manejar y, debido al tiempo que requiere su análisis, proporciona casi siempre información desactualizada. En general, el análisis estadístico de una muestra es mucho más económico, ágil e incluso fiable.

5.51 *Respuesta correcta: a*

Cada uno de los rasgos, atributos o magnitudes, que se observan en cada individuo de la muestra seleccionada, constituyen las variables estadísticas del estudio. Para analizar cada variable estadística, se agrupa en modalidades o valores y se estudian las frecuencias con las que se presenta cada valor o modalidad. La media y la varianza son resúmenes de la distribución de frecuencias y sólo tienen sentido en el caso de variables cuantitativas.

5.52 *Respuesta correcta: a*

Las variables que no toman valores numéricos se dicen *cualitativas*.

5.53 *Respuesta correcta: c*

Tanto las variables de intervalo como las de razón toman, por definición, valores numéricos con los que tiene sentido realizar operaciones aritméticas. Los valores de las variables nominales son meras etiquetas para las cuales carecen de sentido las operaciones aritméticas.

5.54 *Respuesta correcta: b*

Las fechas de caducidad pueden ordenarse, pero no operarse aritméticamente.

5.55 *Respuesta correcta: a*

El año de fabricación es un dato numérico que no sólo puede ordenarse sino operarse para conocer, por ejemplo, la diferencia de antigüedad. Sin embargo, en la escala temporal el origen tiene una carácter relativo.

5.56 *Respuesta correcta: b*

La latitud es desde luego una variable cuantitativa y continua, puesto que puede medirse con la precisión que se desee. El huso horario es una división de las posibles longitudes geográficas en 24 franjas, numeradas de -12 a 12 respecto a un origen fijado por convenio en

el meridiano de Greenwich. Es pues una variable cuantitativa discreta que se mide en una escala de intervalos, puesto que el origen tiene un carácter relativo pero se pueden restar los valores correspondientes a dos lugares para conocer la diferencia horaria entre ellos.

5.57 *Respuesta correcta: b*

La frecuencia relativa de la modalidad x_i se define como $f_i = \frac{n_i}{N}$, siendo n_i la frecuencia absoluta de la modalidad x_i y N la suma de las frecuencias absolutas de todas las modalidades de la variable, es decir, $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Entonces, es claro que $f_i \leq 1$ cualquiera que sea el índice $i = 1, \ldots, k$.

5.58 *Respuesta correcta: b*

Las frecuencias acumuladas dependen del orden en que aparezcan los valores. Estos han de tener, al menos un orden o, si no, las frecuencias acumuladas pueden alterarse cambiando el orden de los valores.

5.59 *Respuesta correcta: c*

Las frecuencias relativas de cada valor suman 1. Pero las frecuencias relativas acumuladas crecen hasta alcanzar el valor 1 en el último valor.

5.60 *Respuesta correcta: b*

En un diagrama de sectores el radio es constante. Los ángulos y, por tanto, las áreas son proporcionales a las frecuencias.

5.61 *Respuesta correcta: c*

En un histograma, el eje de abscisas contiene los valores de la variable. El eje de ordenadas mide las frecuencias con las que se presenta cada valor o intervalo de valores de la variable, supuesto que los intervalos de clase en que se agrupan los valores de la variable tengan todos la misma amplitud. En caso contrario, es el área de cada barra la que es proporcional a la frecuencia y no su altura.

5.62 *Respuesta correcta: b*

Una variable cuantitativa de tipo continuo puede tomar cualquier valor dentro de un determinado rango; por tanto las frecuencias de cada valor serán generalmente bajas y conviene agrupar los valores en intervalos para que el diagrama indique frecuencias más significativas. Puede construirse un diagrama de sectores con las frecuencias de los diversos intervalos, pero el diagrama dará escasa indicación de la variación de la frecuencia con el tamaño de la variable, cuyos valores tienen un orden muy relevante.

5.63 *Respuesta correcta: c*

La media puede tomar uno de los valores de la variable, como se ve en el siguiente ejemplo. Supongamos que los valores de la variable x son 1, 2, 3, 4, 5, cada uno de ellos con frecuencia 1. Entonces

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

y es igual a uno de los valores de la variable. En general, puede ocurrir que la media no tome ninguno de los valores de la variable. Por ejemplo, si los valores de la variable anterior fuesen 1, 2, 3, 4, 6, entonces la media sería:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+6}{5} = 3.2$$

5.64 *Respuesta correcta: c*

Al cambiar la unidad de medida, la media cambia proporcionalmente. En euros, el salario medio es

$$\frac{1850+1690+1980+1590+2090+1780}{6} = \frac{10980}{6} = 1830 \text{ euros}$$

que son $1830 \cdot (1000/6) = 305000$ pesetas. Los salarios en pesetas son

308333	281666	330000	265000	348333	296666

cuya media, en pesetas, resulta

$$\frac{308333+281666+330000+265000+348333+296666}{6} = $$
$$= 304999.66$$

con un ligero error debido al redondeo.

5.65 *Respuesta correcta: a*

La varianza cambia proporcionalmente al cuadrado de la escala. De modo que la varianza equivale a $28366.7(1000/6)^2 = 787963888.8$ pesetas^2. Los seis salarios, en euros, de la cuestión anterior dan como valor de la varianza 28366.7 euros^2. Los seis salarios,

en pesetas, proporcionan una varianza de 787761481 pesetas^2 al calcular

$$\frac{308333^2+281666^2+330000^2+265000^2+348333^2+296666^2}{6}-305000^2.$$

Hay un error de redondeo por aproximar los salarios en pesetas.

5.66 *Respuesta correcta: b*

La desviación típica cambia proporcionalmente al factor de escala. Luego la desviación típica en pesetas es $168.42(1000/6) = 28070$ pesetas. La raíz cuadrada de la varianza de los salarios en pesetas, calculada en la cuestión anterior, da 28067 pesetas.

5.67 *Respuesta correcta: b*

La media y la desviación típica cambian proporcionalmente a la escala. Por consiguiente su cociente $s/\bar{x}$ es invariable por cambios de escala.

5.68 *Respuesta correcta: a*

Un centímetro son 10 milímetros, de modo que la escala se divide por 10. Ello supone dividir la media por 10 y la varianza por 100.

5.69 *Respuesta correcta: c*

La relación entre las desviaciones típicas, en grados Farenheit y en grados centígrados, es $s_F = 9/5\, s_C$. Por otro lado, la media en grados Farenheit se obtiene mediante la expresión $\bar{x}_F = 9/5\, \bar{x}_C + 32$, a partir de la media $\bar{x}_C$ en grados centígrados. El coeficiente de variación en grados Farenheit:

$$\frac{s_F}{\bar{x}_F} = \frac{9/5\, s_C}{9/5\bar{x}_C + 32}$$

no queda determinado por el coeficiente de variación en grados centígrados: $s_C/\bar{x}_C$.

5.70 *Respuesta correcta: a*

En grados centígrados, la desviación típica de las 36 medidas es $s_C = 0.075\bar{x}_C = 2.07°$. La media de los 36 datos, expresados en grados Farenheit, es $\bar{x}_F = 9/5\bar{x}_C + 32 = 81.68$ y su desviación típica $s_F = 9/5 s_C = 3.726$. Por consiguiente, en grados Farenheit, el coeficiente de variación vale $s_F/\bar{x}_F = 3.726/81.68 = 0.0456$

TEMAS COMPLEMENTARIOS

5.7 COMBINATORIA

En matemáticas con frecuencia se presentan conjuntos demasiado grandes para que sea posible hacer una relación completa de sus elementos, pero que obedecen a unas reglas de formación fijas que permiten construir procedimientos mentales para saber cuántos son, sin necesidad de enumerarlos. Tales procedimientos se denominan **métodos combinatorios** y se describen a continuación.

5.7.1 MÉTODOS GENERALES

Estudiamos en este apartado dos métodos que son válidos, en general, para calcular el cardinal de un conjunto cualquiera.

MÉTODO 1: REGLA DE LA APLICACIÓN BIYECTIVA

Para hallar el cardinal de un conjunto basta establecer una aplicación biyectiva *entre sus elementos y los elementos del conjunto* $\{1,2,\ldots,n\}$. *Si ello es posible, entonces el cardinal del conjunto es* n. 5.62

EJEMPLO 5.58 Para saber cuántos números enteros hay entre 3 y 25, ambos incluidos, basta establecer la correspondencia biyectiva

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 4 & 5 & \ldots\ldots & 24 & 25 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & 22 & 23 \end{array}$$

para concluir que son 23 números.

Una consecuencia del método anterior, con importante utilidad práctica es la siguiente. Sean m,n dos números enteros tales que $m \leq n$. Entonces, al conjunto: $\{\, m, m+1, m+2, \ldots, n-1, n\}$ de los enteros comprendidos entre m y n, ambos incluidos, se le puede transformar de manera biyectiva en el conjunto: $\{\, 1, 2, 3, \ldots, n-m+1\}$ mediante la transformación *"restar* $m-1$ *unidades a cada elemento"*. Esta transformación es la siguiente:

$$\begin{array}{cccc} m=(m-1)+1 & m+1=(m-1)+2 & \cdots & n=m+n-m \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & \cdots & n-m+1 \end{array}$$

Se tiene así:

El conjunto de los números enteros $\{m, m+1, m+2, \ldots, n\}$ *tiene* $n-m+1$ *elementos. Dicho de otra manera, entre* m *y* n*, ambos incluidos, hay* $n-m+1$ *números enteros.* 5.63

EJEMPLO 5.59 Entre 1624 y 12805, ambos incluidos, hay $12805 - 1624 + 1 = 11182$ números.

Razonamientos semejantes al anterior pueden emplearse en muchas situaciones similares.

EJEMPLO 5.60 Si se quiere contar cuántos múltiplos de 7 están comprendidos entre 39 y 157, la transformación biyectiva:

$$\begin{array}{ccccc} 42 = 7(5+1), & 49 = 7(5+2), & 56 = 7(5+3), & \ldots\ldots & 154 = 7(5+17) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & 17 \end{array}$$

permite concluir que son 17.

EJEMPLO 5.61 Para saber cuántos cuadrados perfectos hay con tres cifras significativas, sólo hay que observar la transformación:

$$\begin{array}{ccccc} 100 = (9+1)^2 & (9+2)^2 & (9+3)^2 & \ldots\ldots & (9+22)^2 = 961 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & 22 \end{array}$$

para afirmar que hay 22 cuadrados perfectos con tres cifras.

EJEMPLO 5.62 Con frecuencia, no es tan evidente qué transformación biyectiva debe emplearse. Este ejemplo es muy ilustrativo. En cada eliminatoria de un campeonato de tenis se forma el mayor número de parejas posible; tras jugar el correspondiente partido, el ganador se clasifica para la siguiente ronda y el perdedor queda eliminado. Si en alguna eliminatoria el número de participantes es impar, uno de ellos —elegido como sea— pasa sin jugar a la fase siguiente. ¿Cuántos partidos se juegan en el campeonato, si se han inscrito 85 jugadores?

En la primera ronda se juegan 42 partidos, resultan 42 jugadores eliminados y los otros 43 pasan a la siguiente ronda. Esta consta de 21 partidos y la superan 22 jugadores. Los 11 partidos de la tercera ronda dejan 11 participantes; los 5 partidos de la cuarta ronda, 6 jugadores; los 3 partidos de la quinta, 3 jugadores; uno quedará eliminado en la sexta y, por último, la final. En total

$$42 + 21 + 11 + 5 + 3 + 1 + 1 = 84 \text{ partidos jugados.}$$

Pero la enumeración anterior es como contar con los dedos. Lo ingenioso es establecer una correspondencia biyectiva entre los partidos jugados y los jugadores eliminados. De hecho, ¿para qué se juega un partido?... para que un jugador quede eliminado; además todo jugador, salvo el ganador, es eliminado en algún partido. Hay pues una biyección entre los partidos jugados y los jugadores eliminados. Y, como consecuencia, hay tantos partidos jugados como jugadores eliminados. Pero el conjunto de jugadores eliminados se cuenta inmediatamente: son eliminados todos menos el ganador. De manera que la biyección observada establece, de manera

muy simple, un resultado general: Si en la competición se inscriben n jugadores se juegan $n-1$ partidos.

En muchas ocasiones, el conjunto cuyo cardinal se quiere hallar no es biyectivo con ningún conjunto de estructura más simple que él mismo; ni está ordenado, ni puede ordenarse de ninguna manera que facilite su recuento. En estos casos, para calcular el cardinal puede utilizarse la denominada **regla de la multiplicación**.

MÉTODO 2: REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN

Si el conjunto A tiene n elementos y el conjunto B tiene m elementos, el número de elecciones distintas de un elemento de A y otro de B es $n \cdot m$. 5.64

EJEMPLO 5.63 Tres ciudades X, Y y Z está comunicadas por carreteras en la forma representada en la figura 5.11. El número de rutas distintas que conducen de X a Y es 5; y de Y a Z hay 3. Luego el número de itinerarios distintos que lleva de X a Z es $5 \cdot 3$.

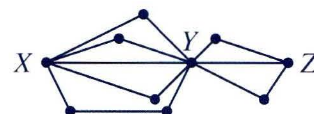


Figura 5.11: Mapa de carreteras de tres ciudades.

Con la sencilla regla anterior pueden efectuarse multitud de recuentos, mediante un **procedimiento constructivo**, consistente en recorrer mentalmente los pasos que hay seguir para formar todos los elementos del conjunto, anotando las alternativas que pueden elegirse en cada uno. Una situación típica en que es muy útil el procedimiento constructivo es la siguiente. Supongamos que deseamos saber cuántas palabras distintas de cinco letras diferentes, con o sin sentido, pueden formarse con las letras A, E, I, L, M, N, P, de forma que haya una vocal en la primera posición.

Vamos a escribir todas las palabras posibles, rellenando los lugares correspondientes.

$$_\ \ _\ \ _\ \ _\ \ _$$

La primera letra debe ser vocal, luego hay tres elecciones posibles (A, E, I).

$$\underbrace{_}_{3}\ \ _\ \ _\ \ _\ \ _$$

La segunda letra debe ser distinta de la primera; sea cual sea la elegida para la primera posición, quedan 6 posibilidades.

$$\underbrace{_}_{3}\ \ \underbrace{_}_{6}\ \ _\ \ _\ \ _$$

Elegidas la primera y la segunda, independientemente del resultado, hay cinco elecciones posibles para la tercera.

$$\underbrace{_}_{3}\ \ \underbrace{_}_{6}\ \ \underbrace{_}_{5}\ \ _\ \ _$$

En la cuarta posición pueden figurar cualquiera de las cuatro letras que todavía no hayan sido utilizadas.

$$\underbrace{_}_{3}\ \ \underbrace{_}_{6}\ \ \underbrace{_}_{5}\ \ \underbrace{_}_{4}\ \ _$$

Y en la última posición quedan tres posibilidades.

$$\underbrace{_}_{3}\ \ \underbrace{_}_{6}\ \ \underbrace{_}_{5}\ \ \underbrace{_}_{4}\ \ \underbrace{_}_{3}$$

En definitiva, el número de palabras pedido es

$$3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1\,080$$

La lista efectiva resultaría interminable.

Si en el ejemplo anterior el enunciado hubiese especificado que debía ser vocal la tercera letra, en vez de la primera, la estrategia de enumeración es ligeramente diferente. Si se procede por orden —como se ha hecho—, en el momento de elegir la tercera letra, el número de vocales de que dispondremos dependerá del número de vocales consumidas en las dos primeras elecciones. Un examen de los casos a que ello da lugar parece complicado. Conviene aplicar por ello el principio siguiente:

MÉTODO CONSTRUCTIVO CON CONDICIONES

5.65 *En el procedimiento constructivo es necesario empezar la construcción por las* casillas *que estén sometidas a mayor número de condiciones.*

El recuento es entonces el mismo que en el caso anterior y el resultado idéntico.

$$\underbrace{_}_{6}\quad\underbrace{_}_{5}\quad\underbrace{_}_{3}\quad\underbrace{_}_{4}\quad\underbrace{_}_{3}$$

Muchos problemas combinatorios pueden reducirse a la construcción de todas las "palabras", formadas con símbolos dados, que cumplen ciertas restricciones y pueden resolverse, como se ha indicado, simulando la construcción exhaustiva y determinando, paso a paso, cuantas elecciones son posibles para cada posición de la palabra.

EJEMPLO 5.64 ¿Cuántos números de tres cifras, mayores que 500 y pares se pueden escribir con los dígitos 2, 3, 4, 5 y 6?

Un número de tres cifras es una "palabra" de tres "letras" elegidas entre las que se indican. Sin embargo, una diferencia primordial con los casos anteriores es que ahora las cifras no han de ser necesariamente distintas. Observado esto, puede comenzarse el recuento:

El primer dígito ha de ser 5 ó 6, a fin de que el número sea mayor que 500,

$$\underbrace{_}_{2}\quad_\quad_$$

La última cifra se puede elegir de 3 maneras (2, 4 ó 6) para que el número sea par,

$$\underbrace{_}_{2}\quad_\quad\underbrace{_}_{3}$$

La segunda cifra puede ser cualquiera, luego hay 5 elecciones posibles,

$$\underbrace{_}_{2}\quad\underbrace{_}_{5}\quad\underbrace{_}_{3}$$

Así pues, se pueden formar $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$ números con las características solicitadas.

5.7.2 MÉTODOS PARTICULARES

Entre los problemas combinatorios hay algunos que se repiten con gran frecuencia; reciben por ello los nombres propios de **permutaciones**, **variaciones** y **combinaciones** y se ha acordado para resolverlos emplear una simbología especial. A ellos se dedican los tres apartados siguientes.

PERMUTACIONES

En primer lugar, si se trata de saber de cuántas maneras pueden ordenarse n objetos diferentes, cada solución consiste en una lista ordenada de los n objetos, que se denomina una **permutación**.

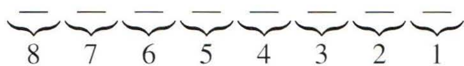
PERMUTACIÓN

5.66 *Sea n un número natural. Una* **permutación** *de n es cada una de las posibles ordenaciones diferentes que pueden hacerse con los números $1, 2, \ldots, n$.*

EJEMPLO 5.65 Las posibles permutaciones de 3 elementos son

1 2 3   1 3 2   2 1 3   2 3 1   3 1 2   3 2 1

Es fácil, según los principios enunciados, conocer el número total de permutaciones de n elementos. Supongamos, por ejemplo, que queremos saber de cuántas maneras distintas pueden ordenarse en fila 8 personas. La primera persona puede ser elegida de 8 maneras; por cada elección de la primera, hay 7 elecciones posibles para la segunda; y así sucesivamente.



En resumen, hay en total

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

permutaciones posibles de las ocho personas. El recuento de permutaciones da siempre lugar a un producto de números enteros consecutivos que decrecen hasta llegar a 1. Por ello, la solución se expresa con la notación abreviada

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320.$$

El símbolo 8! se lee "factorial de 8" o, más brevemente, "8 factorial". En la Tabla 5.17 se expresan los factoriales de los 10 primeros números naturales. Asimismo y aunque puede parecer extraño a primera vista, resulta

$0!$	$=$		$=$	1
$1!$	$=$	1	$=$	1
$2!$	$=$	$1\cdot 2$	$=$	2
$3!$	$=$	$1\cdot 2\cdot 3$	$=$	6
$4!$	$=$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$	$=$	24
$5!$	$=$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$	$=$	120
$6!$	$=$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$	$=$	720
$7!$	$=$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$	$=$	5040
$8!$	$=$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8$	$=$	40320
$9!$	$=$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9$	$=$	362880
$10!$	$=$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10$	$=$	3628800

Tabla 5.17: Factoriales de los 10 primeros números naturales.

conveniente, para hacer más homogéneas algunas fórmulas que aparecerán más adelante, adoptar el convenio:

$$0! = 1.$$

En estos términos, los recuentos de permutaciones tienen una respuesta genérica:

PERMUTACIONES

5.67 *El número de maneras distintas de ordenar n objetos diferentes es $n!$, que se lee* **factorial** *de n y vale:*

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

Es decir, hay $n!$ **permutaciones** *distintas de n objetos diferentes.*

El hecho de que los objetos sean distinguibles es muy relevante como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.66

a) Supongamos que, a la vuelta de un viaje, un padre ha traído un balón, una pluma y un libro para repartir entre sus tres hijos. ¿De cuántas maneras puede repartir los regalos entre los tres niños, de manera que cada uno reciba un regalo? El regalo del mayor se puede elegir de tres maneras, para elegir el del segundo quedan dos opciones y el tercero recibe el regalo sobrante: El problema equivale a ordenar los tres regalos de todas las maneras posibles, de manera que hay $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ repartos posibles.

b) Supongamos ahora que el padre ha traído dos balones idénticos y un libro. ¿Cómo pueden ahora repartirse los regalos para que ninguno se quede sin obsequio? Es inmediato escribir los tres repartos posibles:

Hijo 1	Hijo 2	Hijo 3
Balón	Balón	Libro
Balón	Libro	Balón
Libro	Balón	Balón

Pese a la semejanza entre las dos situaciones, es claro que el número de ordenaciones posibles se reduce como consecuencia de la igualdad entre algunos regalos.

La regla enunciada es válida cuando todos los objetos que se ordenan son diferentes. En caso contrario la cuestión requiere un análisis más cuidadoso que se puede ilustrar con algunos ejemplos.

EJEMPLO 5.67 En un bar, cinco amigos han pedido tres cafés y dos cervezas. ¿De cuántas maneras pueden consumir las cinco bebidas?

Si los cafés fueran diferentes (solo, cortado y con leche) y las cervezas fueran de marcas diferentes, no habría dificultad en resolver el problema. Tendrían $5! = 120$ maneras de repartirse las cinco bebidas. Ahora bien, una vez hecho el reparto, si los tres cafés son idénticos pueden permutarse entre sí sin que el reparto se altere. Ello significa que los 120 resultados pueden agruparse en grupos de $3! = 6$ que sólo se diferencian en el café que consume cada uno y no deben contarse como soluciones distintas. Quedan pues $\frac{120}{6} = 20$ resultados distintos. Análogamente, si ambas cervezas son iguales, cada reparto se empareja con aquél en que los bebedores de cerveza han intercambiado sus vasos. No hay por tanto más que $\frac{20}{2} = 10$ maneras de distribuir los tres cafés y las dos cervezas. En resumen, el número de repartos corresponde a la expresión:

$$\frac{5!}{3!\,2!} = \frac{120}{6 \cdot 2}$$

EJEMPLO 5.68 ¿Cuántas palabras distintas pueden formarse ordenando las letras a, a, b y b?

Si las cuatro letras fuesen distintas, la respuesta sería 4!. Podemos distinguirlas mediante un subíndice: a_1, a_2, b_1 y b_2, y las 24 palabras son entonces:

$$\begin{array}{cccccc}
a_1a_2b_1b_2 & a_1a_2b_2b_1 & a_1b_1a_2b_2 & a_1b_1b_2a_2 & a_1b_2a_2b_1 & a_1b_2b_1a_2 \\
a_2a_1b_1b_2 & a_2a_1b_2b_1 & a_2b_1a_1b_2 & a_2b_1b_2a_1 & a_2b_2a_1b_1 & a_2b_2b_1a_1 \\
b_1a_1a_2b_2 & b_1a_1b_2a_2 & b_1a_2a_1b_2 & b_1a_2b_2a_1 & b_1b_2a_1a_2 & b_1b_2a_2a_1 \\
b_2a_1a_2b_1 & b_2a_1b_1a_2 & b_2a_2a_1b_1 & b_1a_2b_1a_1 & b_2b_1a_1a_2 & b_2b_1a_2a_1
\end{array}$$

Pero al borrar los subíndices, cada palabra aparece repetida cuatro veces ($a_1a_2b_1b_2$, $a_1a_2b_2b_1$, $a_2a_1b_1b_2$ y $a_2a_1b_2b_1$, por ejemplo, dan $aabb$). Al eliminar las repeticiones de las palabras sin subíndices, sólo quedan:

$$aabb \quad abab \quad abba \quad baab \quad baba \quad bbaa$$

Como en el caso de las bebidas, los cambios de posición de las *a*es entre sí o de las *b*es entre sí, son permutaciones distintas si las letras son distinguibles; pero dejan de serlo si hay letras idénticas. Si se hace la cuenta, en cada ordenación de a, a, b, b, las dos *a*es se pueden reordenar de 2! maneras y las dos *b*es de 2!. Es decir

$$\begin{bmatrix} \text{N}^\circ \text{ de ordenaciones} \\ \text{con las letras} \\ \text{distinguibles} \end{bmatrix} = 2! \cdot 2! \cdot \begin{bmatrix} \text{N}^\circ \text{ de ordenaciones} \\ \text{con las letras} \\ \text{indistinguibles} \end{bmatrix}$$

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

La conclusión general es la siguiente:

5.68 *Una colección de n objetos, clasificados en k grupos de objetos idénticos entre sí, el primero con n_1 objetos, el segundo con n_2, etc... se puede ordenar de*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \quad \textit{maneras distintas.}$$

Son las **permutaciones con repetición** *de n objetos, de los cuales n_1 son iguales entre sí, n_2 iguales entre sí, etc...*

EJEMPLO 5.69 Con los símbolos a, a, a, b, b, c, c, d, ¿Cuántas palabras se pueden formar de 8 letras?

Puesto que hay que usar todos los símbolos, no hay más que contar de cuantas maneras se pueden ordenar en fila las 8 letras. La respuesta es

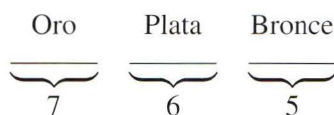
$$\frac{8!}{3!2!2!1!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680 \quad \text{palabras distintas.}$$

VARIACIONES

Una segunda situación, muy frecuente, consiste en contar cuántos *subconjuntos ordenados* de un cierto tamaño, r, pueden extraerse de un conjunto dado, con n elementos. Son las denominadas **variaciones** de r elementos tomados entre n.

Esta situación se ilustra con el caso siguiente. Supongamos que en una carrera concurren 7 atletas. Podemos preguntarnos de cuántas maneras distintas pueden atribuirse las tres medallas (oro, plata y bronce). El problema no es nuevo; identificados los participantes mediante una letra, la cuestión es exactamente la misma que determinar el número de palabras de tres letras diferentes que pueden formarse con siete letras distintas. El método constructivo proporciona la solución con facilidad:

El atleta que recibirá la medalla de oro puede elegirse de 7 maneras; elegido el primero, el ganador de la medalla de plata puede ser cualquiera de los seis restantes; y el bronce puede ser obtenido por cualquiera de los otros cinco. Por consiguiente hay $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ palmarés posibles.



Podemos hacer un razonamiento alternativo. Se sabe que son 7! los órdenes de llegada posibles de los siete atletas. Desafortunadamente para los cuatro últimos, a efectos de lograr medalla, lo mismo les da ser 4° que 7°; es decir el orden en el que estén situados los cuatro últimos es irrelevante. El conjunto de las listas de llegada se divide así en grupos de 4! listas, obtenidas al permutar sus cuatro últimos componentes, para las cuales los ganadores de las diversas medallas son los mismos. Por consiguiente, el número de listas con alguna diferencia en las adjudicaciones de medallas es

$$\frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5$$

Por cualquiera de los dos procedimientos del ejemplo anterior, se llega a una conclusión general:

VARIACIONES

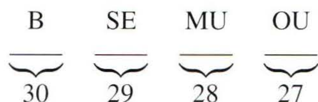
5.69 *El número de* **variaciones** *de r elementos tomados entre n, o lo que es lo mismo, el número de* **subconjuntos ordenados** *posibles de r elementos, que pueden extraerse de un conjunto de n elementos es igual a:*

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Notése que subconjuntos ordenados significa: grupos de r elementos que se diferencian en alguno de sus componentes o en el orden en el que aparecen.

EJEMPLO 5.70 A lo largo del mes de abril, un viajante debe visitar las ciudades de Barcelona, Sevilla, Murcia y Ourense. Supuesto que invierte un día en cada visita, ¿de cuántas maneras puede programar sus viajes?

Supóngase que decide el día en que realizará cada visita en el orden en que aparecen citadas las ciudades. Dispone de 30 ocasiones para fijar su viaje a Barcelona; a continuación, la fecha de la visita a Sevilla puede elegirla entre los 29 días restantes; y así, sucesivamente, para los viajes a Murcia y Ourense. Esto es



Tiene $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657\,720$ posibilidades para organizar sus viajes. Ello corresponde al número de variaciones de 4 elementos tomados entre 30.

COMBINACIONES

Al contrario que en el apartado anterior, puede interesar el recuento de todos los subconjuntos de r elementos que se pueden extraer de un conjunto de n elementos, sin que sea relevante el orden en que aparecen. Se les denomina **combinaciones** de r elementos tomados entre n.

La situación es la siguiente. Imaginemos que, por razones profesionales, el viajante del último ejemplo del apartado anterior está obligado a visitar las cuatro ciudades en el orden en que aparecen citadas, es decir, ha de ir primero a Barcelona, luego a Sevilla, luego a Murcia y por fin a Ourense. Ello restringe sus grados de libertad para organizar sus viajes y debe tener, pues, menos posibilidades de elección. El método constructivo directo no parece ahora el adecuado para resolver el problema: el viaje a Barcelona puede realizarlo cualquiera de los 27 primeros días del mes, para reservar tiempo suficiente para hacer los otros tres viajes; pero según el día que elija para ir a Barcelona le quedarán un número de posibilidades distinto para fijar su viaje a Sevilla. Y, al fijar la fecha del viaje a Sevilla, le quedan distintos números de elecciones posibles para visitar Murcia... El problema parece complicarse.

Para resolverlo, hay que razonar de otro modo. Supóngase que señala con una X, sobre el calendario, los días que decide viajar y marca los restantes con un 0. Como no tiene elección en el orden de sus visitas, no tiene más que marcar cuatro X (y 26 ceros); la primera fecha marcada irá a Barcelona, la segunda a Sevilla y así sucesivamente. Cada ordenación en fila de cuatro X y 26 ceros, le da un plan de viajes al situarlos sobre el calendario. Pero las maneras posibles de ordenar en fila cuatro X y 26 ceros son las permutaciones con repetición de 30 elementos, con 4 iguales a X y 26 iguales a cero, es decir, $\frac{30!}{4!\,26!} = 27405$. Luego tiene 27405 maneras de organizar sus viajes, bastantes menos que cuando podía elegir también el orden.

Podía haber seguido otro procedimiento para diseñar su plan. Primero elige sus viajes ignorando que tiene que hacerlos en un orden fijo; según se ha visto en el apartado anterior, tiene $\frac{30!}{26!}$ maneras de hacerlo. Después reemplaza la primera ciudad a visitar por Barcelona, la segunda por Sevilla, la tercera por Murcia y la última por Ourense. Como las cuatro ciudades pueden haberle salido en 4! órdenes distintos, está agrupando sus planes en grupos de 4! cada uno, lo cual le deja un total de $\frac{30!}{26!\,4!}$ planes posibles. Cualquiera de los dos procedimientos le conduce al mismo resultado.

Un examen atento de las condiciones del ejemplo nos hace comprender que el problema se reduce únicamente a elegir cuatro días, entre los treinta del mes. Puesto que el orden de los viajes se mantiene fijo, no hay otras posibilidades de elección.

De esta manera se ha resuelto el problema general de saber, dado un conjunto de n elementos, de cuántas maneras puede elegirse un subconjunto de r de sus elementos. La diferencia con la cuestión analizada en el apartado anterior es que allí se consideraban distintos los subconjuntos que tenían distinto orden de sus elementos, mientras que aquí se trata de subconjuntos propiamente dichos, que no varían por alterar el orden de sus elementos. Obsérvese que en el ejemplo del apartado anterior, la elección de los días $(23,7,19,11)$ daba lugar a un plan de viaje distinto que la elección $(7,23,19,11)$; en cambio, ahora, suponen el mismo plan. La conclusión establecida puede enunciarse en la forma:

COMBINACIONES

5.70

El número de **combinaciones** *de r elementos tomados entre n, o lo que es lo mismo, el número de subconjunto distintos de r elementos que pueden extraerse de un conjunto de n elementos es igual a:*

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

EJEMPLO 5.71 Un conjunto $\{a,b,c,d,e\}$ contiene $\frac{5!}{3!\,2!} = 10$ subconjuntos de 3 elementos. Tal y como se ha razonado, son tantos como maneras de situar tres X y dos 0 sobre los sucesivos elementos para distinguir los elegidos de los descartados.

Como el número de combinaciones aparece con gran frecuencia en muchos tipos de cálculos, existe una notación abreviada:

NÚMERO COMBINATORIO

5.71

Se llama **número combinatorio** $\binom{n}{r}$, *y se lee "n sobre r", a*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

El número $\binom{n}{r}$ *es el número de subconjuntos de r elementos que contiene un conjunto de tamaño n.*

EJEMPLO 5.72 Se tiene:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20 \qquad \binom{11}{4} = \frac{11!}{4!\,7!} = 330$$

$$\binom{12}{9} = \frac{12!}{9!\,3!} = 220 \qquad \binom{20}{13} = \frac{20!}{13!\,7!} = 77520$$

Los números combinatorios verifican un gran número de propiedades y de relaciones entre ellos.

PROPIEDAD 1

5.72

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Esta igualdad se obtiene directamente de la definición de ambos miembros. La relación expresa que, al seleccionar r elementos para formar un conjunto, queda formado otro subconjunto con los $n-r$ elementos no elegidos; luego, hay el mismo número de subconjuntos con r o con $n-r$ elementos.

EJEMPLO 5.73 Se cumple que $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$. En efecto

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\ 6!} = 210 \qquad \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\ 4!} = 210$$

PROPIEDAD 2

5.73

$$\binom{n}{0} = 1$$

La expresión $\binom{n}{0}$ indica el número de subconjuntos con 0 elementos de un conjunto de cardinal n. Recordando que al introducir los factoriales se adoptó el convenio $0! = 1$, la expresión conduce al resultado coherente

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$$

es decir, un conjunto cualquiera de n elementos sólo tiene un subconjunto con 0 elementos, a saber, el conjunto vacío.

PROPIEDAD 3

5.74

$$\binom{n}{n} = 1$$

La expresión $\binom{n}{n}$ indica el número de subconjuntos con n elementos de un conjunto de cardinal n. Al igual que en la propiedad anterior la expresión

conduce al resultado coherente

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$$

es decir, un conjunto cualquiera de n elementos sólo tiene un subconjunto con n elementos, a saber, el propio conjunto.

PROPIEDAD 4

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n \qquad 5.75$$

El primer miembro de la igualdad expresa el número total de subconjuntos de un conjunto con n elementos, como suma de los de tamaño 0, los de tamaño 1, 2,..., $n-1$ y n. Pero, como sabemos por la teoría de conjuntos, el número total de subconjuntos de un conjunto, o lo que es lo mismo, el número de elementos del conjunto de las partes de un conjunto es igual a 2^n

El cálculo del número de combinaciones permite resolver gran número de problemas. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 5.74 ¿Cuántas "manos" distintas (de 5 cartas) puede recibir un jugador de poker?

Una baraja de poker consta de 52 cartas y una "mano" no es más que un subconjunto de 5 de ellas, sin que importe el orden en que las ha recibido el jugador. Por tanto las manos posibles son:

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2598960\,.$$

EJEMPLO 5.75 ¿Cuántas maneras distintas hay de elegir tres "espadas" y dos "copas" de una baraja española de 40 naipes?

Las tres "espadas" pueden elegirse de $\binom{10}{3}$ maneras distintas; tantos como subconjuntos de tamaño 3 del conjunto de todas las "espadas". Por cada elección de las tres espadas, hay $\binom{10}{2}$ maneras de elegir las dos "copas". Luego en total las elecciones posibles son:

$$\binom{10}{3}\binom{10}{2} = 120 \cdot 45 = 5400\,.$$

EJEMPLO 5.76 ¿Cuántas maneras distintas hay de elegir tres cartas de una baraja española, de manera que sean del mismo palo?

Primero se decide el palo común de las tres cartas. Puesto que hay cuatro palos, habrá $\binom{4}{1} = 4$ maneras de hacerlo. Por cada elección del palo, hay $\binom{10}{3}$ maneras

distintas de elegir 3 de sus cartas. Por consiguiente, el número total de elecciones posibles es

$$\binom{4}{1}\binom{10}{3} = 120.$$

5.8 AMPLIACIÓN DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

5.8.1 OTRAS REPRESENTACIONES GRÁFICAS

Describimos en este apartado algunas ideas adicionales para hacer una representación gráfica de una distribución de frecuencias de una variable continua. A partir del histograma puede construirse el *polígono de frecuencias*. Asimismo, puesto que los valores de una variable continua son numéricos y están ordenados, es posible considerar también la distribución de *frecuencias acumuladas* y representar ésta mediante el *diagrama de frecuencias acumuladas* y el *polígono de frecuencias acumuladas*. Otra forma de representación que conserva la individualidad de los datos es la conocida con el nombre de *diagrama de tallos y hojas*. Además, en las Ciencias sociales es muy útil una forma de representación denominada *pirámide de población*.

POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Si se unen los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos que forman el histograma se obtiene un gráfico que se denomina **polígono de frecuencias**.

EJEMPLO 5.77 La línea roja de la figura 5.12 representa el polígono de frecuencias del histograma representado en la figura 5.9, correspondiente a la variable *peso* de la tabla de Galton.

La interpretación de este gráfico es muy sencilla. Sabemos que el área que encierran todos los rectángulos del histograma es proporcional a la frecuencia total; en particular, si el histograma representa frecuencias relativas, el área limitada por dichos rectángulos puede considerarse igual a la unidad. Ahora bien, como puede apreciarse en la figura 5.12 el área limitada por el polígono de frecuencias y el eje de abscisas es aproximadamente igual al área de los los rectángulos, ya que en cada intervalo de clase se excluye una parte del rectángulo pero se incluye otra exterior. Por tanto, el polígono de frecuencias delimita una zona cuya área es aproximadamente igual a la frecuencia total. La aproximación es tanto mejor cuanto menor es la base de los rectángulos, o sea, cuanto mayor sea el número de ellos.

DIAGRAMAS DE FRECUENCIAS ACUMULADAS

La consideración de las frecuencias acumuladas permiten introducir una nueva forma de representar variables cuantitativas discretas: los **diagramas**

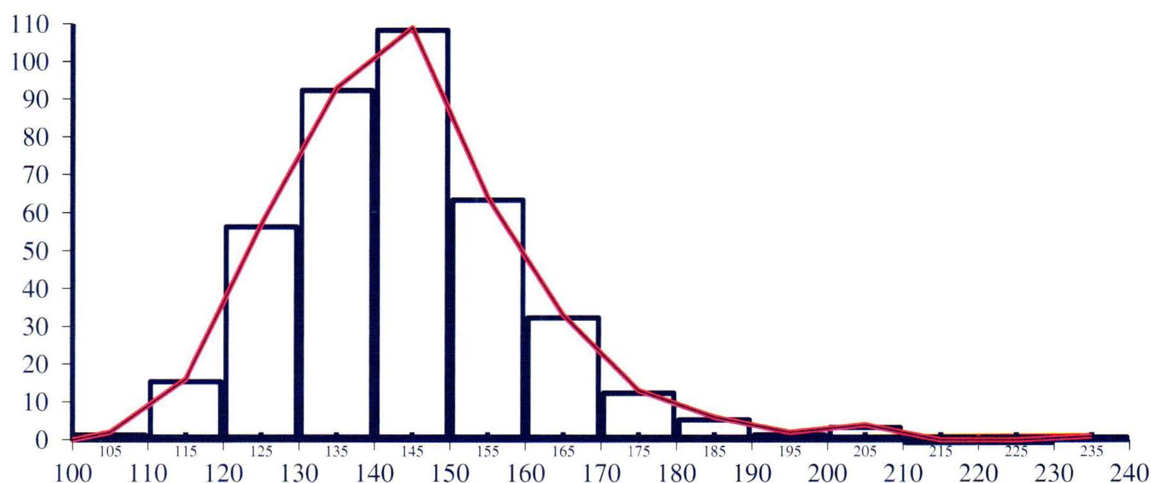


Figura 5.12: Polígono de frecuencias para los datos agrupados de la variable *peso* de la tabla de Galton.

Tabla de frecuencias EDAD			
Edad	Frec. abs.	Frec. rel.	Frec. acum.
23	144	0.36	0.36
24	140	0.35	0.71
25	116	0.29	1.00
Total	400	1.00	

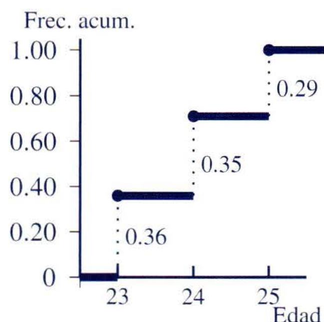


Figura 5.13: Diagrama de frecuencias acumuladas de la variable *edad* de la tabla de Galton.

de frecuencias acumuladas. Estos diagramas tienen forma de escalera con saltos que ocurren en cada uno de los valores x_i de la variable y tienen una magnitud igual a la frecuencia relativa f_i de dicho valor. Representa las frecuencias acumuladas hasta el correspondiente valor. Se completa con un tramo de nivel igual a cero para el intervalo que precede al menor valor que toma la variable y con un tramo de nivel igual a uno para el intervalo que sigue al mayor valor de la variable.

EJEMPLO 5.78 En la figura 5.13 se muestra el diagrama acumulativo de la distribución de frecuencias de la variable *edad* de la tabla de Galton.

POLÍGONO DE FRECUENCIAS ACUMULADAS

Un gráfico adicional para representar una distribución de valores agrupados en intervalos de clase es el **polígono de frecuencias acumuladas**, que se construye del modo siguiente:

1. Se calculan las frecuencias relativas acumuladas para cada intervalo de clase.

2. Por el extremo superior de cada intervalo, e_i, se levanta una perpendicular de altura igual a la frecuencia relativa acumulada, n_i, del intervalo.

Intervalo de clase	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa acumulada
$[100-110)$	105	2	2	0.0050
$[110-120)$	115	16	18	0.0450
$[120-130)$	125	57	75	0.1875
$[130-140)$	135	93	168	0.4200
$[140-150)$	145	109	277	0.6925
$[150-160)$	155	64	341	0.8525
$[160-170)$	165	33	374	0.9350
$[170-180)$	175	13	387	0.9675
$[180-190)$	185	6	393	0.9825
$[190-200)$	195	2	395	0.9875
$[200-210)$	205	4	399	0.9975
$[210-220)$	215	0	399	0.9975
$[220-230)$	225	0	399	0.9975
$[230-240)$	235	1	400	1.0000

Tabla 5.18: Tabla de frecuencias acumuladas de la variable *peso* de la tabla de Galton.

3. Se unen, mediante segmentos rectos, los extremos de las perpendiculares, es decir, se unen los puntos (e_i, n_i).

La interpretación de esta gráfica es la siguiente: cada punto (x,n) del polígono significa que el intervalo de valores de la variable inferiores a x tiene una frecuencia relativa acumulada igual a n.

EJEMPLO 5.79 La tabla 5.18 incluye la distribución de frecuencias acumuladas de la variable *peso* de la tabla de Galton con valores agrupados y la figura 5.14 muestra el polígono de frecuencias acumuladas de la distribución de frecuencias de la variable *peso* de la tabla de Galton.

DIAGRAMAS DE TALLOS Y HOJAS

Los **diagramas de tallos y hojas** son una alternativa al histograma que permite hacer una representación gráfica global de la distribución de frecuencias manteniendo la individualidad de los datos. Se construye de la manera siguiente:

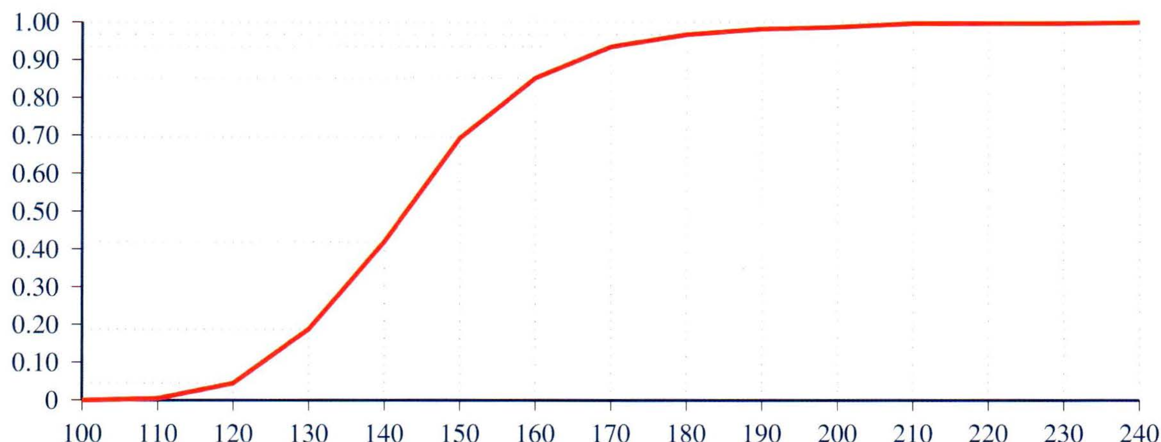


Figura 5.14: Polígono de frecuencias acumuladas para los datos agrupados de la variable *peso* de la tabla de Galton.

1. Se comienza por redondear los datos a dos, o a lo sumo tres, cifras significativas.

2. Cada observación se divide en dos partes

    a) El **tallo**, que está formado por todos los dígitos de la observación excepto el dígito situado más a la derecha, es decir, el último dígito.

    b) La **hoja** que consiste en el dígito final.

    Los tallos pueden contener cuantos dígitos sean precisos, pero cada hoja contiene un único dígito.

3. Se escriben los tallos en columna vertical, comenzando por el menor y continuando en orden creciente.

4. Se traza una línea vertical a la derecha de la columna formada por los tallos.

5. Se escribe cada hoja en una fila a la derecha de su tallo, comenzando por la menor y siguiendo en orden creciente.

EJEMPLO 5.80 Vamos a representar las 100 primeras observaciones de la variable *estatura* de la tabla de Galton mediante un diagrama de tallos y hojas. En primer

lugar, redondeamos los datos a tres cifras significativas y, consecuentemente, los expresamos con una sola cifra decimal. A continuación los ordenamos. El resultado se muestra en la tabla 5.19.

59.4	62.1	62.3	62.4	62.6	62.9	63.0	63.9	63.9	64.0
64.0	64.4	64.5	64.6	64.7	65.2	65.3	65.3	65.4	65.4
65.5	65.6	65.6	65.8	66.0	66.0	66.1	66.2	66.2	66.3
66.4	66.5	66.5	66.6	66.7	66.8	66.8	67.0	67.1	67.2
67.2	67.2	67.2	67.3	67.5	67.5	67.5	67.6	67.8	67.8
68.0	68.1	68.1	68.2	68.2	68.2	68.2	68.2	68.3	68.3
68.5	68.7	68.7	68.7	68.7	68.9	69.0	69.2	69.2	69.2
69.2	69.3	69.3	69.4	69.5	69.6	69.6	69.6	69.7	69.7
69.8	69.8	70.0	70.1	70.3	70.7	70.8	71.0	71.2	71.2
71.5	71.5	71.8	72.0	72.2	72.3	72.7	73.8	74.0	79.5

Tabla 5.19: Cien primeras observaciones ordenadas de la variable *estatura* de la tabla de Galton.

59	4
60	
61	
62	13469
63	099
64	004567
65	233445668
66	0012234556788
67	012222355688
68	0112222233577779
69	0222233456667788
70	01378
71	022558
72	0237
73	8
74	0
75	
76	
77	
78	
79	5

Figura 5.15: Diagrama de tallos y hojas para las cien primeras observaciones de la variable *estatura* de la tabla de Galton

Los tallos estarán formados por las dos primeras cifras de la izquierda, las cifras enteras, y las hojas por el dígito decimal. Los tallos van desde 59 hasta 79. Los ponemos en columna y colocamos a su derecha las hojas. El diagrama se muestra en la figura 5.15.

Los diagramas de tallos y hojas recuerdan, en cierto modo, a los histogramas. Si giramos el diagrama de la figura 5.15 noventa grados en sentido contrario a las agujas del reloj, obtenemos una figura de aspecto similar a un histograma. Mientras que en los histogramas hay cierta flexibilidad a la hora de definir los intervalos de clase, el equivalente en los diagramas de tallos y hojas, los tallos, quedan fijados una vez que se redondean los datos. Por ello, hay que utilizar el redondeo con cuidado para procurar que los dígitos que se obtengan como hojas tengan un significado apropiado. Por ejemplo, si consideramos los datos de la variable *peso* de la tabla de Galton, tenemos números como

111.50 143.00 125.50 146.00 143.50 143.00 156.25 147.00 179.50 145.00...

Si se redondean a una cifra decimal resulta:

111.5 143.0 125.5 146.0 143.5 143.0 156.3 147.0 179.5 145.0...

Los tallos serían números como

111...125...143...145...179

y las hojas 0, 3 y 5, por lo que se llegaría a un gráfico poco ilustrativo. En cambio, si los datos se redondean a tres dígitos significativos con cero decimales los números son del estilo

112 143 126 146 144 143 156 147 180 145...

Los tallos son ahora

11 12 13 14 15 16 17 18

y las hojas son los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 con lo que el diagrama es más útil. A veces, puede ocurrir que las hojas se concentren en unos

11	012578
12	11133356777889
13	011112445556678889
14	0022222233333333344555556667778889
15	1233333444666677789
16	12459
17	38
18	0
19	
20	3

(a)

11	012578
12	11133356777889
13	011112445556678889
14	0022222233333333344
14	555556667778889
15	1233333444666677789
16	12459
17	38
18	0
19	
20	3

(b)

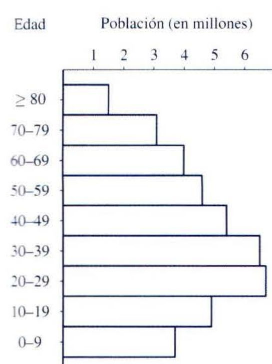
Figura 5.16: Dos versiones del diagrama de tallos y hojas para las cien primeras observaciones de la variable *peso* de la tabla de Galton

pocos tallos. En estos casos puede ser conveniente subdividir los tallos para obtener un diagrama apropiado. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 5.81 En la figura 5.16 se muestran dos versiones del diagrama de tallos y hojas para las cien primeras observaciones de la variable *peso* de la tabla de Galton, con los datos redondeados con tres cifras significativas. En la parte (a) los tallos son todos diferentes. En la parte (b) el tallo 14 se repite dos veces a fin de equilibrar el número de hojas entre los tallos centrales.

PIRÁMIDES DE POBLACIÓN

En las Ciencias sociales, en particular en el campo de la Demografía, se utilizan los diagramas llamados **pirámides de población**. Estos gráfi-



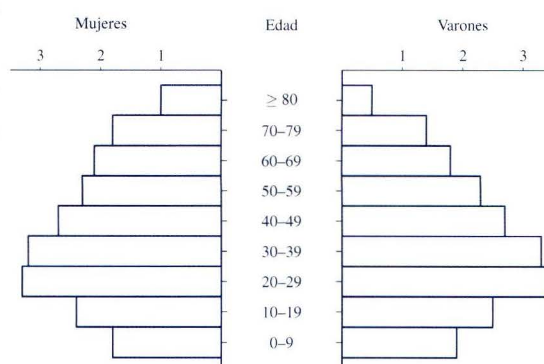
POBLACIÓN POR EDADES
España: padrón municipal 2000
(fuente: INE)

(a)

Datos de población.
Padrón municipal año 2000.

Edad	Total	Varones	Mujeres
0-9	3692624	1893684	1798940
10-19	4891411	2509140	2382270
20-29	6686901	3407987	3278915
30-39	6507592	3277717	3229874
40-49	5389738	2692228	2697510
50-59	4576183	2255325	2320856
60-69	4026753	1900040	2126712
70-79	3182594	1372110	1810485
80 y más	1545994	513151	1032842

Fuente: INE



POBLACIÓN POR EDADES Y SEXO
(en millones)
España. Padrón municipal 2000. Fuente: INE)

(b)

Figura 5.17: Pirámides de población. Padrón municipal año 2000. (Fuente: INE).

cos son histogramas particulares que nos informan de cómo se reparte la población por grupos de edades.

EJEMPLO 5.82 La tabla incluida en la figura 5.17 nos muestra los datos de la población española, clasificada en grupos de 10 en 10 años, según los datos del padrón municipal del año 2000 obtenidos del Instituto Nacional de Estadística. La figura (a) representa la pirámide de población correspondiente al total.

Las pirámides de población nos dan una idea de cómo usar los histogramas para comparar las frecuencias de una variable en dos poblaciones distintas.

EJEMPLO 5.83 En Demografía se suelen representar enfrentadas las pirámides de población correspondientes a cada sexo, como se ha hecho en la figura 5.17 (b). A la izquierda aparece la pirámide correspondiente a las mujeres y a la derecha la de los hombres. Así confrontadas, se hace casi evidente la mayor longevidad de las mujeres ya que, aunque en los primeros grupos de edad el número de hombres y mujeres es similar, a partir de los 60 años el número de hombres decrece más rápidamente, lo que indica una menor mortalidad entre éstas.

5.8.2 OTRAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

MEDIANA

MEDIANA

5.76

*La **mediana** de una serie de valores numéricos es el valor que ocupa el lugar central de la serie, una vez ordenada en forma creciente, es decir, considerando los valores de menor a mayor. Se representa por M.*

CÁLCULO DE LA MEDIANA: FORMA GENERAL

El cálculo de la mediana no precisa complejas operaciones aritméticas. Todo consiste en ordenar y contar las observaciones.

5.77

1. *Se ordenan las observaciones de acuerdo con su valor, de menor a mayor, y se cuentan. Sea N el número de observaciones.*
2. *Si N es impar, la mediana es la observación que ocupa el lugar central de la lista ordenada. Este lugar es el que hace el número $\frac{N+1}{2}$, comenzando a contar por el primero de la lista.*
3. *Si N es par, se toma como mediana la media aritmética de las dos observaciones que ocupan los lugares centrales, es decir, el lugar $\frac{N}{2}$ y el lugar $\frac{N}{2}+1$.*

1200	1425	1600	1350	1100
1500	1350	1475	1200	1800
1400	1450	1350	1000	1550
2000	1450	1500	1400	1350
900	3000	1500	1400	1350

Tabla 5.20: Tabla de salarios.

EJEMPLO 5.84 La tabla 5.20 muestra el salario mensual, en euros, de los 25 trabajadores de una empresa. Para calcular la mediana ordenamos los datos de menor a mayor, como se ve en la tabla 5.21. Como $N = 25$ es impar, la mediana es el dato que ocupa el lugar $\frac{N+1}{2} = \frac{25+1}{2} = 13$ en la lista anterior, es decir, $M = 1400$ euros.

Supongamos que causa baja el trabajador que percibía el salario de 900 euros. Entonces el número de datos es ahora par, $N = 24$. La mediana se calcula como la media aritmética de los dos datos que ocupan los lugares centrales, a saber, el lugar $\frac{N}{2} = \frac{24}{2} = 12$ y el lugar $\frac{N}{2} + 1 = 13$. Al haber eliminado el primer dato, el duodécimo dato es 1400 y el décimo tercero es 1425. Por tanto $M = \frac{1400+1425}{2} = 1412.5$.

900	1000	1100	1200	1200
1350	1350	1350	1350	1350
1400	1400	1400	1425	1450
1450	1475	1500	1500	1500
1550	1600	1800	2000	3000

Tabla 5.21: Tabla de salarios en orden creciente.

El cálculo de la mediana requiere ordenar los datos. Realizar manualmente esta tarea suele ser bastante tedioso, incluso aunque el número de datos no sea muy elevado. Afortunadamente, muchos programas de ordenador efectúan hoy en día este trabajo de manera eficaz.

EJEMPLO 5.85 Con la ayuda de un software ordenamos los datos de las variables *estatura* y *peso* de la tabla de Galton; luego calculamos su mediana utilizando el procedimiento general. El número de observaciones es $N = 400$; por tanto hay que saber qué observaciones ocupan los lugares 200 y 201.

a) Un extracto de la tabla ordenada de la variable *estatura* es:

Obs.	1	2	......	200	201	......	399	400
Estatura	59.40	61.00	......	68.10	68.10	......	75.80	79.50

La mediana es $M = \frac{68.10+68.10}{2} = 68.10$ pulgadas.

b) Un extracto de la tabla ordenada de la variable *peso* es:

Obs.	1	2	......	200	201	......	399	400
Peso	107.25	109.50	......	142.00	142.00	......	206,75	236,00

La mediana es $M = \frac{142.00+142.00}{2} = 142.00$ libras.

Cuando los datos estén en forma de tabla de frecuencias el cálculo de la mediana es, esencialmente, el mismo. No hay más que considerar que cada valor de la variable se repite, en orden, un número de veces igual al que señala su frecuencia.

EJEMPLO 5.86 Consideremos los datos de la variable *edad* de la tabla de Galton, tabla 5.22. El número de datos es $N = 400$. Como es par, la mediana será la media aritmética de los datos que ocupan los lugares $\frac{400}{2} = 200$ y $\frac{400}{2} + 1 = 201$. Si se ordenasen los datos de la tabla, colocaríamos en primer lugar una fila con 144 veces el número 23, luego 140 veces el número 24 y, finalmente, 116 veces el número 25:

$$23 \quad \overbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}^{144 \text{ veces}} \quad 23\ 24 \quad \overbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}^{140 \text{ veces}} \quad 24\ 25 \quad \overbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}^{116 \text{ veces}} \quad 25$$

En esta serie, el dato que ocupa el lugar 200 es, claramente, 24; igualmente el dato que ocupa el lugar 201 es también 24. La media de estos dos valores es, obviamente, 24. Por tanto, la mediana es $M = 24$.

La propia tabla 5.22 nos dice como realizar el cálculo: basta encontrar en la columna de frecuencias acumuladas el primer número que supera a $\frac{N}{2}$. En este caso es 284, por lo que la mediana es el valor de la variable que corresponde a esta frecuencia acumulada.

Tabla de frecuencias
EDAD

	Frecuencia	
Edad	absoluta	acumulada
23	144	144
24	140	284
25	116	400
Total	400	

Tabla 5.22: Distribución de la variable *edad* de la tabla de Galton.

El ejemplo anterior nos sugiere el método para calcular la mediana cuando los datos se presentan en una tabla de frecuencias como la tabla 5.23. Sólo hay que comparar $\frac{N}{2}$ con los números de la columna de frecuencias

acumuladas. El primero que sea estrictamente mayor, indica que el correspondiente valor ocupa el lugar central de la serie y, por tanto, es la mediana. Alternativamente, si $\frac{N}{2}$ coincide con alguna de las frecuencias acumuladas, lo cual sólo puede ocurrir si N es par, no hay un único valor central; la mediana será la media aritmética de los dos valores centrales, que son el que corresponde a la frecuencia acumulada que da lugar a la coincidencia y el siguiente. El procedimiento puede esquematizarse de la siguiente forma:

CÁLCULO DE LA MEDIANA: DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS.

5.78

1. *Se lee en la tabla el total de observaciones N y se calcula $\dfrac{N}{2}$.*

2. *Se busca en la tabla el índice j tal que $N_{j-1} < \dfrac{N}{2} \leq N_j$.*

   - *Si $\dfrac{N}{2} < N_j$ entonces $M = x_j$.*
   - *Si $\dfrac{N}{2} = N_j$ entonces $M = \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}$.*

Cálculo de la mediana			
	Frecuencia		
Valor	abs.	acum.	
x_i	F_i	N_i	
x_1	F_1	N_1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_{j-1}	F_{j-1}	N_{j-1}	
x_j	F_j	N_j	$\leftarrow \frac{N}{2}$
x_{j+1}	F_{j+1}	N_{j+1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_n	F_n	N_n	
Total	N		

Tabla 5.23: Cálculo de la mediana en un distribución de frecuencias

Propiedades de la mediana

Entre las características de la mediana pueden señalarse las siguientes:

1. La mediana depende de todas las observaciones por su orden y no por su valor. Esto hace que sea menos sensible que la media ante la presencia de valores extremos en los datos. Por esta razón es una medida que se emplea con frecuencia al trabajar en campos en que la existencia de datos 'anómalos' puede distorsionar la interpretación de los resúmenes estadísticos, como ocurre en economía: salarios, precios, etc.

2. La presencia de intervalos extremos abiertos en la distribución de frecuencias no conduce necesariamente a la imposibilidad de calcular la mediana. Por ejemplo, en los datos sobre fecundidad para el total nacional de la página 381, la variable *número de hijos vivos* tiene una modalidad, *cinco y más*, que está abierta. Sin embargo, es posible calcular la mediana. En efecto, el total N es 10165237; al ser impar calculamos $\frac{N+1}{2} = \frac{10165237+1}{2} = 5082619$. Este número está comprendido entre las frecuencias acumuladas hasta el valor

0 y hasta el valor 1: 4738369 < 5082619 < 6318622. Por tanto la mediana es '1 hijo'.

No obstante, si el intervalo de la mediana fuese un intervalo abierto seguiría subsistiendo la imposibilidad del cálculo.

3. Los cálculos algebraicos en que interviene la mediana suelen resultar complicados, por lo que su uso en Inferencia estadística está más limitado que el de la media aritmética.

MODA

MODA

*La **moda** de una serie de valores numéricos es el valor de mayor frecuencia absoluta. Se representa por m.* 5.79

Para calcular la moda sólo hay que encontrar la frecuencia absoluta de cada valor e identificar el máximo de dichas frecuencias. Puede ocurrir que la moda no sea única, es decir, una serie estadística puede presentar varias modas.

EJEMPLO 5.87 La moda de la variable *salario* de la tabla 5.20 es $m = 1350$, ya que se repite cinco veces y es el valor más frecuente.

EJEMPLO 5.88 Si contamos las veces que se repite cada valor de las variables *estatura* y *peso* de la tabla de Galton, nos encontramos con lo siguiente:

a) La variable *estatura* presenta tres modas que son los valores 66.70, 67.20 y 69.20. Cada uno se observa 10 veces.

b) La variable *peso* presenta cuatro modas que son los valores 138.00, 141.50, 143.00 y 145.00. Cada uno se observa 8 veces.

Cuando los datos se presentan en forma de tabla de frecuencias la moda se encuentra de una manera muy simple: basta buscar el máximo, o máximos, de los valores que se encuentran en la columna de frecuencias absolutas.

EJEMPLO 5.89 La mayor frecuencia absoluta en la tabla 5.22 es 144 y corresponde al valor 23; por tanto, la moda de la variable *edad* de la tabla de Galton es $m = 23$.

Propiedades de la moda

Sobre la moda podemos hacer las siguientes consideraciones:

1. La moda es una medida de centralización de cálculo simple e interpretación sencilla. Incluso puede obtenerse para variables cualitativas, siempre que el intervalo de frecuencia máxima no sea un intervalo abierto.

2. En el cálculo de la moda intervienen todas las observaciones en función de su frecuencia y no por su valor.

3. La moda es muy sensible a la fluctuación de las observaciones. Un cambio en un único dato puede hacer variar la moda de manera importante. Por ejemplo, si los datos son 1, 1, 1, 5, 10 y 10, la moda es 1; pero si cambian a 1, 1, 10, 5, 10, 10, la moda pasa a ser 10.

4. La moda se presta mal a los cálculos algebraicos, por lo que su utilización en la Inferencia estadística es muy limitada.

5.8.3 MEDIDAS DE FORMA

Además de las medidas de centralización y dispersión se pueden asignar otros valores numéricos que midan la *forma* de una distribución de valores de una variable estadística. Al hablar de la forma de una distribución se hace referencia a dos características que se aprecian visualmente cuando se examina un diagrama de barras, histograma o diagrama de tallos y hojas. Una de ellas, consiste en que la distribución presente o no *simetría* respecto de un hipotético eje que la divida en dos partes; este eje de simetría tiene que ver con las medidas de centralización que se han estudiado. La otra, relacionada con la dispersión, pretende distinguir si ésta se debe a que existen valores muy frecuentes próximos a la media o, por el contrario, a que existen valores muy alejados de la media aunque infrecuentes. Pese a tener la misma dispersión, en el primer caso la representación en forma de diagrama de barras o histograma presentará un pico muy pronunciado en los alrededores de la media, dando la impresión de *apuntamiento*; en cambio, la segunda causa producirá la impresión de que su gráfica es más plana o achatada. Simetría, o sesgo, y apuntamiento, o curtosis, son las dos características de forma de una distribución estadística que se pretende evaluar mediante la consideración de las medidas adecuadas.

COEFICIENTE DE ASIMETRÍA

Como se aprecia en la figura 5.18, una distribución es simétrica con respecto a un valor central cuando valores de la variable equidistantes, en menos y en más, de dicho valor central tienen la misma frecuencia. Cuando no

ocurre esto, la distribución será asimétrica. Si los valores inferiores al valor central tienen mayor frecuencia que los valores superiores, la gráfica de la distribución se verá más cargada hacia la izquierda y más liviana hacia la derecha. Alternativamente, si los valores superiores tienen mayor frecuencia que los inferiores, la impresión visual que produce la distribución nos parecerá la imagen en un espejo de la situación anterior; la distribución se verá cargada hacia la derecha y dará la impresión de deslizarse hacia la izquierda.

Hay diversas maneras de medir la simetría de una serie de valores. Una de las más utilizadas toma como eje de simetría la media aritmética y considera las desviaciones $(x_i - \bar{x})$. La idea es ver si pesan más las negativas, en cuyo caso la distribución estará cargada hacia los valores inferiores a la media o las positivas, en cuyo caso la distribución estará cargada hacia los valores superiores; si se encuentra que pesan aproximadamente igual, la distribución será simétrica. Ahora bien, como hemos visto anteriormente la suma de las desviaciones respecto de la media es siempre igual a cero. Por tanto, utilizarlas directamente no sirve de mucho. Como se quiere conservar el signo, la solución consiste en elevarlas al cubo y utilizar las desviaciones $(x_i - \bar{x})^3$. Razonando como se hizo en el caso de la varianza debemos considerar la media de éstas, es decir, el valor

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{n}$$

Este valor vendrá expresado en unidades al cubo; para obtener una medida sin dimensiones, se divide por el cubo de la desviación típica. La medida así obtenida se llama *coeficiente de asimetría de Fisher*.

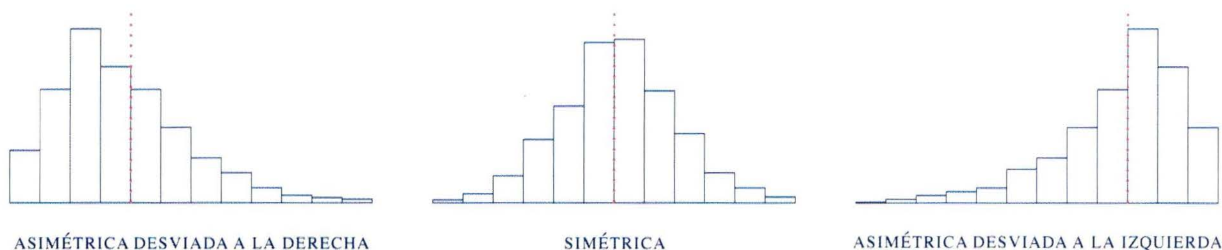


Figura 5.18: Distribuciones simétrica y asimétricas.

COEFICIENTE DE ASIMETRÍA

5.80

*El **coeficiente de asimetría** de un conjunto de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es la media aritmética de los cubos de sus desviaciones respecto de la media aritmética dividido por el cubo de la desviación típica. Se representa por g_1 y la fórmula para calcularlo es:*

$$g_1 = \frac{(x_1-\bar{x})^3 + (x_2-\bar{x})^3 + \cdots + (x_n-\bar{x})^3}{n\, s^3} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{n\, s^3}$$

EJEMPLO 5.90 Vamos a calcular el coeficiente de simetría de los datos de la tabla 5.10. De nuevo haremos los cálculos con detalle, como se muestra en la tabla 5.24. La media y la desviación típica, calculadas anteriormente, son $\bar{x} = 1335$, $s = 174.36$. Las desviaciones respecto de la media vienen en la tercera columna de la tabla y en la cuarta columna están las desviaciones elevadas al cubo. El coeficiente de asimetría es la media aritmética de estos números dividida por el cubo de la desviación típica:

	x_i	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^3$
1	1200	−135	−2460375
2	1425	90	729000
3	1600	265	18609625
4	1350	15	3375
5	1100	−235	−12977875
	Total	0	3903750

Tabla 5.24: Cálculo del coeficiente de asimetría de los salarios.

$$g_1 = \frac{3903750}{5 \cdot 174.36^3} = 0.1473$$

EJEMPLO 5.91

a) El coeficiente de asimetría de la variable *estatura* de la tabla de Galton es

$$g_{1_e} = \frac{(64.00-68.00)^3 + \cdots + (69.60-68.00)^3}{400 \cdot 2.7^3} = 0.1794$$

b) El coeficiente de asimetría de la variable *peso* de la tabla de Galton es

$$g_{1_p} = \frac{(111.50-144.06)^3 + \cdots + (136.00-144.06)^3}{400 \cdot 17.04^3} = 1.11$$

COEFICIENTE DE ASIMETRÍA: DISTRIBUCIÓN FRECUENCIAS ABSOLUTAS

Cuando los datos se presentan en una tabla de frecuencias, el cálculo del coeficiente de asimetría se realiza de forma similar a como se explicó en el caso de la varianza. En concreto, tenemos los resultados siguientes:

5.81

Si los datos están resumidos en una tabla de frecuencias absolutas, como la tabla 5.12 (a), el coeficiente de asimetría, g_1, se calcula por la fórmula:

$$g_1 = \frac{(x_1-\bar{x})^3F_1 + (x_2-\bar{x})^3F_2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^3F_n}{(F_1+F_2+\cdots+F_n)\; s^3} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3F_i}{N\, s^3}$$

Si los datos están resumidos en una tabla de frecuencias relativas, como la tabla 5.12 (b), el coeficiente de asimetría, g_1, se calcula por la fórmula: 5.82

$$g_1 = \frac{(x_1-\overline{x})^3 f_1 + (x_2-\overline{x})^3 f_2 + \cdots + (x_n-\overline{x})^3 f_n}{s^3} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^3 f_i}{s^3}$$

EJEMPLO 5.92 En la tabla 5.25 se muestra la disposición de los cálculos para encontrar el coeficiente de asimetría de una serie de datos dispuestos en tabla de frecuencias. La variable es el *número de hijos* de una población de mujeres. Se obtiene $g_1 = 0.7419$.

Encuesta de fecundidad (1999). Comunidad de Cantabria Número hijos vivos por mujer									
x_i	F_i	f_i	x_iF_i	$(x_i-\overline{x})$	$(x_i-\overline{x})^2$	$(x_i-\overline{x})^2\cdot F_i$	$(x_i-\overline{x})^3$	$(x_i-\overline{x})^3\cdot F_i$	$(x_i-\overline{x})^3\cdot f_i$
0	67434	0.4922	0	-0.8821	0.7780	52465.94	-0.6863	46278.22	-0.3377
1	27338	0.1995	27338	0.1179	0.0139	380.25	0.0016	44.85	0.0003
2	34474	0.2516	68948	1.1179	1.2498	43085.08	1.3972	48166.43	0.3515
3	6500	0.0474	19500	2.1179	4.4857	29156.79	9.5003	61752.27	0.4507
4	1267	0.0092	5068	3.1179	9.7215	12317.19	30.3111	38404.22	0.2803
Total	137013	1.0000	120854			137405.24		102089.55	0.7451

$\overline{x} = \frac{120854}{137013} = 0.88$ $\quad s^2 = \frac{137405.24}{137013} = 1.0029$ $\quad s = 1.0014$ $\quad g_1 = \frac{102089.55}{137013\cdot 1.0014^3} = 0.7419$

$g_1 = \frac{0.7451}{1.0014^3} = 0.7419$

Tabla 5.25: Cálculo del coeficiente de asimetría en una tabla de frecuencias.

Propiedades del coeficiente de asimetría

Algunas de las características mas destacadas del coeficiente de simetría se citan a continuación.

1. Es un coeficiente sin dimensiones.

2. Es invariante ante cambios de origen y escala.

3. Identifica el *sesgo* de la distribución:

- Si $g_1 = 0$, la distribución no tiene sesgo y es simétrica.
- Si $g_1 > 0$, la distribución es sesgada hacia la derecha y se dice que presenta asimetría positiva.
- Si $g_1 < 0$, la distribución es sesgada hacia la izquierda y se dice que presenta asimetría negativa.

COEFICIENTE DE APUNTAMIENTO

Como se ha dicho, el apuntamiento de una distribución distingue las distribuciones con la misma varianza en función del grado de concentración que muestran alrededor de la media. Sabemos que si los valores estén muy concentrados a su alrededor, las desviaciones $(x_i - \bar{x})$ son muy pequeñas. Una vez más, utilizamos estas cantidades para medir la concentración. Pero para reforzar el protagonismo de los valores alejados de la media utilizamos ahora la potencia cuarta de las desviaciones, es decir, usamos la serie de valores $(x_1 - \bar{x})^4$, $(x_2 - \bar{x})^4$, ..., $(x_4 - \bar{x})^4$. Cabe pensar que estos números son muy pequeños cuando los valores están muy próximos a la media y muy grandes en caso contrario; es decir, si un x_i dista de $\bar{x}$ menos de una unidad, el término $(x_i - \bar{x})^4$ será prácticamente despreciable; en cambio si la diferencia es mayor, al elevarla a la cuarta potencia se hará todavía más grande. Por tanto, las potencias cuartas de las desviaciones a la media pueden ser un buen indicador del apuntamiento o aplanamiento de la distribución. Al igual que se hizo al definir el coeficiente de asimetría, se tomará la media aritmética de dichas desviaciones a la cuarta, dividido por la desviación típica elevada también a la cuarta, al objeto de tener un coeficiente adimensional.

COEFICIENTE DE APUNTAMIENTO O CURTOSIS

5.83

*El **coeficiente de apuntamiento**, o **coeficiente de curtosis** de un conjunto de valores x_1, x_2, ..., x_n, es la media aritmética de las cuartas potencias de sus desviaciones respecto de la media aritmética, dividido por la desviación típica elevada a la cuarta potencia. Se representa por g_2 y la fórmula para calcularlo es:*

$$g_2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^4 + (x_2 - \bar{x})^4 + \cdots + (x_n - \bar{x})^4}{n\, s^4} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^4}{n\, s^4}$$

	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^4$
1	1200	−135	332 150 625
2	1425	90	65 610 000
3	1600	265	4 931 550 625
4	1350	15	50 625
5	1100	−235	3 049 800 625
	Total	0	8 379 162 500

Tabla 5.26: Cálculo del coeficiente de apuntamiento de los salarios.

EJEMPLO 5.93 Vamos a calcular el coeficiente de apuntamiento de los datos de la tabla 5.10. Los cálculos se muestran en la tabla 5.26. La media es $\bar{x} = 1335$ y la desviación típica es $s = 174.36$. Las desviaciones respecto de la media vienen en la tercera columna. En la cuarta columna se incluyen las desviaciones elevadas a

la cuarta. El coeficiente de apuntamiento es la media aritmética de estos números dividida por la desviación típica a la cuarta:

$$g_2 = \frac{8\,379\,162\,500}{5 \cdot 174.36^4} = 1.81$$

EJEMPLO 5.94

a) El coeficiente de apuntamiento de la variable *estatura* de la tabla de Galton es

$$g_{2_e} = \frac{(64.00 - 68.00)^4 + \cdots + (69.60 - 68.00)^4}{400 \cdot 2.7^4} = 3.45$$

b) El coeficiente de apuntamiento de la variable *peso* de la tabla de Galton es

$$g_{2_p} = \frac{(111.50 - 144.06)^4 + \cdots + (136.00 - 144.06)^4}{400 \cdot 17.04^4} = 5.94$$

.

Cuando los datos se presentan en forma de distribución de frecuencias, absolutas o relativas, las fórmulas del coeficiente de apuntamiento son completamente análogas a las del coeficiente de simetría. En concreto se tiene:

COEFICIENTE DE APUNTAMIENTO: DISTRIBUCIÓN FRECUENCIAS ABSOLUTAS

Si los datos están resumidos en una tabla de frecuencias absolutas, como la tabla 5.12 (a), el coeficiente de apuntamiento, g_2, se calcula por la fórmula: 5.84

$$g_2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^4 F_1 + (x_2 - \bar{x})^4 F_2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^4 F_n}{(F_1 + F_2 + \cdots + F_n)\ s^4} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^4 F_i}{N\ s^4}$$

COEFICIENTE DE APUNTAMIENTO: DISTRIBUCIÓN FRECUENCIAS RELATIVAS

Si los datos están resumidos en una tabla de frecuencias relativas, como la tabla 5.12 (b), el coeficiente de asimetría, g_2, se calcula por la fórmula: 5.85

$$g_2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^4 f_1 + (x_2 - \bar{x})^4 f_2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^4 f_n}{s^4} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^4 f_i}{s^4}$$

EJEMPLO 5.95 En la tabla 5.27 se muestra la disposición de los cálculos para encontrar el coeficiente de apuntamiento de una serie de datos dispuestos en tabla de frecuencias. La variable es el *número de hijos* de una población de mujeres. Se obtiene $g_2 = 2.5051$.

Encuesta de fecundidad (1999). Comunidad de Cantabria. Número hijos vivos por mujer									
x_i	F_i	f_i	x_iF_i	$(x_i-\overline{x})$	$(x_i-\overline{x})^2$	$(x_i-\overline{x})^2\cdot F_i$	$(x_i-\overline{x})^4$	$(x_i-\overline{x})^4\cdot F_i$	$(x_i-\overline{x})^4\cdot f_i$
0	67434	0.4922	0	-0.8821	0.7780	52465.94	0.6053	40820.28	0.2979
1	27338	0.1995	27338	0.1179	0.0139	380.25	0.0002	5.29	0.0000
2	34474	0.2516	68948	1.1179	1.2498	43085.08	1.5620	53847.07	0.3930
3	6500	0.0474	19500	2.1179	4.4857	29156.79	20.1211	130787.46	0.9546
4	1267	0.0092	5068	3.1179	9.7215	12317.19	94.5083	119741.96	0.8739
Total	137013	1.0000	120854			137405.24		345202.06	2.5194

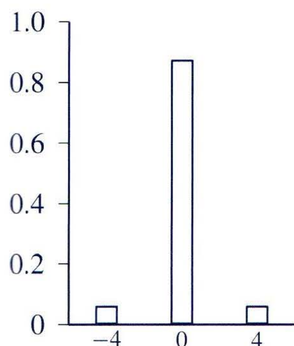
$$\overline{x}=\frac{120854}{137013}=0.88 \qquad s^2=\frac{137405.24}{137013}=1.0029 \qquad s=1.0014 \qquad g_2=\frac{345202.06}{137013\cdot 1.0014^4}=2.5051$$

$$g_2=\frac{2.5194}{1.0014^4}=2.5051$$

Tabla 5.27: Cálculo del coeficiente de apuntamiento en una tabla de frecuencias.

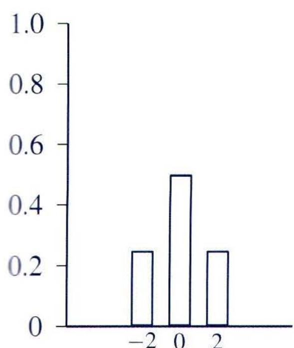
A diferencia del coeficiente de asimetría que puede valer cero cuando los valores de la variable se distribuyen con la misma frecuencia por encima y por debajo de la media, el coeficiente g_2 es siempre positivo, pues es el cociente de dos cantidades positivas, salvo en el caso de que todos los valores coincidan. Observemos la figura 5.19. En ella se incluye los diagramas de barras de dos distribuciones de frecuencias relativas, junto con el cálculo de sus medias, varianzas y coeficientes de apuntamiento. Como podemos comprobar las dos distribuciones tienen la misma media, $\overline{x}=0$ y la misma varianza $s^2=2$. Si sólo consideramos la varianza, concluimos que tienen la misma dispersión. Sin embargo, el coeficiente de apuntamiento es muy diferente: en un caso vale 8 y en el otro 2. Claramente, la distribución de la parte superior del gráfico parece 'más apuntada' que la de la parte inferior.

Todavía falta algo por decidir. Para poder decir que una distribución es más o menos apuntada hay que buscar una referencia que nos sirva de patrón para comparar su grado de apuntamiento. Para considerar objetivamente un apuntamiento neutral, o nulo, no hay otra solución que darlo por definición. Para ello se utiliza la llamada **distribución normal**. Su representación gráfica se ve en la figura 5.20. Esta distribución tiene muchas propiedades y se elige como patrón de apuntamiento. Como el coeficiente g_2 de la distribución normal es igual a 3, se decide que una distribución tiene un aplanamiento *normal*, cuando su coeficiente g_2 es igual a 3.



x_i	f_i	$x_i f_i$	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$	$(x_i-\bar{x})^4$	$(x_i-\bar{x})^4 f_i$
-4	0.0625	-0.25	-4	16	1	256	16
0	0.8750	0	0	0	0	0	0
4	0.0625	0.25	4	16	1	256	16
Total		0			2		32

$$\bar{x} = \sum x_i f_i = 0 \quad s^2 = \sum (x_i-\bar{x})^2 f_i = 2 \quad g_2 = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^4 f_i}{s^4} = \frac{32}{\left(\sqrt{2}\right)^4} = 8$$



x_i	f_i	$x_i f_i$	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$	$(x_i-\bar{x})^4$	$(x_i-\bar{x})^4 f_i$
-2	0.25	-0.5	-2	4	1	16	4
0	0.50	0	0	0	0	0	0
2	0.25	0.5	2	4	1	16	4
Total		0			2		8

$$\bar{x} = \sum x_i f_i = 0 \quad s^2 = \sum (x_i-\bar{x})^2 f_i = 2 \quad g_2 = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^4 f_i}{s^4} = \frac{8}{\left(\sqrt{2}\right)^4} = 2$$

Figura 5.19: Distribuciones con diferentes grados de apuntamiento

Propiedades del coeficiente de apuntamiento

El coeficiente de apuntamiento presenta característica similares a las del coeficiente de simetría.

1. Es un coeficiente sin dimensiones.
2. Es invariante ante cambios de origen y escala.
3. Identifica el grado de apuntamiento o *curtosis* de la distribución. De acuerdo con el convenio de compararlo con el de la distribución normal se establece que:

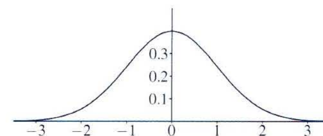


Figura 5.20: Curva normal $\mathcal{N}(0,1)$.



- Si $g_2 = 3$, la distribución tiene apuntamiento igual a la distribución normal y se dice que es *mesocúrtica*.
- Si $g_2 > 3$, la distribución es más apuntada que la normal y se dice que *leptocúrtica*.
- Si $g_2 < 0$, la distribución es menos apuntada que la normal y se dice que es *platicúrtica*.



6
DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

ACTIVIDADES

INTRODUCCIÓN

En las páginas precedentes hemos estudiado las principales aportaciones de las Matemáticas a la historia de la civilización. Comenzamos por delimitar el lenguaje matemático básico necesario para exponer de manera fundamentada los conceptos. Abordamos las cuestiones derivadas de la noción de cantidad, que nos han llevado a la necesidad de considerar diferentes conjuntos de números, junto con sus operaciones, para resolver nuestros problemas cotidianos de cálculo. Elaboramos los recursos conceptuales necesarios para resolver los problemas relativos a la medida del espacio en que vivimos y estudiar las propiedades de las formas que se observan en la naturaleza. Analizamos la problemática derivada del constante cambio del universo y las transformaciones de los objetos que se evidencian constantemente en nuestro entorno. Finalmente, desarrollamos herramientas para el manejo de la inevitable incertidumbre que entraña el transcurso de la vida, así como para el aprendizaje a través de la experiencia acumulada mediante la observación, recopilación y sistematización de las circunstancias en que transcurre nuestra existencia.

Como se ha podido apreciar, la presentación obedece a un esquema lógico que comienza por razonar sobre la necesidad de introducir cada uno de los conceptos, para pasar seguidamente a su formalización y desarrollo teórico, y concluir con diversos ejemplos ilustrativos de los mismos.

Todo el estudio anterior es, sin duda, imprescindible para la formación de una persona. Pero, si utilizamos una terminología muy al uso actualmente, hay que dar un paso adicional para llegar a adquirir y desarrollar un nivel adecuado de *competencia matemática.*

De poco sirven los conceptos teóricos y las técnicas matemáticas más elaboradas si no se saben utilizar para plantear y resolver en la práctica los problemas para los que fueron desarrollados. El salto de la teoría a la práctica es siempre un ejercicio que conlleva cierta dificultad, por lo que es imprescindible prepararse para ello de manera específica. Con frecuencia, esta preparación se da por sobreentendida en los programas de estudios, pero no llega a materializarse en unas actividades concretas dentro del curriculum.

Así pues, entendemos que, para completar el estudio de las matemáticas, es necesario reflexionar sobre la forma de utilizar los conocimientos matemáticos adquiridos en los capítulo precedentes para resolver problemas concretos con que nos encontramos en el mundo real. Este capítulo está dedicado a presentar algunas situaciones familiares, muy cercanas a la realidad cotidiana, en que se descubren de forma natural diversos proble-

mas que son susceptibles de ser abordados y resueltos con los conocimientos adquiridos en las páginas anteriores.

El esquema de presentación parte de la descripción de la situación, que denominaremos el *contexto*, en la cual se proporciona la información necesaria, y en ocasiones posiblemente superflua, para plantear y resolver una serie de actividades que se incluyen a continuación. Es muy importante leer con atención el contexto, pues en él se encuentran todos los datos precisos para resolver adecuadamente las actividades propuestas.

El formato de las actividades mantiene el modelo de prueba objetiva que hemos utilizado en las cuestiones de autoevaluación. Para la comprensión de los enunciados de la cuestión planteada y su resolución será necesario recurrir a alguno de los conceptos matemáticos conocidos, o a las técnicas y métodos estudiados.

Pero la simple utilización, más o menos mecánica, de las definiciones y resultados del texto no será suficiente. Además, habrá que movilizar un conjunto de capacidades que, junto con los conocimientos, configuran la noción de competencia matemática.

Así, entre otras, habrá que valerse de la capacidad de *comunicación* para entender el texto y extraer de los enunciados la información relevante para la cuestión planteada; la capacidad de *utilizar un lenguaje formal, simbólico y técnico* para traducir la cuestión al lenguaje matemático; la capacidad de *razonar y argumentar* para deducir de la información suministrada las respuestas correctas; la capacidad para *construir modelos matemáticos* para representar la realidad, ecuaciones, figuras geométricas, modelos probabilísticos; y la capacidad para *utilizar herramientas de apoyo* como los ordenadores o, simplemente, las calculadoras.

Sólo cuando se consiga ensamblar en un todo, por una parte los conocimientos estudiados en los capítulos de fundamentos, aritmética y álgebra, geometría, análisis y probabilidad y estadística, y por otra parte ciertas capacidades como las descritas anteriormente para saber utilizar prácticamente dichos conocimientos, podemos confiar en que la formación adquirida nos ha capacitado para tener un nivel adecuado de *competencia matemática*, lo cual, en definitiva, es uno de los objetivos primordiales que persigue un curso de preparación para el acceso a la universidad.

1 NÓMINAS

CONTEXTO

El salario de un trabajador está normalmente integrado por diferentes conceptos: sueldo base, antigüedad en la empresa, complementos específicos del puesto, horas extraordinarias, etc. La suma de todas estas cantidades constituye el llamado *sueldo bruto* que figura normalmente en las ofertas de trabajo o negociaciones que establecen las empresas y trabajadores.

Como es conocido, el trabajador no cobra materialmente la totalidad del sueldo bruto. Por exigencia legal, el pagador está obligado a descontar diversas cantidades que reducen lo percibido al *sueldo neto*. Dos son los principales capítulos que configuran dichos descuentos: el impuesto sobre la renta de las personas físicas (IRPF) y las cotizaciones a la Seguridad Social (SS).

El IRPF tiene carácter progresivo, es decir, su importe depende del nivel de renta anual del sujeto: a más renta, más impuesto. Se rige por una amplia normativa que contempla una extensa casuística. Por lo que se refiere a los sueldos de los trabajadores, las empresas tienen la obligación de retener al trabajador, y traspasar a la hacienda pública, un porcentaje del sueldo bruto como cantidad *"a cuenta"* del resultado de la liquidación anual del IRPF que venga obligado a presentar dicho trabajador. Dicho porcentaje de retención depende no sólo del importe bruto del sueldo, sino también de la situación personal y familiar del trabajador.

Entre las principales cotizaciones sociales se cuentan las denominadas *contigencias comunes*, *desempleo* y *formación profesional*. Todas ellas se calculan como un porcentaje de una cantidad mensual denominada *base de cotización* que depende de circunstancias como la categoría profesional del trabajador, el tipo de contrato de trabajo, u otras. En general, dicha base de cotización es el resultado de dividir el sueldo bruto anual entre los doce períodos mensuales de cotización, aunque debe encontrarse entre ciertos límites mínimo y máximo. Actualmente, la base mensual mínima es de 753.00 euros y la máxima de 3,597.00 euros.

Habitualmente, el sueldo anual se recibe en 14 pagas, una por cada mes del año más dos pagas extraordinarias que suelen abonarse en el mes de junio y diciembre respectivamente. La retención a cuenta del IRPF se calcula sobre el importe bruto de la parte del sueldo que realmente se ha percibido cada mes.

Conceptos retributivos	Euros	Descuentos	Euros
Sueldo	[illegible]	Ctg. comunes (4.70 %)	[illegible]
Trienios	[illegible]	Desempleo (1.60 %)	[illegible]
Cp. general	[illegible]	Formación (0.10 %)	[illegible]
Cp. personal	14.08	IRPF (14 %)	207.93
Total	[illegible]	Total	[illegible]
		Importe líquido total a percibir	[illegible]

Tabla 6.1: Nómina de un trabajador, con errores en la impresión.

La tabla 6.1 es una copia de la nómina de un trabajador con errores en la impresión. En las dos primeras columnas figuran los distintos conceptos retributivos de la nómina y sus importes correspondientes: sueldo (s), trienios (t), complemento general (g) y complemento personal (p). Únicamente se ve claro el dato que se refiere al complemento personal (14.08 euros). Llamaremos R al conjunto de conceptos retributivos, es decir, $R = \{s, t, g, p\}$. En las dos últimas columnas figuran los conceptos de descuento y el importe resultante: contigencias comunes (c), desempleo (d), formación (f) e IRPF (i). Sólo se ve claro en el caso del IRPF (207.93 euros). Llamaremos D al conjunto de descuentos, es decir, $D = \{c, d, f, i\}$. Llamaremos $\mathscr{U}$ al conjunto universal que incluye todos los elementos que configuran la nómina, es decir, $\mathscr{U} = \{s, t, g, p, c, d, f, i\}$.

Como se ha indicado anteriormente, el descuento del IRPF se hace sobre los ingresos totales de la nómina. En cambio, los otros tres descuentos correspondientes a la SS, se calculan como un porcentaje de la base imponible mensual, que se obtiene como la duodécima parte de los ingresos brutos anuales. Dichos ingresos brutos resultan de sumar las doce pagas ordinarias, como la que recoge la tabla 6.1, más dos pagas extra.

El trabajador que percibe la nómina de la tabla 6.1 sabe que las pagas extras son ligeramente inferiores a las ordinarias, pues se diferencian de éstas en la cantidad del complemento personal, 14.08 euros, que no se percibe en ninguna de las dos extras.

ACTIVIDADES

1.1 Sea $C = \{c, d, f\}$ el conjunto formado por los descuentos que integran las llamadas cotizaciones sociales que se retienen del sueldo de un trabajador y sea D el conjunto de todos los descuentos. ¿Cuál de las siguientes notaciones describe con precisión la relación existente entre C y D?

a) $C \leq D$.
b) $C \in D$.
c) $C \subset D$.

1.2 Sea $S = \{s, t\}$ el conjunto formado por los conceptos retributivos básicos y $P = \{g, p\}$ el conjunto de conceptos retributivos que corresponden a complementos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) $P \subset S$.
b) $P \cap S = \emptyset$.
c) $P \cup S = \mathscr{U}$.

1.3 Sea $F = \{s, t, g\}$ el conjunto integrado por los conceptos retributivos que incluyen todas las nóminas del año y $P = \{g, p\}$ el conjunto de conceptos retributivos que corresponden a complementos. Entonces, la notación correcta para representar por enumeración la intersección de estos dos conjuntos es

a) $F \cap P = g$.
b) $F \cap P = \{g\}$.
c) $F \cap P = \{\{g\}\}$.

1.4 Sean R y D el conjunto de conceptos retributivos y el conjunto de descuentos del salario de un trabajador, indicados en el enunciado. Entonces se cumple:

a) $\#(R) < \#(D)$.
b) $\#(R) = \#(D)$.
c) $\#(R) > \#(D)$.

1.5 Sean R y D el conjunto de conceptos retributivos y el conjunto de descuentos del salario de un trabajador, indicados en el enunciado. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Entre R y D no se puede establecer ninguna aplicación biyectiva.
b) Entre R y D se puede establecer una aplicación biyectiva y una sola.
c) Entre R y D se pueden establecer varias aplicaciones biyectivas distintas.

1.6

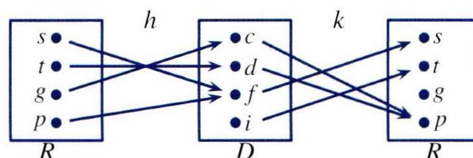
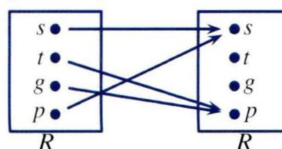


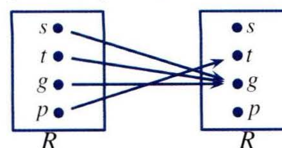
Figura 6.1: Representación de las aplicaciones $h : R \mapsto D$ y $k : D \mapsto R$.

Sean R y D el conjunto de conceptos retributivos y el conjunto de descuentos del salario de un trabajador, indicados en el enunciado. Sean $h : R \mapsto D$ y $k : D \mapsto R$ las aplicaciones definidas en la figura 6.1. Entonces la composición de las dos aplicaciones, es decir, la aplicación $k \circ h$

a) puede representarse mediante la figura



b) puede representarse mediante la figura



c) no está definida, puesto que hay elementos que no tienen imagen.

1.7 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. La cantidad que debe figurar como suma total de los conceptos retributivos

a) es 1,471.13 euros.
b) es 1,485.21 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.8 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. La cantidad que debe figurar como suma total de los conceptos retributivos de una paga extra

a) es 1,471.13 euros.
b) es 1,485.21 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.9 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El sueldo bruto total, sin descuentos, percibido a lo largo de un año es

a) es 20,764.78 euros.
b) es 20,792.94 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.10 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. La base de cotización mensual para calcular las cuotas de la Seguridad Social

a) es 1,732.74 euros.
b) es 1,730.40 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.11 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El importe que debe figurar en la casilla correspondiente al descuento por contingencias comunes

a) es 81.33 euros.
b) es 80.78 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.12 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El importe que debe figurar en la casilla correspondiente al descuento por desempleo

a) es 27.50 euros.
b) es 27.69 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.13 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El importe que debe figurar en la casilla correspondiente al descuento por formación

a) es 1.73 euros.
b) es 17.30 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.14 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El importe que debe figurar en la casilla correspondiente al total de descuentos

a) es 126.32 euros.
b) es 318.68 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.15 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El importe líquido total a percibir

a) es 1,183.13 euros.
b) es 1,166.53 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.16 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. Después de consultar con un compañero, el trabajador ha conseguido averiguar que el complemento general que corresponde a su categoría asciende a 546.12 euros. Entonces la cantidad que debe figurar en la casilla correspondiente a sueldo

a) es 880.96 euros.
b) es 925.01 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.17 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El trabajador ha averiguado que el complemento general que corresponde a su categoría asciende a 546.12 euros y también que la retribución adicional por cada trienio es igual a un 5 % del sueldo. Haciendo memoria de cuando fue contratado, calcula que ha cumplido ya un trienio. Entonces la cantidad que debe figurar en la casilla correspondiente al sueldo

a) es 880.96 euros.
b) es 925.01 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.18 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. Supongamos que en lugar de percibir el complemento personal, al trabajador se le ofrece la posibilidad de realizar horas extraordinarias, a razón de un

0.5 % del sueldo bruto, excluido el complemento personal, por cada hora trabajada. ¿Cuántas horas extraordinarias debe realizar el trabajador, como mínimo, para que le compense económicamente el cambio.

a) 2.
b) 5.
c) 10.

1.19 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?

a) Por cada 50 euros de sueldo bruto total, se descuentan 7 euros en concepto de IRPF.
b) Por cada 100 euros de sueldo bruto total, se descuentan más de 7 euros en concepto de cotizaciones a la SS.
c) Por cada 10 euros de sueldo bruto total, se descuentan más de 2 euros en concepto de IRPF y cotizaciones a la SS.

1.20 Llamemos S al sueldo base mensual actual de un trabajador, sin considerar trienios ni complementos. Supongamos que cada trienio equivale a un 5 % del sueldo base vigente y que el trabajador tiene una antigüedad equivalente a 1 trienio. Supongamos también que en el próximo mes el sueldo base S va a incrementarse un 2 % y además el trabajador cumple un nuevo trienio. Entonces el porcentaje de aumento correspondiente a la parte del salario integrada por el sueldo base más la antigüedad es

a) 6.42 %.
b) 6.86 %.
c) 7.00 %.

1.21 Consideremos los siguientes intervalos de números reales: $I_1 = (-\infty, 753)$, $I_2 = (3597, \infty)$. Según el enunciado, si x es el número real que da, en euros, la base mensual de cotización a la Seguridad Social de un trabajador se tiene que cumplir:

a) $x \in I_1 \cup I_2$.
b) $x \in I_1 \cap I_2$.
c) $x \in I_1^c \cap I_2^c$.

2 EL RECIBO DEL AGUA

CONTEXTO

El servicio de agua corriente es uno de los servicios básicos que precisan los núcleos de población. Habitualmente lo proporciona una empresa que se ocupa de la gestión del suministro en colaboración con entidades públicas como las comunidades autónomas y los ayuntamientos.

En la tarifa del agua intervienen diversos conceptos relacionados con el ciclo del agua:

- *Abastecimiento:*
  - *Aducción:* captación, embalse, conducción por arterias o tuberías primarias, tratamiento y depósito.
  - *Distribución:* transporte del agua desde los depósitos de los municipios hasta las acometidas particulares a través de las redes de tuberías.
- *Saneamiento:*
  - *Alcantarillado:* recogida de aguas residuales y pluviales, y su evacuación a los distintos puntos de vertido.
  - *Depuración:* devolución del agua a los cauces o medios receptores, una vez que ha sido convenientemente depurada.

Los servicios se suelen facturar bimestralmente e incluyen una *cuota fija de servicio* y una *parte variable.*

La cuota fija garantiza la disponibilidad del servicio y que se factura independientemente de que exista o no consumo. Se definen para períodos de consumo de 60 días, debiéndose ajustar al número de días reales que conforman el período a facturar. Su importe es función del diámetro del contador D expresado en milímetros, el número N de viviendas abastecidas por la toma y el número DP de días de servicio durante el período factu-

rado. Para su cálculo se utilizan las expresiones siguientes:

- *Aducción:*

$$0.0178(D \times D + 225N) \times (DP/60)$$

- *Distribución:*

$$0.0081(D \times D + 225N) \times (DP/60)$$

- *Depuración:*

$$(3.1433 \times N) \times (DP/60)$$

Por su parte, el servicio de *alcantarillado* no incluye coste fijo.

La parte variable es función del consumo realizado en el bimestre. Se calcula multiplicando el número de metros cúbicos realmente consumidos por un coeficiente, expresado en euros por metro cúbico, que es diferente según distintos tramos de volumen de consumo, como se indica en la tabla 6.2. Como se puede apreciar, el servicio de aducción presenta también variación estacional.

	Aducción	
Consumo	Invierno (resto del año)	Verano (1-jun a 30-sep)
Hasta 25m^3	0.2971€/m^3	0.2971€/m^3
De 25 a 50m^3	0.5496€/m^3	0.6869€/m^3
Más de 50m^3	1.3176€/m^3	1.9766€/m^3

	Distribución	Depuración
Consumo	Precio m^3	Precio m^3
Hasta 25m^3	0.1337€/m^3	0.3121€/m^3
De 25 a 50m^3	0.2107€/m^3	0.3564€/m^3
Más de 50m^3	0.5021€/m^3	0.5436€/m^3

Tabla 6.2: Cuotas de la parte variable de los distintos servicios, según el nivel de consumo y período del año.

En algunas poblaciones, el servicio de *alcantarillado* es prestado directamente por los servicios municipales. En este caso, la empresa suministradora actúa como simple recaudadora y traspasa al ayuntamiento el importe proporcional.

Como se ha indicado anteriormente, el servicio de *alcantarillado* sólo se compone de parte variable, a razón de 0.2240€/m^3 por cada metro cúbico de consumo.

Todos los servicios están sujetos al impuesto del valor añadido (IVA), con un tipo del 10 %, excepto el servicio de alcantarillado que está exento de IVA.

Denotaremos con $C = \{a_1, d_1, a_2, d_2\}$ al conjunto cuyos elementos son los conceptos que figuran en la factura del agua: a_1 = *aducción*, d_1 = *distribución*, a_2 = *alcantarillado* y d_2 = *depuración*. Denotaremos con $P = \{s, u\}$ al conjunto de perceptores de dichos conceptos: s = *empresa suministradora* y u = *ayuntamiento*.

ACTIVIDADES

2.1 Consideremos los siguientes subconjuntos de C:

$$A = \{a_1, d_1\}, S = \{a_2, d_2\}, E = \{a_1, d_1, d_2\}, Y = \{a_2\}$$

Entonces se cumple:

a) $E - S = A$.
b) $E - S = Y$.
c) $E - S = A \cap Y$.

2.2 Consideremos los siguientes subconjuntos de C:

$$A = \{a_1, d_1\}, S = \{a_2, d_2\}, E = \{a_1, d_1, d_2\}, Y = \{a_2\}$$

Entonces se cumple:

a) $(E \cap S)^c = A$.
b) $(E \cap S)^c = Y$.
c) $(E \cap S)^c = A \cup Y$.

2.3 Consideremos los siguientes subconjuntos de C:

$$A = \{a_1, d_1\}, S = \{a_2, d_2\}, E = \{a_1, d_1, d_2\}, Y = \{a_2\}$$

Entonces se cumple:

a) $(A \cap S) \cup (E \cap Y) = C$.
b) $(A \cap S) \cup (E \cap Y) = \emptyset$.
c) $(A \cap S) \cup (E \cap Y) = (A \cap S)^c \cap (E \cap Y)^c$.

2.4 Sea $f : C \mapsto P$ la aplicación que, según la información proporcionada por el enunciado, asigna cada concepto a su correspondiente perceptor definida en la figura 6.2.

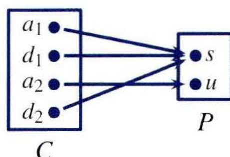


Figura 6.2: Representación de la aplicación f que asigna cada concepto de la factura de suministro de agua a su correspondiente perceptor.

Consideremos el subconjunto de C formado por los conceptos relativos al abastecimiento, $A = \{a_1, d_1\}$. Entonces

a) $f(A) = s$.
b) $f(A) = \{s\}$.
c) $f(A)$ no está definido, pues A es un subconjunto.

2.5 Sea $f : C \mapsto P$ la aplicación definida en la figura 6.2 que asigna cada concepto a su correspondiente perceptor, según la información proporcionada por el enunciado. Entonces

a) $f^{-1}(\{u\}) = \emptyset$.
b) $f^{-1}(\{u\}) = a_2$.
c) $f^{-1}(\{u\}) = \{a_2\}$.

2.6 La aplicación $f : C \mapsto P$ definida en la figura 6.2 que asigna cada concepto a su correspondiente perceptor, según la información proporcionada el enunciado

a) es inyectiva.
b) es sobreyectiva.
c) es biyectiva.

2.7 Una compañía de servicio de suministro de agua corriente quiere recoger información sobre el nivel de satisfacción de los usuarios del servicio. Para ello, facilita una lista de clientes a dos encuestadores independientes para que, a lo largo de una semana, contacten con todas las personas de la lista que puedan localizar. Uno de los encuestadores entrega 284 encuestas, mientras que el otro entrega 223. Al cotejar los datos de identificación, la compañía constata que hay bastantes coincidencias, por lo que el número de personas distintas realmente encuestadas sólo asciende a 458. ¿Cuántas personas fueron entrevistadas por ambos encuestadores?

a) 61.
b) 49.
c) Con los datos proporcionados no se puede saber con exactitud.

2.8 Según la información proporcionada por el enunciado, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) El porcentaje de IVA, aproximado con una cifra decimal, con que viene cargado el importe de distribución es el 10.0 %.
b) El porcentaje de IVA, aproximado con una cifra decimal, con que viene cargado el importe de alcantarillado es el 0.0 %.
c) El porcentaje de IVA, aproximado con una cifra decimal, con que viene cargado el importe total de la factura de suministro de agua es el 10.0 %.

2.9 Según los datos de la tabla 6.2, el incremento del coeficiente multiplicador para el cálculo del coste variable del servicio de aducción en verano con respecto al invierno, en el tramo de consumo correspondiente al intervalo $[25, 50)$

a) es aproximadamente igual al 0.00 %.
b) es aproximadamente igual al 25.00 %.
c) es aproximadamente igual al 50.00 %.

2.10 Según los datos de la tabla 6.2, el incremento del coeficiente multiplicador para el cálculo del coste variable del servicio de aducción en verano con respecto al invierno, en el tramo de consumo correspondiente al intervalo $[50, \infty)$

a) es aproximadamente igual al 0.00 %.
b) es aproximadamente igual al 25.00 %.
c) es aproximadamente igual al 50.00 %.

2.11 El propietario de una vivienda unifamiliar, cuyo contador del agua tiene un diámetro de 13 mm, recibe la factura correspondiente al período 11-Octubre-20XX al 11-Diciembre-20XX, en la cual se indica que ha realizado un consumo de 33 m^3. Entonces, de acuerdo con la

información proporcionada en el enunciado, el importe de la cuota fija del servicio de aducción, IVA incluido, que debe figurar en la factura es igual a

a) 7.84.
b) 7.59.
c) 8.81.

2.12 El propietario de una vivienda unifamiliar, cuyo contador del agua tiene un diámetro de 13 mm, recibe la factura correspondiente al período 11-Octubre-20XX al 11-Diciembre-20XX, en la cual se indica que ha realizado un consumo de 33 m^3. Entonces, de acuerdo con la información proporcionada en el enunciado, el importe de la cuota fija del servicio de distribución, IVA incluido, que debe figurar en la factura es igual a

a) 7.84.
b) 3.56
c) 1.53.

2.13 El propietario de una vivienda unifamiliar, cuyo contador del agua tiene un diámetro de 13 mm, recibe la factura correspondiente al período 11-Octubre-20XX al 11-Diciembre-20XX, en la cual se indica que ha realizado un consumo de 33 m^3. Entonces, de acuerdo con la información proporcionada en el enunciado, el importe de la cuota fija del servicio de depuración, IVA incluido, que debe figurar en la factura es igual a

a) 7.84.
b) 3.57.
c) 3.52.

2.14 El propietario de una vivienda unifamiliar, cuyo contador del agua tiene un diámetro de 13 mm, recibe la factura correspondiente al período 11-Octubre-20XX al 11-Diciembre-20XX, en la cual se indica que ha realizado un consumo de 33 m^3. Entonces, de acuerdo con la información proporcionada en el enunciado, el importe de la cuota fija del servicio de alcantarillado, IVA incluido, que debe figurar en la factura

a) es igual a 7.84.
b) es igual a 7.39.
c) no se puede calcular pues faltan datos.

2.15 El propietario de una vivienda unifamiliar, cuyo contador del agua tiene un diámetro de 13 mm, recibe la factura correspondiente al período 11-Octubre-20XX al 11-Diciembre-20XX, en la cual se indica que ha realizado un consumo de 33 m^3. Entonces, de acuerdo con la información proporcionada en el enunciado, el importe de la parte variable del servicio de aducción, IVA incluido, que debe figurar en la factura es igual a

a) 14.21
b) 11.82
c) 13.00

2.16 El propietario de una vivienda unifamiliar, cuyo contador del agua tiene un diámetro de 13 mm, recibe la factura correspondiente al período 11-Octubre-20XX al 11-Diciembre-20XX, en la cual se indica que ha realizado un consumo de 53 m^3. Entonces, de acuerdo con la información proporcionada en el enunciado, el importe de la parte variable del servicio de distribucción, IVA incluido, que debe figurar en la factura es igual a

a) 11.13
b) 15.27
c) 29.27

2.17 La función $f : [0,\infty) \mapsto I\!R$, representada en la figura 6.3, que a cada valor real le asigna el coeficiente multiplicador para el cálculo del coste del servicio de aducción en la temporada de invierno en función de los tramos de consumo de un determinado período

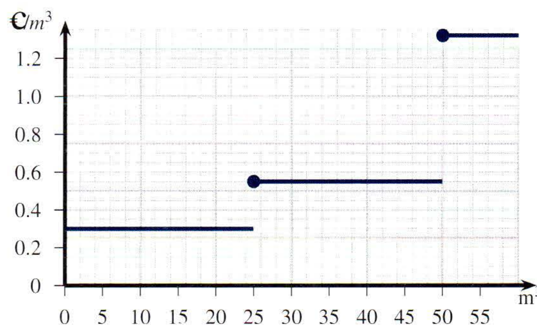
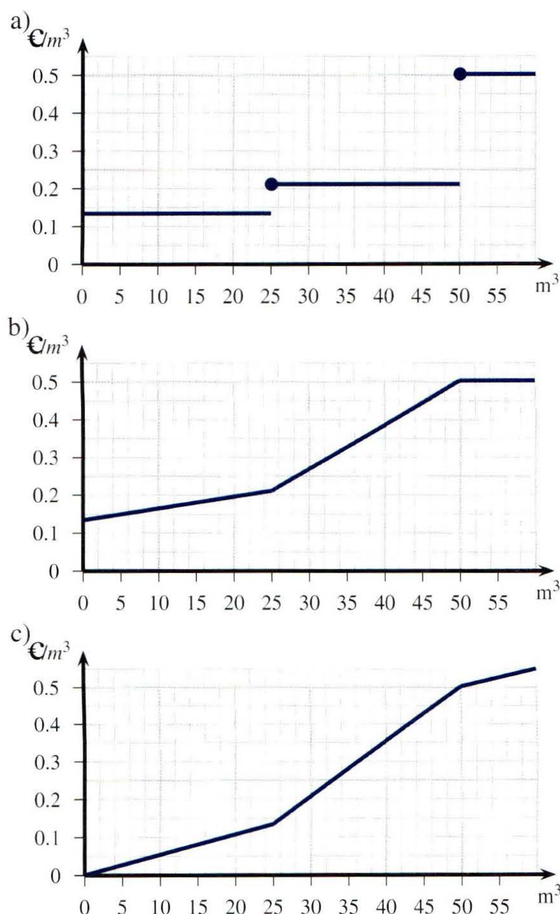


Figura 6.3: Gráfica del valor del coeficiente multiplicador para el cálculo del coste variable del servicio de aducción en temporada de invierno según los distintos tramos de consumo.

a) es creciente en el intervalo $[0,\infty)$.
b) es decreciente en el intervalo $[0,\infty)$.
c) no es ni creciente, ni decreciente, en el intervalo $[0,\infty)$.

2.18 Según los datos de la tabla 6.2, ¿cuál de las siguientes gráficas representa mejor la función que da el valor del coeficiente, en €/m^3, con el cual se calcula en el recibo la parte variable del servicio de distribución, según los diferentes tramos de consumo del período?



2.19 La función $f : [0,\infty) \mapsto I\!R$, representada en la figura 6.4, que a cada valor real le asigna el coeficiente de coste del servicio de depuración en función de los tramos de consumo de un determinado período

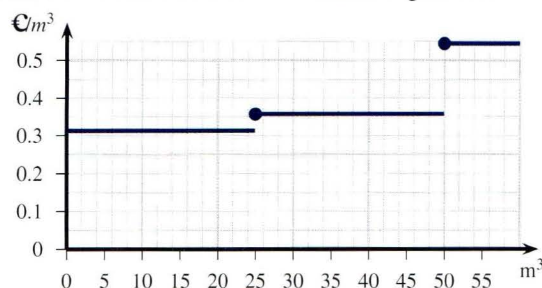


Figura 6.4: Gráfica del valor del coeficiente multiplicador para el cálculo del coste variable del servicio de depuración según los distintos tramos de consumo.

a) es continua en todos los puntos del intervalo $[0,\infty)$.
b) es continua en todos los puntos del intervalo $[0,25)$.
c) es continua en todos los puntos del intervalo $[0,50)$.

2.20 En la figura 6.5 se representa la gráfica una función $f : [0,\infty) \mapsto I\!R$ que asigna a cada número de metros cúbicos consumidos el importe en euros de un determinado servicio incluido en la factura del agua. ¿De qué servicio se trata?

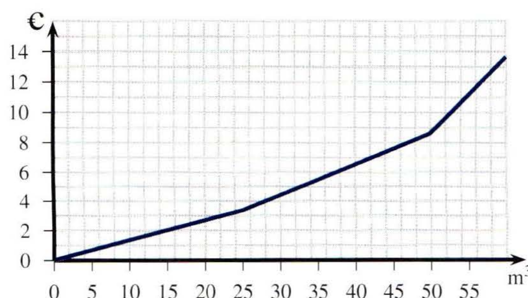


Figura 6.5

a) El servicio de aducción en temporada de invierno.
b) El servicio de distribución.
c) El servicio de alcantarillado.

3 CENTROS COMERCIALES

CONTEXTO

Las grandes superficies comerciales forman parte de nuestra vida cotidiana. Son lugares de compras, ocio y encuentro con los amigos. Se accede fácilmente con nuestros propios vehículos, pues disponen de cómodos aparcamientos. Algunos, incluso están bien comunicados mediante transporte público. Dan respuesta, en un espacio reducido, a la mayoría de nuestras demandas relativas a la economía doméstica: supermercados, tiendas de ropa y calzado, menaje del hogar, aparatos, oficinas de servicios, restaurantes, salas de cine y esparcimiento, etc. Sus mensajes publicitarios nos asedian e inducen al consumo. Constantemente anuncian tentadoras ofertas y dan oportunas facilidades de pago.

La figura 6.6 representa un esquema del plano de un gran centro comercial. Se aprecian las diferentes zonas en que se agrupan las tiendas y lo servicios: supermercados, grandes almacenes, cines, aparcamientos, etc. En los pasillos y escaparates encontramos numerosos carteles publicitarios con diferentes eslóganes. Los supermercados nos ofrecen cupones de oferta, y en las colas de los cines se escuchas discusiones amistosas sobre qué película ver.

Sin duda, para sacar provecho de la visita a un centro comercial es imprescindible disponer de un buen bagaje de conocimientos matemáticos.

ACTIVIDADES

3.1 ¿Cuál de los siguientes eslóganes es una proposición lógica?

a) ¡Sumérgete en el verano!
b) ¡Te esperamos!
c) ¡Que no te lo cuenten!

3.2 ¿Cuál de los siguientes eslóganes no es una proposición lógica?

a) La elegancia del geométrico estampa tu verano.
b) La moda brilla bajo el sol.
c) ¿Por qué no te quedas a comer?

3.3 El eslogan *"abrir una lata no es cocinar"*

a) Es una proposición lógica simple.
b) Es una proposición lógica compuesta.
c) No es una proposición lógica.

3.4 El razonamiento: *"Cuando es verano, los precios están rebajados. Si hace calor es verano. Hoy no hace calor. Luego, los precios no están rebajados.*

a) Es lógicamente válido.
b) Es una falacia.
c) Sin añadir otras premisas no se puede decidir si es lógicamente válido o es una falacia.

3.5 Las tiendas de un centro comercial se agrupan en sectores, según el tipo de productos que se pueden encontrar en cada una. Uno de ellos es el sector *Cultura, Multimedia y Tecnología*. Este sector, a su vez, se divide en lo siguientes subsectores: E = *Electrónica*, L = *Libros, música y multimedia* y T = *Telefonía e internet*. En el plano del centro comercial leemos qué tiendas pertenecen a cada subsector:

E = {Apple, Corte Inglés Ocio, FNAC, Infosonido, MediaMarkt}

L = {Corte Inglés Ocio, FNAC, Game, Game Stop, MediaMarkt}

T = {All Cell, Fonoespacio, Internity Vodafone, Ono, Orange I, Orange II, Telandcom, The Phone House, Yoigo}

¿Cuál de las afirmaciones siguientes está equivocada?

a) $E \cap L = \emptyset$.
b) $E \cap T = \emptyset$.
c) $L \cap T = \emptyset$.

3.6 Las tiendas de un centro comercial se agrupan en sectores, según el tipo de productos se que pueden encontrar en cada una. Uno de ellos es el sector *Cultura, Multimedia y Tecnología*. Este sector, a su vez, de divide en lo siguientes subsectores: E = *Electrónica*, L



Figura 6.6: Plano esquemático de un centro comercial.

= *Libros, música y multimedia* y T = *Telefonía e internet*. En el plano del centro comercial leemos qué tiendas pertenecen a cada subsector:

E = {Apple, Corte Inglés Ocio, FNAC, Infosonido, MediaMarkt}

L = {Corte Inglés Ocio, FNAC, Game, Game Stop, MediaMarkt}

T = {All Cell, Fonoespacio, Internity Vodafone, Ono, Orange I, Orange II, Telandcom, The Phone House, Yoigo}

Se verifica que

a) $\#(E \cup L) = 7$.
b) $\#(E \cup T) = 12$.
c) $\#(L \cup T) = 12$.

3.7 Compramos una impresora PrintJet PRO que tiene un precio de venta al público de 199.95€. Pedimos que nos hagan una factura con el IVA desglosado. Entonces en la factura tiene que poner:

a)

Impresora PrinJet PRO	......	157.96€
IVA (21 %)	......	41.99€
Total	......	199.95€

b)

Impresora PrinJet PRO	......	165.25€
IVA (21 %)	......	34.70€
Total	......	199.95€

c)

Impresora PrinJet PRO	......	165.25€
IVA (21 %)	......	41.99€
Total	......	199.95€

3.8 Un bolso de piel tiene un precio de 89.95 euros en plena temporada. En las rebajas, lo consigo por 49.95 euros. Entonces, el porcentaje de variación en el precio ha sido

a) 44.47 %.
b) −80.08 %.
c) −44.47 %.

3.9 Un centro comercial ofrece un vale de regalo de 10

euros en las siguientes condiciones: si una compra supera los 50 euros, se obtiene el vale que se puede usar en la próxima compra, siempre que ésta también supere los 50 euros. Hicimos una primera compra por un total de 85.50 euros, por lo que se nos obsequió con el vale. En la segunda compra, que ascendió a 152.25 euros, utilizamos el vale, por lo cual sólo hubo que abonar 142.25 euros. ¿Qué porcentaje de descuento se obtuvo en total?



Figura 6.7: Bono descuento de un centro comercial.

a) 20 %.
b) 4.39 %.
c) 4.21 %.

3.10 Según las estadísticas, de cada 5 personas que visitan un centro comercial, 3 son mujeres. Asimismo, se sabe que dos de cada tres mujeres visitantes pueden calificarse de asiduas, pues acceden al centro con frecuencia. En cambio, los hombres visitantes que pertenecen al grupo de no asiduos son 7 de cada 11. Si las estadísticas no mienten, ¿cuál de las siguientes conclusiones elaboradas por el grupo de marketing del centro está en lo cierto?

a) Más de la mitad de los visitantes del centro comercial puede calificarse de asiduos.
b) Más de las tres cuartas partes de los visitantes del centro comercial puede calificarse de asiduos.
c) Menos de un diez por ciento de los visitantes del centro comercial puede calificarse de no asiduos.

3.11 Un grupo de amigos se reúne para cenar en un restaurante de un centro comercial. Piden una botella de vino de tres cuartos de litro que piensan repartirse por igual. A punto de iniciar la cena, se une al grupo una pareja. Alguno sugiere pedir una botella adicional de vino, pero se impone el criterio de moderar la bebida para no correr riesgos con los eventuales controles de alcoholemia. En consecuencia, se reparten una única botella por igual, resultando entonces que cada miembro del grupo ampliado toca a una cantidad que viene a ser las tres cuartas partes de lo que pensaba beber cada integrante del grupo inicial. ¿Cuántas personas formaban el grupo inicial?

a) 4.
b) 6.
c) 8.

3.12 Un supermercado hace gala en su publicidad de mantener los precios estables, aunque anuncia con frecuencia interesantes ofertas que suponen jugosos descuentos. Un cliente habitual compra un paquete de azúcar, un paquete de café y un paquete de galletas y abona un total de 5.80 euros. A la semana siguiente, al café le alcanza la conocida oferta *"compre tres y pague dos"*, con lo cual el cliente adquiere tres paquetes de café, uno de azúcar y uno de galletas, resultando un ticket de 8.75 euros. En una tercera semana, los productos en oferta han cambiado: ahora son las galletas quienes se benefician de la oferta del *"tres por dos"*, por lo cual el cliente compra un paquete de azúcar, uno de café y tres de galletas, pagando un total de 7.75 euros. Con respecto al precio ordinario de cada producto, ¿cuál de las tres afirmaciones siguientes está equivocada?

a) El café es el producto más caro.
b) El precio de un paquete del café es mayor que el precio de un paquete de azúcar más uno de galletas.
c) Un paquete de galletas vale exactamente 1.90 euros.

3.13 Una pareja decidió pasar la tarde en un centro comercial. Puesto que no llevaban ni un euro encima, lo primero que hicieron fue sacar dinero del cajero. Ella se compró unos zapatos y un jersey; él se compró unos vaqueros y una camisa. Luego fueron al cine. Al salir, entraron en un restaurante para cenar. Lo más caro, fueron

los zapatos: por lo que costó el par se hubiesen podido comprar 2 vaqueros, ó 3 camisas, ó 3 jerseys. Además, el precio de los zapatos fue el doble de lo que costó la cena. Asimismo, por el precio de los zapatos hubiesen podido ir cuatro veces al cine. Al finalizar la jornada todavía llevaban 25 euros en la cartera. De regreso a casa, ella comentaba: *teniendo en cuenta lo que nos sobró, si no hubiéramos ido al cine, el dinero que has sacado del cajero hubiese alcanzado para comprar además otra camisa para ti y otro jersey para mí.* ¿Cuánto dinero sacaron del cajero?

a) 200 euros.
b) 250 euros.
c) 300 euros.

3.14 El equipo directivo de un centro comercial planea renovar el pavimento del parking verde, cuya forma y medidas se aprecian en la figura 6.8. El coste de reparación se estima en unos 5 euros el metro cuadrado. ¿A cuánto ascenderá el presupuesto?

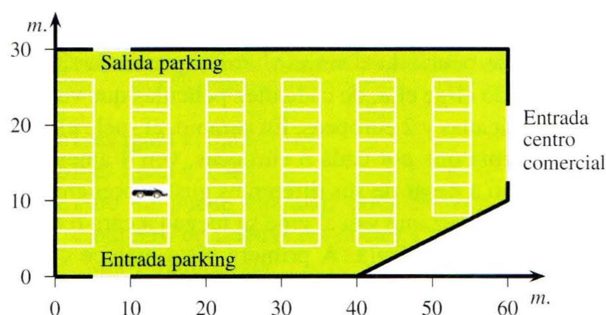


Figura 6.8: Plano del parking verde.

a) 8,000.00€.
b) 8,500.00€.
c) 9,000.00€.

3.15 El plano del parking verde de un centro comercial se representa en la figura 6.8, referido a un sistema de coordenadas cartesiano. Supongamos que un cliente aparca en la plaza cuyo punto medio tiene coordenadas (12.5,12.5) y puede ir caminando en línea recta sin obstáculos hasta el punto medio de la entrada al centro que tiene de coordenadas (60,15). Entonces la distancia recorrida es aproximadamente

a) 50.06 metros.
b) 57.55 metros.
c) 47.57 metros.

3.16 El plano del área roja del centro comercial se representa en la figura 6.9. Como se puede apreciar, la fachada noroeste de la zona de moda sigue la dirección de una recta que pasa por los puntos (0,0) y (27.5,22.5). La ecuación de dicha recta es

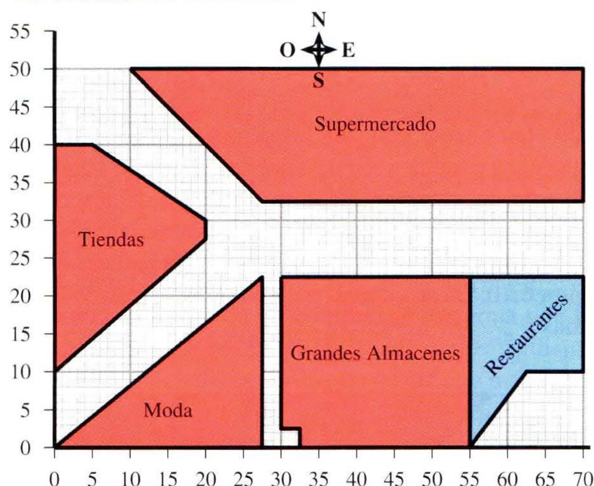


Figura 6.9: Plano del área roja del centro comercial.

a) $-9y-11x=0$.
b) $11y-9x=0$.
c) $11y+9x=0$.

3.17 El plano del área roja del centro comercial se representa en la figura 6.9. Como se puede apreciar, la zona de moda tiene forma triangular con vértices en los puntos (0,0), (27.5,0) y (27.5,22.5). Si entendemos que las distancias del plano vienen expresadas en metros, entonces el área ocupada por la zona de moda

a) mide 309.38 m^2.
b) mide 618.75 m^2.
c) no se puede calcular sin más datos.

3.18 El plano del área roja del centro comercial se representa en la figura 6.9. La fachada norte de los *grandes almacenes* está sobre la recta de ecuación

a) $x = 22.5$.
b) $x + y = 22.5$.
c) $y = 22.5$.

3.19 El plano del área roja del centro comercial se representa en la figura 6.9. La zona de restaurantes y los grandes almacenes comparten una pared que se extiende a lo largo de la recta de ecuación

a) $x = 55$.
b) $y = 55$.
c) $x + y = 55$.

3.20 Un cliente entra en un centro comercial por el área roja y camina a lo largo del pasillo que le conduce a la zona de restaurantes. Su recorrido puede describirse como una curva en un plano cartesiano definida por la función $f(x) = 0.01x^2 - x + 50$, representada en la figura 6.10. En su camino pasa por el punto de coordenadas

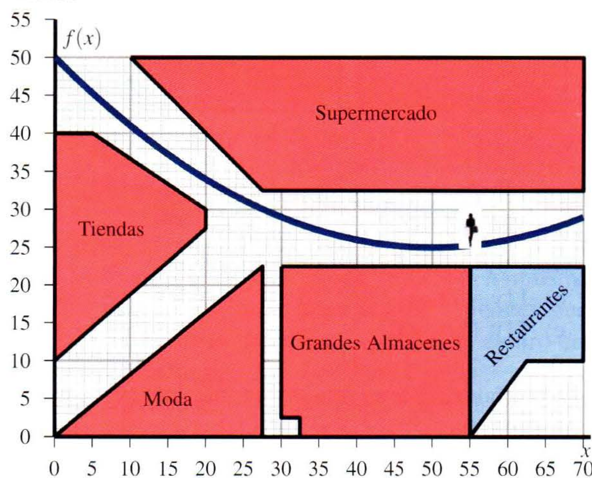


Figura 6.10: Recorrido de un cliente por el área roja del centro comercial.

a) (55,30.0).
b) (55,25.25).
c) (55,22.1).

3.21 Un cliente entra en un centro comercial por el área roja y camina a lo largo del pasillo que le conduce a la zona de restaurantes. Su recorrido puede describirse como una curva en un plano cartesiano definida por la función $f(x) = 0.01x^2 - x + 50$, representada en la figura 6.10. El punto en que estuvo a menor distancia de los *grandes almacenes* fue el punto

a) (50,22.5).
b) (50,25).
c) (55,25).

3.22 Un cliente entra en un centro comercial por el área roja y camina a lo largo del pasillo que le conduce a la zona de restaurantes. Su recorrido puede describirse como una curva en un plano cartesiano definida por la función $f(x) = 0.01x^2 - x + 50$, representada en la figura 6.10. Podemos afirmar que la curva descrita por el cliente

a) es cóncava.
b) es convexa.
c) no es cóncava, ni convexa.

3.23 Una pareja suele ir al cine con frecuencia. A ella le gusta más el cine americano que el europeo, mientras que a él le ocurre lo contrario. Por experiencia saben que cuando elige ella, de cada diez películas que ven, 8 son americanas y 2 europeas. En cambio, él suele elegir de tal forma que por cada 6 europeas, ven 4 americanas. Como a pesar de sus diferentes gustos prefieren ir juntos, cada vez que van al cine se juegan a cara o cruz quién elige la película. A primera vista, parece claro que verán más películas americanas que europeas, pero les gustaría cuantificar esta apreciación. ¿Cuál es la probabilidad de que la película elegida sea americana?

a) $\frac{2}{3}$.
b) $\frac{3}{5}$.
c) $\frac{5}{8}$.

3.24 Una pareja suele ir al cine con frecuencia. A ella le gusta más el cine americano que el europeo, mientras que a él le ocurre lo contrario. Por experiencia saben que cuando elige ella, de cada diez películas que ven, 8 son americanas y 2 europeas. En cambio, él suele elegir de tal forma que por cada 6 europeas, ven 4 americanas. A pesar de sus diferentes gustos prefieren ir juntos al cine. Antes se jugaban a cara o cruz quién



elegía la película, pero resultaba que acababan viendo más películas americanas que europeas. Por ello, han acordado que él debe tener ventaja a la hora de elegir. Así pues, ¿por cada vez que elija ella, cuántas veces ha de elegir él para que los dos tipos de películas tengan la misma probabilidad de ser elegida?

a) 2.
b) 3.
c) 4.

3.25 Las tiendas de un centro comercial se agrupan en sectores. Uno de ellos es el sector *Cultura, Multimedia y Tecnología.* Dentro de este sector, consideramos la variable estadística cuyas modalidades son el subsector en que se encuadra la tienda. La tabla siguiente recoge la distribución de frecuencias absolutas de dicha variable.

Electrónica	5
Libros, música y multimedia	5
Telefonía e internet	9

La frecuencia relativa de la modalidad *telefonía e internet*

a) es igual a 0.32.
b) es igual a 0.47.
c) no se puede calcular, pues no conocemos el número de tiendas del sector *Cultura, Multimedia y Tecnología.*

3.26 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe, en euros, de las compras por internet que solicitamos a un supermercado.

	Enero	Febrero	Marzo	Abril
Alimentación	154.80	189.15	265.40	210.75
Bebidas	65.35	80.40	75.90	50.25
Droguería	40.30	125.45	90.80	70.30
Hogar	250.40	125.75	75.30	190.75

Tabla 6.3: Gastos mensuales en diferentes sectores de la economía doméstica.

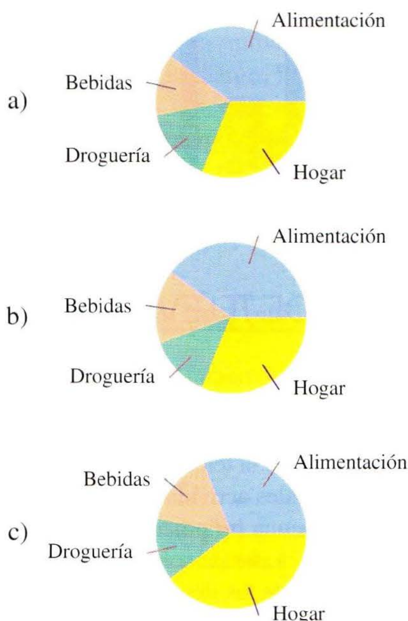
El porcentaje de variación del gasto total del mes de abril con respecto al gasto total del mes de enero fue

a) 2.19 %.
b) 2.15 %.
c) −2.19 %.

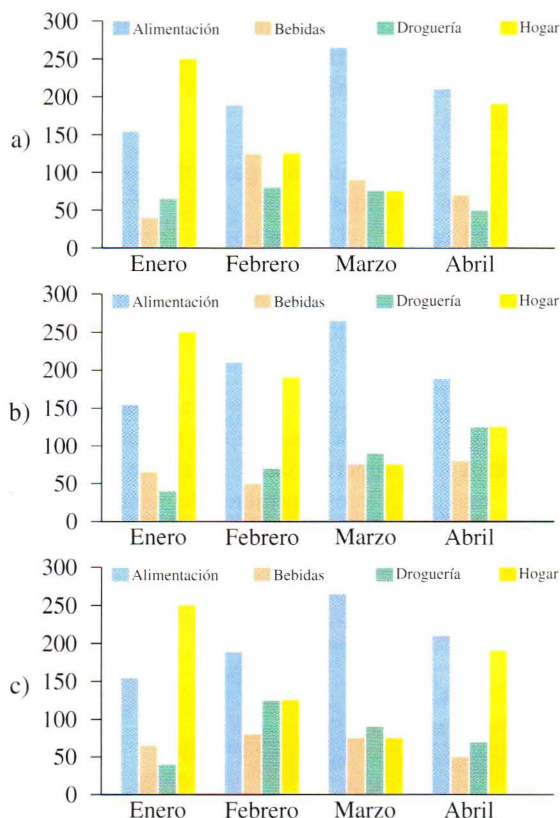
3.27 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe, en euros, de las compras por internet que solicitamos a un supermercado. Si consideramos el gasto total de los cuatro meses, ¿cuál de las afirmaciones siguientes es falsa?

a) Más de la mitad del gasto se hizo en alimentación y bebidas.
b) El gasto en el sector hogar fue superior al gasto conjunto en bebidas y droguería.
c) El gasto en el sector hogar supuso más de un tercio del gasto total.

3.28 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe, en euros, de las compras por internet que solicitamos a un supermercado. ¿Cuál de los siguientes diagramas de sectores representa de manera más exacta el reparto del gasto total por sectores en que se incurrió en los cuatro meses?



3.29 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe, en euros, de las compras por internet que solicitamos a un supermercado. ¿Cuál es el diagrama de barras que representa con mayor exactitud los datos de dicha tabla?



3.30 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe, en euros, de las compras por internet que solicitamos a un supermercado. El gasto medio mensual en *alimentación* fue aproximadamente igual a

a) 286.58.
b) 205.03.
c) 127.71.

3.31 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe de las compras por internet que solicitamos a un supermercado. Entonces la dispersión del gasto total mensual, medida mediante la desviación típica

a) es 39.37 euros.
b) es 6.27 euros.
c) no se puede calcular a partir de los datos de la tabla.

3.32 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe, en euros, de las compras por internet que solicitamos a un supermercado. Si medimos la variabilidad de los gastos en cada sector mediante el coeficiente de variación, ¿cuál de los siguientes sectores presentó mayor variabilidad a lo largo del cuatrimestre?

a) Alimentación.
b) Bebidas.
c) Droguería.

4 APARATOS DE TELEVISIÓN

CONTEXTO

En la sociedad moderna la televisión se ha convertido en una de las principales actividades de muchos individuos que le dedican una proporción importante de su tiempo. Sin embargo, antes de sentarse a disfrutar o padecer la programación de las diversas cadenas un día cualquiera, hay que resolver un buen número de cuestiones técnicas que comienzan con la decisión del modelo de aparato que se ha de instalar.

ESPECIFICACIONES TÉCNICAS

Hoy en día el formato de las televisiones se ha estandarizado en la relación $< 16 : 9 >$, lo cual significa que todas las pantallas tiene 9 unidades de alto por cada 16 unidades de ancho. Anteriormente lo habitual era la relación $< 4 : 3 >$ que también es muy frecuente en los

formatos de fotografía; por esa razón, cuando se emite actualmente una antiguo programa, se producen bandas negras a ambos lados de la imagen.

Por tradición el tamaño de un televisor se expresa como la medida D de la diagonal del rectángulo de la pantalla y se mide usualmente en pulgadas (designadas por el símbolo "). Aunque hay televisores de muy diversos tamaños, lo más habitual son las medidas: 24", 32", 37", 42", 55" y 65"; aunque se pueden encontrar modelos de hasta 84". La pulgada es una medida de longitud anglosajona que equivale, en centímetros, a 2.54 cm.



Figura 6.11: Dimensiones de un televisor.

A fin de que el ojo humano perciba una imagen continua, la imagen de un televisor (o de una pantalla de ordenador) está compuesta de diminutos rectángulos, denominados *píxels*. Cuanto más pequeños sean los píxels, más precisa es la representación de la imagen; tal y como muestra la figura 6.12.



Figura 6.12: Representación de una imagen según el tamaño de los pixels.

La *resolución* de la pantalla se indica por el número de columnas y filas de píxels con los que se forma la imagen. Hoy en día la alta definición dispone de resoluciones habituales de 1280×720 (etiquetado muchas veces como *HD ready*) y 1920×1080 píxels, a lo que corresponde la etiqueta *Full HD*. Ello significa que la imagen se forma con 720 líneas y 1080 líneas respectivamente y el número correspondiente de columnas. Inicialmente la televisión emitía con las 625 líneas que dieron incluso nombre a algún antiguo programa de televisión. Es frecuente expresar la resolución en *megapíxels* –o sea, millones de píxeles contenidos en la pantalla– expresado usualmente sin decimales o a lo sumo con uno sólo.

Hay que tener en cuenta que para una resolución fija –por ejemplo 1920×1080– cuanto mayor sea el tamaño de la pantalla mayor es el tamaño de los píxels, lo cual aumenta la "granularidad" de la imagen. Esa es la razón por la cual se aprecia una menor definición en las pantallas muy grandes cuando se observan de cerca. El tamaño de los píxels puede calcularse, dividiendo el ancho de la pantalla por el número de columnas y su alto por el número de filas; con mucha frecuencia, el resultado es el mismo, lo que indica que los píxels son cuadrados. Sin embargo, sus dimensiones son tan pequeñas que, en vez de expresarlas directamente, lo usual es expresar el número de píxels por pulgada (*PPP* o *PPI* en inglés). La página web *www.sven.de/dpi/* proporciona un calculador del número de píxels por pulgada para la resolución y el tamaño que se fije.

Los mismos criterios se usan para las pantallas de ordenadores, teléfonos móviles, cámaras fotográficas digitales, etc. Sin embargo, los formatos, los tamaños y las resoluciones son, en este caso, mucho más variadas. Así, un teléfono móvil puede tener una pantalla de formato $< 3 : 2 >$, de tamaño 9" y resolución de 3.5 megapíxels (la resolución de la pantalla suele ser distinta de la resolución de la cámara fotográfica incorporada).

DISTANCIA AL TELEVISOR

Por supuesto el tamaño del televisor conveniente depende de la distancia a la que los usuarios se sienten a ver los programas. En Internet se pueden encontrar diversas recomendaciones:

a) Una de ellas indica situarse a una distancia igual a 0.5 metros por cada 10", más 0.5 metros extra. Lo cual permite calcular el tamaño del televisor en función de la distancia a la que se vaya a situar el televisor del sofa.

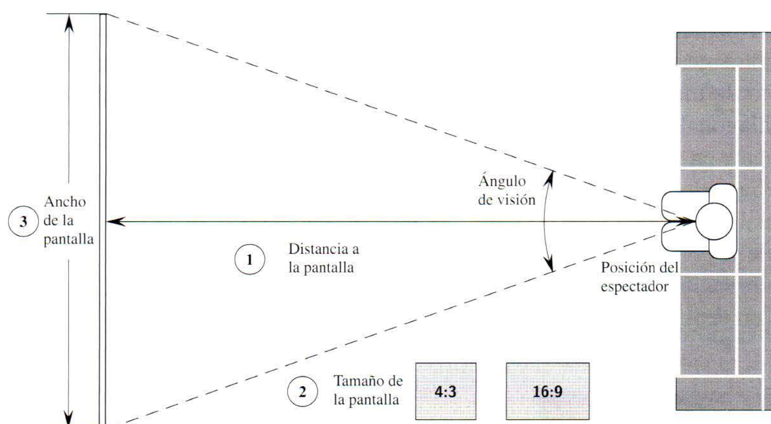


Figura 6.13: Recomendación sobre el tamaño óptimo del televisor en función de la distancia de visión.

b) La *Society of Motion Picture and Televisión Engineers* es más flexible con las preferencias del espectador y sólo recomienda que la distancia mínima al televisor sea el doble de su ancho y la máxima distancia no supere cinco veces su ancho.

c) En la figura 6.13 se indica otra recomendación en el sentido de que el ángulo de visión, definido como el ángulo del triángulo cuyo vértice es el espectador y cuya base es el televisor, sea de 30°.

ACTIVIDADES

4.1 Si x e y son respectivamente el ancho y el alto de una pantalla de televisor de formato $< 16:9 >$, se puede afirmar que

a) $\frac{x}{16} = \frac{y}{9}$.
b) $\frac{x}{9} = \frac{y}{16}$.
c) $16x = 9y$.

4.2 Si x e y son respectivamente el ancho y el alto de un televisor de formato $< 16:9 >$, en función de y el ancho x se expresa

a) $x = \frac{9}{16}y$.
b) $x = 1.\overset{\frown}{7}y$.
c) $x = 0.5625y$.

4.3 Si un televisor de formato $< 16:9 >$ tiene un ancho de 81.91 cm se puede afirmar que

a) Su alto es 49 cm.
b) Su ancho son 34.2”.
c) Es un televisor de 37”.

4.4 Para instalar en un mueble un televisor de 42” y formato $< 16:9 >$, ¿de cuánto espacio horizontal hay que disponer?

a) Más de 1.034 metros.
b) Más de 92.98 cm.
c) Más de 42”.

4.5 Si un televisor con formato $< 16:9 >$ y de 32” se apoya en una peana de 10cm. de altura, ¿cuál es el espacio vertical necesario para colocarlo entre dos baldas de una librería?



a) 49.85 cm.
b) 55.16ccm.
c) 45.35 cm.

4.6 El ancho x de una pantalla de formato $< 16:9 >$ en función de la medida D de la diagonal se expresa:

a) $\frac{9 \cdot D}{256}$.
b) $\frac{16}{\sqrt{9 \cdot D}}$.
c) $\frac{16 \cdot D}{\sqrt{337}}$.

4.7 El aumento en centímetros del ancho de una pantalla de televisión de formato $< 16:9 >$, por cada pulgada de aumento de la diagonal, es

a) $\frac{40.64}{\sqrt{256}}$ cm.
b) 2.21 cm.
c) $\frac{16}{\sqrt{337}}$ cm.

4.8 El perímetro de la pantalla de un televisor de 65", con formato $< 16:9 >$, es

a) 449.68 cm.
b) 368.8 cm.
c) 632.46 cm.

4.9 El área de la pantalla de un televisor de 65", con formato $< 16:9 >$, es

a) 0.92 m^2.
b) 1.42 m^2.
c) 1.16 m^2.

4.10 En un televisor de formato $< 16:9 >$ se visualiza un programa antiguo de formato $< 4:3 >$, ajustando la imagen para que ocupe la totalidad del alto de la pantalla. Del ancho de la pantalla, las bandas negras que aparecen en los laterales de la imagen ocupan una proporción de

a) $3/8$, es decir $3/16$ a cada lado.
b) $1/4$, es decir $1/8$ a cada lado.
c) $3/16$, es decir $3/32$ a cada lado.

4.11 Disponemos de un televisor cuyo formato es $< 16:9 >$ y tiene resolución 1280×720. La fracción $\frac{1280}{720}$ es equivalente a

a) $\frac{177}{100}$.
b) $\frac{16}{9}$.
c) $\frac{54}{30}$.

4.12 Un televisor tiene resolución 1920×1080. La fracción $\frac{1920}{1080}$ es equivalente a

a) $\frac{16}{9}$.
b) $\frac{54}{30}$.
c) $\frac{17}{10}$.

4.13 La resolución de una pantalla de 1920×1080 se puede expresar

a) 1.5 megapíxels.
b) 2 megapíxels.
c) 2.5 megapíxels.

4.14 La resolución de una pantalla de 1280×720 es de

a) 1 megapíxels.
b) 2 megapíxels.
c) 2.5 megapíxels.

4.15 Si una cámara fotográfica de formato $< 4:3 >$ tiene una resolución de 5.5 megapíxels, ¿de cuántas columnas y filas de píxels se compone la imagen?

a) 2548×1911
b) 2708×2031
c) 3252×2439

4.16 El tamaño de los píxels de una pantalla de 65" con resolución de 1280×720 es

a) 2.3 mm.
b) 1.12 mm.
c) 0.72 mm.

4.17 El número de píxels por pulgada de una pantalla de 32", con resolución 1920×1080, es

a) 68.84 *PPP*.
b) 72.15*PPP*.
c) 84.68 *PPP*.

4.18 Siguiendo la recomendación (a), la distancia al televisor debe ser 0.5 metros por cada 10" más 0.5 metros extra. Midiendo la diagonal D en pulgadas, la función que expresa la distancia recomendada es

a) $f(D) = 0.5 + 0.5 \cdot D$ metros.
b) $f(D) = 5 \cdot D + 0.5$ metros.
c) $f(D) = 0.05 \cdot D + 0.5$ metros.

4.19 Si se acepta que la distancia al televisor debe ser 0.5 metros por cada 10" más 0.5 metros extra, ¿cuál es el tamaño de televisor adecuado si se va a situar a 2 metros del lugar habitual desde donde se ve?

a) 30".
b) 37".
c) 24".

4.20 Según la recomendación (b), la distancia mínima al televisor debe ser el doble de su ancho. Para un televisor de formato $< 16 : 9 >$ y tamaño D", la función que expresa la distancia mínima en metros al televisor es

a) $f(D) = 0.12D$ metros.
b) $f(D) = 0.0443D$ metros.
c) $f(D) = 0.086D$ metros.

4.21 Si se acepta que la distancia al televisor debe ser por lo menos el doble de su ancho, la distancia mínima a la que debe observarse un televisor de 37" es

a) 2.18 metros.
b) 1.92 metros.
c) 1.64 metros.

4.22 Si se acepta que la distancia al televisor debe ser por lo menos el doble de su ancho, un televisor que se va a ver desde una distancia de 1.5 metros debe tener un tamaño máximo de

a) 28".
b) 34".
c) 40".

4.23 Según la recomendación (b), la distancia máxima al televisor debe ser cinco veces su ancho. Para un televisor de formato $< 16 : 9 >$ y tamaño D", la función que expresa la distancia máxima en metros al televisor es

a) $f(D) = 0.11D$ metros.
b) $f(D) = 0.21D$ metros.
c) $f(D) = 0.16D$ metros.

4.24 Si se acepta que la distancia al televisor debe ser a lo sumo cinco veces su ancho, la distancia máxima a la que debe observarse un televisor de 24" es

a) 2.18 metros.
b) 2.64 metros.
c) 3.14 metros.

4.25 Si se acepta que la distancia al televisor debe ser a lo sumo cinco veces su ancho, un televisor que se va a ver desde una distancia de 2 metros debe tener un tamaño mínimo de

a) 28".
b) 18".
c) 32".

4.26 La recomendación de que un televisor de tamaño D" debe verse a una distancia de 0.5 metros por cada 10", más 0.5 metros extra, es compatible con la recomendación de que la distancia máxima al televisor sea 5 veces su ancho para los televisores de tamaño D superior a

a) 8.33".
b) 12.5".
c) 16".

4.27 La recomendación de que un televisor de tamaño D" debe verse a una distancia de 0.5 metros por cada 10", más 0.5 metros extra, es compatible con la recomendación de que la distancia mínima al televisor sea 2 veces su ancho,

a) para televisores de tamaño D superior a 18".
b) para televisores de tamaño inferior a 42".
c) para cualquier televisor.

4.28 Para un televisor de formato $< 16 : 9 >$, la recomendación de que el ángulo de visión del televisor sea de 30° expresa la distancia en metros al televisor en función de su tamaño D", mediante la función

a) $f(D) = 0.056D$ metros.
b) $f(D) = 0.049D$ metros.
c) $f(D) = 0.041D$ metros.

5 METALES PRECIOSOS

CONTEXTO

Se acostumbra a calificar como *preciosos* a ciertos metales que son escasos y relativamente inalterables por los agentes físicos o químicos, lo que causa que puedan encontrarse en estado puro en la naturaleza, y que poseen un brillo y una apariencia que los hace deseables a la vista, como el oro, la plata, el platino o el paladio. Por su apariencia atrayente y su durabilidad, desde la antigüedad se han empleado en joyería o han sido, como el oro y la plata, una forma de dinero. Hoy día, todos, excepto el oro, tienen más importancia en la industria que en joyería; así, la plata tiene propiedades de conducción de la electricidad únicas y el platino y el paladio son indispensables en la fabricación de catalizadores.



Figura 6.14: Pepita de oro puro.

Una de las características físicas de estos metales es ser muy densos o como suele decirse "ser muy pesados"; es decir, que la masa de un volumen dado de metal es grande en comparación con el resto de los metales. Las densidades de los principales metales preciosos se muestran en la tabla 6.4.

Densidades de los principales metales preciosos en g/cm^3			
Plata	Paladio	Oro	Platino
10.50	12.02	19.32	21.45

Tabla 6.4: Densidades de algunos metales preciosos.

Por ejemplo, para tener una referencia de lo densos que son estos metales, consideremos que la densidad del plomo, que tradicionalmente es considerado como un elemento muy pesado, es de $11.35\ g/cm^3$, de suerte que la plata, que es el más ligero de los metales preciosos, es casi tan denso como el plomo, mientras que el platino es casi dos veces más pesado que el plomo.

Los metales preciosos en su uso en joyería y en acuñación de moneda se suelen *alear* con otros metales, para darles un color determinado o mejorar sus resistencia al uso. La pureza de una aleación de metales preciosos, en especial el oro, se acostumbra a medir en *quilates*. Un quilate equivale a la veinticuatroava parte de la masa total de oro puro; por ejemplo, una moneda de oro de veinticuatro quilates tiene una pureza en oro de $24/24$, es decir se considera compuesta de oro puro, mientras que un anillo de oro de 18 quilates tiene una riqueza en oro igual a $18/24$, lo que significa que está compuesto de $18/24 = 0.75$ partes de oro puro y $6/24$ partes de otros metales; dicho de otra manera, que el $75\,\%$ de la masa del anillo es oro puro. Por ejemplo, un anillo de oro de 18 quilates, cuyo peso total sea de 6 g contiene $6 \cdot 0.75 = 4.5$ g de oro.

No debe confundirse el quilate empleado como unidad de pureza de una aleación preciosa con el quilate unidad de masa que se usa en Gemología, para medir la masa de las piedras preciosas, el *quilate actual* o *quilate métrico* es igual a 0.2 gramos; así, un diamante de

cinco quilates pesa 1 g.

La masa de los metales preciosos se acostumbra a medir en las unidades del sistema métrico decimal, por ejemplo, gramos, kilogramos o toneladas, pero también es frecuente emplear la *onza troy*, medida que proviene del sistema de medidas romano. Una onza troy es igual a 31.1034768 g, aunque se suele simplificar a considerarla igual a 31.10 g.

Una *aleación* metálica es una combinación de dos o más metales. Las aleaciones son extremadamente útiles porque al combinar los metales se mejoran las propiedades de algunos o todos ellos. Por ejemplo, el latón es una combinación de cobre y zinc, el bronce es una aleación de cobre y estaño y la adición de molibdeno al hierro le hace inoxidable y muy resistente a la corrosión por agentes químicos. En las actividades que plantearemos a continuación consideraremos únicamente los aspectos relacionados con los metales que se combinan sin tener en cuenta las proporciones de cada uno de los metales que intervienen, esto es, la composición cualitativa de la aleación.

ACTIVIDADES

5.1 Teniendo en cuenta los datos de la tabla 6.4, la proposición *"si la plata es más densa que el oro, entonces el oro es más denso que el platino"* es

a) falsa.
b) verdadera.
c) su valor de verdad depende del valor de verdad de la proposición *"el oro es más denso que el platino"*.

5.2 ¿Cuál de las siguientes oraciones no es una proposición lógica?

a) *"¿Dónde está mi anillo de oro?"*.
b) *"Tiene un corazón de oro"*.
c) *"No es oro todo lo que reluce"*.

5.3 Si p es la proposición *"es de oro macizo"* y q es la proposición *"es barato"*, entonces la proposición *"si es de oro macizo, no es barato"* se representa por

a) $p \to q$.
b) $\neg p \to q$.
c) $p \to \neg q$.

5.4 Si p es la proposición *"es un objeto de oro"* y q es la proposición *"es un objeto que reluce"*, la negación de la proposición *"No es cierto que si un objeto reluce, entonces sea de oro"* es

a) $q \wedge \neg p$.
b) $p \to q$.
c) $q \to \neg p$.

5.5 De la información sobre los metales preciosos relatada al comienzo se desprende que la proposición *"Si el anillo de oro de Juan tiene más quilates que el anillo de oro de María, entonces el anillo de Juan contiene más oro que el de María"* cumple

a) es siempre verdadera.
b) es siempre falsa.
c) su valor de verdad depende de la masa de los anillos.

5.6 El razonamiento:

"Si la plata es más densa que el oro, el oro es más denso que el platino".
"La plata es más densa que el oro".

∴ *"El oro es más denso que el platino"*.

a) Es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus ponendo ponens*.
b) Es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus tollendo tollens*.
c) Es una falacia.

5.7 El razonamiento:

"Si la plata es más densa que el oro, el oro es más denso que el platino".
"El oro no es más denso que el platino".

∴ *"La plata no es más densa que el oro"*.



a) Es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus ponendo ponens*.
b) Es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus tollendo tollens*.
c) Es una falacia.

5.8 El razonamiento:

"Si la plata es más densa que el oro, el oro es más denso que el platino".
"La plata es más densa que el oro".

$\therefore$ *"El oro no es más denso que el platino".*

a) Es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus ponendo ponens*.
b) Es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus tollendo tollens*.
c) Es una falacia.

5.9 El razonamiento:

"Si la plata es más densa que el oro, entonces el paladio es más denso que el platino".
"Si el paladio es más denso que el platino, entonces el oro es más denso que el paladio".

$\therefore$ *"Si la plata es más densa que el oro, entonces el oro es más denso que el paladio".*

a) es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus ponendo ponens*.
b) es lógicamente válido por ser un caso particular de la *ley del silogismo hipotético*.
c) es una falacia.

5.10 El razonamiento:

"El paladio es más denso que el oro o el paladio es más denso que la plata".
"El paladio no es más denso que el oro".

$\therefore$ *"El paladio es más denso que la plata".*

a) es lógicamente válido.
b) es un caso particular del silogismo hipotético.
c) es una falacia.

5.11 El conjunto de metales

$$A = \{\text{plata}, \text{paladio}, \text{oro}, \text{platino}\}$$

está definido

a) por enumeración.
b) por descripción.
c) por inclusión.

5.12 Si A es el conjunto de lo metales preciosos y

$$B = \{\text{plata}, \text{oro}, \text{platino}\}$$

se cumple

a) $A \subset B$.
b) $B \subset A$.
c) $B \subset A^c$.

5.13 Si A es el conjunto de los metales preciosos y B es el conjunto de los metales, se cumple

a) $B \subset A$.
b) $A^c \subset B^c$.
c) $B^c \subset A^c$.

5.14 El conjunto de composiciones distintas posibles de las aleaciones de dos metales pertenecientes al conjunto

$$A = \{\text{plata}, \text{paladio}, \text{oro}, \text{platino}\}$$

tiene

a) 4 elementos.
b) 6 elementos.
c) 8 elementos.

5.15 Designemos por $\mathscr{A}$ al conjunto de todas las aleaciones posibles de los metales del conjunto A.

$$A = \{\text{plata}, \text{paladio}, \text{oro}, \text{platino}\}$$

La transformación, $f\colon \mathscr{A} \mapsto \mathscr{P}(A)$, que a cada aleación le asocia el subconjunto formado por los metales que componen dicha aleación es

a) Aplicación inyectiva.
b) Aplicación sobreyectiva.
c) No es aplicación.

5.16 María tiene dos anillos, uno es de oro de 23 quilates y pesa 5 g, el otro es de oro de 20 quilates y pesa 10 g. Si los lleva al joyero para que los funda y fabrique un nuevo anillo con el material de ambos, ¿cuántos quilates tendrá el oro del nuevo anillo?

a) 21.
b) 21.5.
c) 22.

5.17 ¿Qué contiene mayor cantidad de oro, una moneda de 10 g de oro de 20 quilates o una moneda de media onza troy de 18 quilates?

a) La moneda de 10 g.
b) La moneda de media onza.
c) Contienen la misma cantidad de oro.

5.18 Para fabricar un anillo de oro de 22 quilates con una masa total de 9 g, ¿qué cantidad de oro hay que emplear?

a) 8.75 gramos.
b) 8.50 gramos.
c) 8.25 gramos.

5.19 Vamos a vender una moneda de oro de 22 quilates y un peso total de 15 g y un anillo de oro de 18 quilates y un peso total de 12 g. Si pagan las piezas a razón de 30 euros el gramo de oro, ¿qué cantidad recibiremos?

a) 810 euros.
b) 682.25 euros.
c) 575.75 euros.

5.20 Juan quiere comprar unas monedas de plata para regalar a sus tres sobrinos el día de Navidad. Con el dinero que lleva encima, si pagara por cada moneda el precio que aparece en el escaparate sólo podría comprar dos monedas y le sobrarían 50 euros. Entra el la tienda y explica al dependiente que necesita tres monedas, una para cada sobrino, éste le ofrece una rebaja del 10 % del precio marcado en el escaparate si compra tres monedas. Con este trato, Juan ha podido comprar tres monedas y todavía le han sobrado 8 euros. ¿Cuál era el precio de las monedas en el escaparate?

a) 120 euros.
b) 30 euros.
c) 60 euros.

5.21 Juan quiere comprar unas monedas de plata para regalar a sus tres sobrinos el día de Navidad. Entra en la tienda y pregunta el precio de una moneda; tiene dinero suficiente para comprar tres monedas. Juan se pregunta, ¿cuánto deberían rebajar el precio de para que por el mismo dinero que me cuestan tres monedas pudiera comprar cuatro?

a) un 20 %.
b) un 25 %.
c) un 33.33 %.

5.22 Una moneda de una onza de plata y dos monedas de media onza de oro cuestan en total 1100 euros. Dos monedas de una onza de plata y una moneda de media onza de oro cuestan en total 595 euros; ¿cuánto cuesta una moneda de una onza de plata?

a) 30 euros.
b) 35 euros.
c) 75 euros.

5.23 Entre marzo y julio de 2011, el Banco de España vendió 4.3 millones de onzas troy de oro de las que formaban su reserva, esas ventas suponían del 32 % de la reserva total de oro que tenía el banco. ¿Cuántas onzas de oro había en la reserva antes de producirse las ventas?

a) 4.62 millones de onzas.
b) 12.45 millones de onzas.
c) 13.44 millones de onzas.

5.24 Entre marzo y julio de 2011, el Banco de España vendió 4.3 millones de onzas troy de oro de las que formaban su reserva, esas ventas suponían del 32 % de la reserva total de oro que tenía el banco. Desde julio de 2011 no se han comunicado nuevas ventas de oro de la reserva del Banco de España. Si el precio actual de la onza de oro es de 1050 euros, ¿cuál es el valor del oro que actualmente tiene en su reserva el Banco de España?

a) 4515 millones de euros.
b) 8545.42 millones de euros.
c) 9594.37 millones de euros.

6 COTIZACIÓN DE LAS MONEDAS Y LINGOTES DE INVERSIÓN

CONTEXTO

El precio que cobran los comerciantes de oro para inversión, tanto en monedas como en lingotes es una función de la cotización del oro en el mercado de metales de Londres que tiene dos componentes, uno fijo y otro variable que depende de la cotización del oro en ese momento. Supongamos que x es la cotización de la onza de oro de Londres en una unidad monetaria dada, normalmente dólares americanos, y sea el precio $f(x)$ de un lingote o una moneda que contiene una onza de oro es de la forma

$$f(x) = (1+r)x + c$$

donde c es un coste fijo de manufactura y transporte del lingote y r es una *prima* o porcentaje que añade o carga el comerciante. Puesto que no tiene sentido una cotización negativa, consideraremos $f(x)$ definida para los valores $x > 0$; es claro que $f(x)$ está medida en las mismas unidades monetarias que x y c. Por ejemplo, si suponemos que $c = 1.5$ y que la prima del comerciante es del 5 % de la cotización del oro, entonces $r = 0.05$ y el precio de venta en función de la cotización viene dado por la función $f(x) = 1.05x + 1.5$. La gráfica del precio $f(x)$ es la recta que se muestra en la figura 6.15.

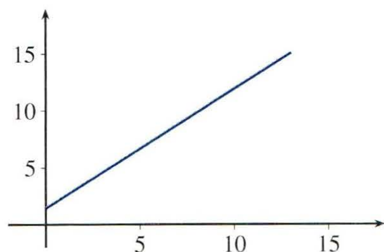


Figura 6.15: Gráfica de $y = 1.05x + 1.5$

Observemos que la ordenada en el origen de la recta es igual el coste fijo de la pieza c, y que la pendiente de la recta es igual a $1+r$, donde r es el porcentaje que recibe el comerciante.



Figura 6.16: Lingote de platino certificado por el fundidor.

ACTIVIDADES

6.1 El coste fijo de manufactura y transporte de un lingote de una onza de oro es de 5.5 dólares; si el comerciante añade un porcentaje del 6 %. ¿Cuál será el precio de venta del lingote cuando la cotización del oro en Londres sea de 1300 dólares la onza?

a) 1383.83.
b) 2085.5.
c) 1383.5.

6.2 Cuando la cotización de la onza de oro era de 1000 dólares el precio de venta del lingote de una onza de oro era de 1054 dólares; ahora que la cotización es 1200 dólares, el precio de venta es 1264 dólares, ¿cuál es el coste fijo de la pieza?

a) 4 dólares.
b) 5 dólares.
c) 6 dólares.

6.3 Cuando cuando la cotización de la onza de oro era de 1100 dólares el precio de venta del lingote de una onza de oro era de 1149 dólares; ahora que la cotización es 1300 dólares, el precio de venta es 1357 dólares, ¿cuál es la prima que añade el comerciante?

a) el 4 % de la cotización.
b) el 5 % de la cotización.
c) el 6 % de la cotización.

6.4 Cuando cuando la cotización de la onza de oro era de 1000 dólares El precio de venta del lingote de una onza de oro era de 1054 dólares, y, ahora que la cotización es 1200 dólares, el precio de venta es 1264 dólares. Si la cotización del oro sube hasta 1300 dólares, ¿cuál será el precio de venta del lingote?

a) 1310 dólares.
b) 1365 dólares.
c) 1369 dólares.

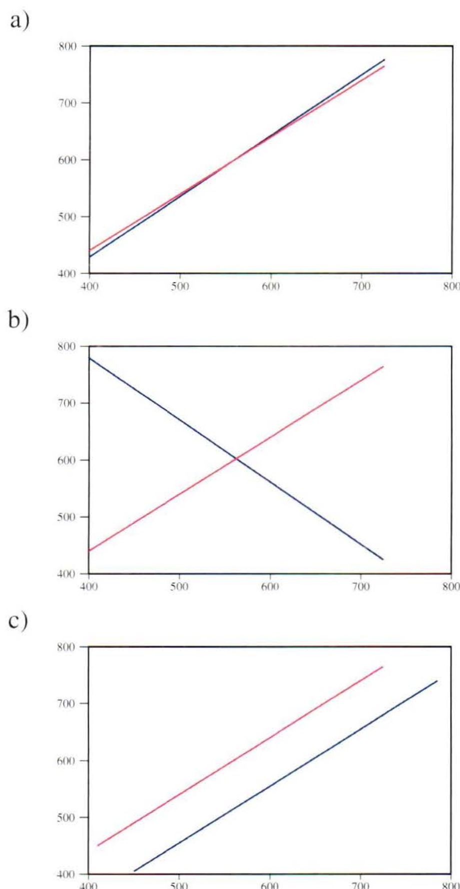
6.5 El precio de venta de un lingote de una onza es una función de la cotización del oro dada por $f(x) = 1.045x + 4$; su derivada es:

a) 4.
b) 1.045.
c) $1.045x$.

6.6 El comerciante A vende las piezas de una onza de oro a un precio función de la cotización dado por $f_A(x) = 1.04x + 5$. El comerciante B ha decidido cambiar el modo de tarifar los lingotes, y cobra el precio oficial x más una cantidad fija que incluye los costes de manufactura y transporte más su comisión, el precio al que vende es $f_B(x) = x + 35$. ¿Qué valor de la cotización hace que ambos precios sean iguales?

a) 650.
b) 700.
c) 750.

6.7 El comerciante A vende las piezas de una onza de oro a un precio que depende de la cotización x, dado por $f_A(x) = 1.06x + 5$. El comerciante B cobra el precio oficial x más una cantidad fija que incluye los costes de manufactura, de transporte y su comisión; su precio en función de la cotización es $f_B(x) = x + 40$. ¿Cuál de las figuras siguientes representa las gráficas de ambos precios en función de la cotización x?



6.8 La figura 6.17 representa una moneda de media onza de oro. Su diámetro mide 28 mm. Entonces su contorno mide aproximadamente



Figura 6.17: Moneda de oro de media onza.

a) 175.93 mm.
b) 87.96 mm.
c) 43.98 mm.

7 SUMINISTRO Y CONSUMO ANUAL DE ORO

CONTEXTO

El oro tiene dos fuentes principales de suministro: la denominada *producción primaria* y el *reciclaje*. Se considera de producción primaria el metal producido por extracción de las minas, bien siendo el oro el producto principal, bien como subproducto de la explotación de otros metales como cobre, plata o zinc. Metal procedente del reciclado es el que se extrae de objetos que contienen oro, como los teléfonos móviles desechados o las joyas usadas sin valor artístico especial, que se venden a los comerciantes de segunda mano. En el año 2013 la producción primaria fue, aproximadamente, de 2770 toneladas, mientras que el suministro de oro reciclado fue de unas 600 toneladas.

En 2013, los principales países productores de oro de producción primaria fueron los que aparecen en la tabla 6.5, que muestra los ocho países que produjeron más de 100 toneladas ese año.

Producción primaria de oro en 2013	
China	420
Australia	255
USA	227
Rusia	220
Perú	150
Sudáfrica	145
Canadá	120
México	100
Otros	1133

Producciones en toneladas. Fuente: World Gold Council

Tabla 6.5: Países productores de oro de producción primaria.

La producción de un país es muy variable en el tiempo. El agotamiento de los yacimientos causa una tendencia a la disminución de la producción que sólo podría ser compensada con mayores inversiones en explotación; el éxito de esas exploraciones depende no sólo de la geología de la región, sino de factores económicos externos como el coste relativo de la explotación de los nuevos yacimientos respecto de los costes de la competencia y la cotización del metal. Aquí aparece dos importantes conceptos relativos a la minería en general, la idea de *recurso* y la idea de *reserva*. Se entiende por recurso la cantidad de metal que está depositado en el subsuelo, mientras que reserva significa la cantidad de metal que bajo las condiciones económicas actuales, precios del metal y el coste de explotación, es rentable extraer.



Figura 6.18: Mina de oro Goldstrike en Nevada (USA)

Un interesante ejemplo de la influencia de estos factores en la producción es el caso de Sudáfrica. Desde que en 1880 se inició la explotación de oro, el país ha dispuesto de una fabulosa riqueza en mineral de oro, hasta el punto que el World Gold Council estima que hasta finales de 2012 se habían extraído en todo el mundo 175000 toneladas de oro y que la mitad de ese oro procedía de las minas sudafricanas. Sin embargo, su producción lleva más de cuarenta años disminuyendo. Esta disminución se debe no sólo al agotamiento de los filones conocidos, sino a la dificultad de su extracción que debe hacerse de forma manual, lo que encarece las operaciones frente a los yacimientos a cielo abierto completamente mecanizados. La tabla 6.6 muestra la evolución de la producción de Sudáfrica desde 1970.

1970	**1975**	**1980**	**1985**	**1990**
1000.4	713.4	674.0	670.8	605.4
1995	**2000**	**2005**	**2010**	
523.8	428.3	296	189	

Producción de oro de Sudáfrica en toneladas.

Tabla 6.6: Producción de oro de Sudáfrica.

En cuanto al consumo, el World Gold Council diferencia entre cuatro sectores: *joyería, tecnología, inversión* y *demanda de los bancos centrales*.

Por joyería se entiende la fabricación de objetos de adorno personal. Éste es un uso que el hombre ha dado al oro desde el principio de los tiempos.

Tecnología es un epígrafe que incluye las aplicaciones del oro a la electrónica, a la medicina y a la ingeniería avanzada. En forma de minúsculas partículas denominadas nanopartículas, el oro se aplica en la detección de la malaria y en ciertos tratamientos contra el cáncer. Tampoco es muy conocido que contribuye a una mejor reflexión de los rayos infrarrojos por lo que una capa finísima de oro en una ventana refleja el calor, ayudando a mantener los edificios frescos en verano y calientes en invierno. Por ejemplo, las 14.000 ventanas del edificio Royal Bank Plaza de Toronto están cubiertas con 70kg de oro puro.

El epígrafe de inversión se refiere al oro demandado en forma de lingotes o monedas para formar parte del patrimonio o del ahorro de particulares o empresas.

Por último, la demanda de los bancos centrales se refiere al oro comprado en forma de barras para formar parte de las reservas de los países.

El consumo de oro por sectores en el primer trimestre de 2013 y de 2014 se muestra en la tabla 6.7.

Consumo de oro en el primer trimestre				
Año	Joyería	Tecnología	Inversión	Bancos centrales
2013	554.7	103.5	288.1	130.8
2014	570.7	99.0	282.3	282.5

Datos del World Gold Council.

Tabla 6.7: Consumo de oro por sectores durante los primeros trimestres de 2013 y 2014.

ACTIVIDADES

7.1 De acuerdo con los datos del World Gold Council, ¿qué porcentaje de la producción primaria mundial de oro procedió de China en 2013?

a) Faltan datos para calcularlo.
b) El 25.65 %.
c) El 15.16 %.

7.2 De acuerdo con los datos del World Gold Council, ¿cuánto tendría que incrementarse la producción de USA en 2014 respecto de su producción en 2013 para tener la misma producción que tuvo Australia en 2013?

a) Faltan datos para calcularlo, ya que depende de la producción que tenga Australia en 2014.
b) El 12.33 %.
c) El 18.24 %.

7.3 De acuerdo con los datos y estimaciones del World Gold Council, como consecuencia de la producción primaria de 2013, la cantidad de oro extraído en el mundo se incrementó en un porcentaje igual a

a) 1.58 %.
b) 15.83 %.
c) 0.15 %.

7.4 De acuerdo con los datos de producción de oro en Sudáfrica de la tabla 6.6, ¿cuál de las afirmaciones siguientes es cierta?

a) En 2010, la producción había disminuido un 81.7 % respecto de 1970.
b) En 2010, la producción había disminuido un −81.7 % respecto de 1970.
c) La producción de 1970 fue un 81.7 % mayor que la producción de 2010.

7.5 De acuerdo con los datos de producción de oro en Sudáfrica de la tabla 6.6, ¿cuál de las proposiciones siguientes es verdadera?

a) De los nueve valores de producción de la tabla 6.6, cuatro son mayores que su media y cinco son menores.
b) De los nueve valores de producción de la tabla 6.6, cinco son mayores que su media y cuatro son menores.
c) De los nueve valores de producción de la tabla 6.6, alguno es mayor que el doble de su media.

7.6 La media de los nueve datos de producción de la tabla 6.6 es $\bar{x} = 566.79$, ¿cuál es su varianza?



a) 373515.76.
b) 52264.86.
c) 3361641.85.

7.7 De acuerdo con los datos de consumo de oro en el primer trimestre de 2014, ver tabla 6.7, ¿cuál de las tablas siguientes muestra los porcentajes del consumo total del trimestre que corresponden a cada uno de los sectores, donde A es el sector *joyería*, B es el sector *tecnología*, **C** es el sector *inversión* y **D** es el sector de *bancos centrales*.

a)

Porcentaje de cada sector en el consumo total primer trimestre de 2014			
A	**B**	**C**	**D**
46.23 %	8.02 %	22.87 %	22.88 %

b)

Porcentaje de cada sector en el consumo total primer trimestre de 2014			
A	**B**	**C**	**D**
51.50 %	9.61 %	26.75 %	12.14 %

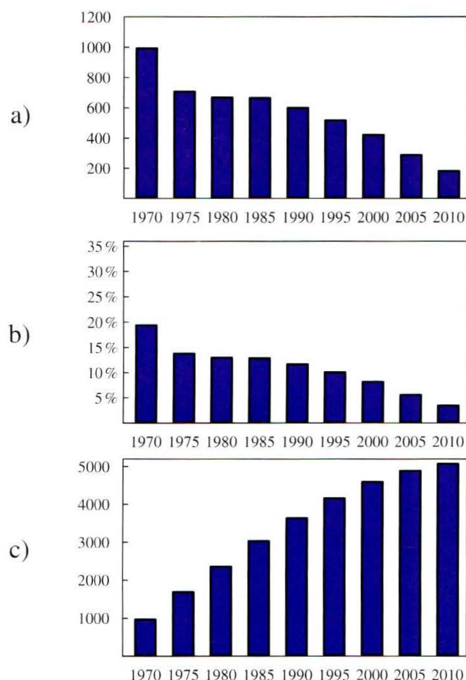
c)

Porcentaje de cada sector en el consumo total primer trimestre de 2014			
A	**B**	**C**	**D**
26.23 %	28.02 %	22.87 %	22.88 %

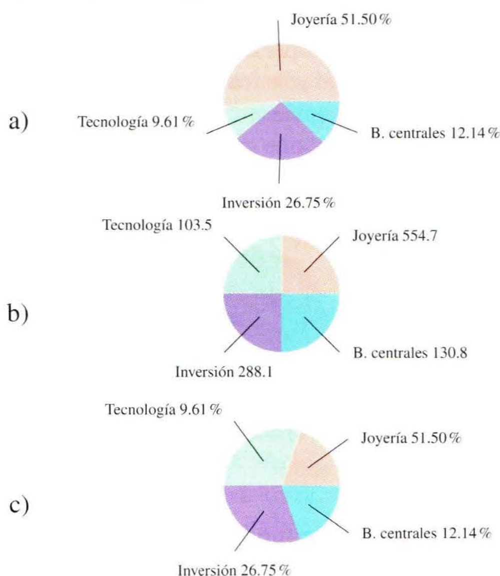
7.8 Consideramos los datos de porcentajes de consumo total de cada sector en cada trimestre, ver tabla 6.7, ¿cuál de las proposiciones siguientes es verdadera?

a) El porcentaje consumo de oro debido a la inversión o los bancos centrales ha disminuido en el primer trimestre de 2014 respecto del que tuvo en el mismo trimestre de 2013.
b) El porcentaje consumo de oro debido a los bancos centrales se ha más que duplicado en el primer trimestre de 2014 respecto del que tuvo en el mismo trimestre de 2013.
c) El porcentaje consumo de oro debido a la joyería ha disminuido en el primer trimestre de 2014 respecto del que tuvo en el mismo trimestre de 2013.

7.9 ¿Cuál de los histogramas siguientes permite comparar de manera inmediata los datos de producción de oro en Sudáfrica de la tabla 6.6?



7.10 Consideremos los datos de consumos de oro de la tabla 6.7, ¿cual de los diagramas siguientes representa los porcentajes de consumo por sectores, respecto del total, en el primer trimestre de 2013.



8 MEDIDAS DEL TIEMPO

CONTEXTO

Desde un punto de vista físico el tiempo transcurre uniformemente sin ninguna característica que distinga unos instantes de otros. La medida del tiempo se realiza siempre a través de algún tipo de movimiento, bien sea la caída de cierta cantidad de arena, la oscilación de un péndulo, la vibración de los cristales de cuarzo o bien, incluso, el propio movimiento del Sol en los relojes que utilizan la sombra de una varilla para señalar la hora.

No obstante, para la sociedad humana es fundamental poder fechar los acontecimientos de acuerdo con ciertos patrones de medida, que permitan a las personas comunicar el instante en que tienen lugar los sucesos. Además, para el hombre, el tiempo transcurre en dos ciclos que gobiernan su vida:

- la sucesión de los días y las noches que se repiten periódicamente, debido al giro de la Tierra sobre su eje, que hace que el movimiento aparente del Sol de Este a Oeste se repita cada día de forma casi idéntica al anterior.

- la sucesión de cuatro estaciones de características muy marcadas, ocasionadas por el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, que tiene por efecto que los rayos solares incidan en cada región más perpendicularmente y durante más horas en verano y de forma más oblicua y menos prolongada en invierno.

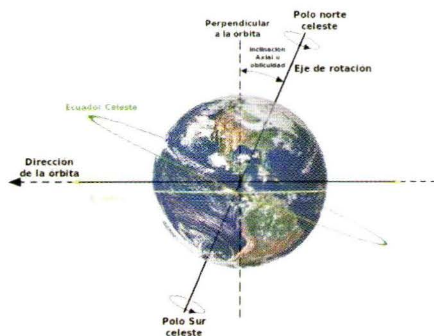


Figura 6.19: El globo terrestre.

Ello es debido a que el eje de giro de la Tierra tiene una cierta inclinación respecto al plano en que describe su órbita alrededor del Sol como se indica en la figura 6.19.

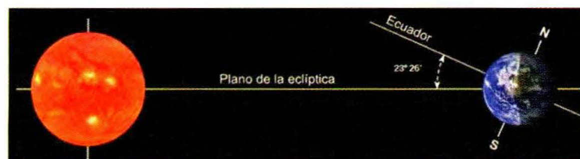


Figura 6.20: Invierno en el hemisferio norte y verano en el hemisferio sur.

En la figura 6.20 se observa las consecuencias de dicha inclinación sobre la incidencia de los rayos del Sol en la Tierra. Como el Sol está a la izquierda, la imagen corresponde a un día de invierno en el hemisferio norte. En cambio, si el Sol estuviese a la derecha de la imagen se tendría un día de verano en España.

Los dos fenómenos anteriores han dado lugar a sendas unidades para medir el tiempo.

EL DÍA

En cualquier lugar, un **día** es el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol por el meridiano del lugar, que es la línea imaginaria que lo une con los polos terrestres. En cada lugar es **mediodía** cuando el Sol atraviesa dicha línea. Desde la antigüedad fue fácil distinguir cuando ocurre el mediodía, observando el momento en que un palo clavado en el suelo proyecta la sombra más corta.

El día se divide en 24 **horas**, de las cuales las 12 anteriores al mediodía se designan por a.m. (*ante meridiem*) y las 12 posteriores por p.m. (*post meridiem*); aunque también es frecuente contar las horas de 0 a 24, situando en las 12 el mediodía. El convenio es que el cambio de fecha local se produce a **medianoche**: 12 horas después del mediodía, se pasa al día siguiente.

Tras fijar un origen en un acontecimiento cultural notable, como el nacimiento de Jesucristo, con sólo el día como unidad de medida, es posible fechar todos los acontecimientos. Por ejemplo, como no hubo año cero,

el primer día del siglo XXI, fue el 1 de Enero del año 2001; pero fue, también, el día 730486 d. C. (después de Cristo o, más exactamente, tras el 1 de Enero del año 1). La batalla de Guadalete, acaecida el 19 de Julio de 711, podría fecharse el día 259892 d.C.

A su vez la hora se divide en 60 **minutos** y el minuto en 60 **segundos**, como reliquia del sistema de numeración sexagesimal utilizado en Babilonia y, más tarde, en el califato Omeya. Pero, muchas veces en la indicación de las horas se mezclan los sistemas de numeración; por ejemplo, al designar las "seis y cuarto" (6+1/4 de hora), en vez de 6 horas 15 minutos (abreviadamente 6:15) o bien en forma decimal 6.25 horas. En cambio, siempre se dice las "ocho y veinte" (8 horas y 20 minutos o 8:20), en lugar de las "ocho y un tercio" (8+1/3 de hora) o, en forma decimal, $8.\widehat{3}$ horas.

Según lo indicado, el día consta de $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ segundos, así que la definición tradicional del segundo era la fracción $1/86400$ de la duración del día. Ahora bien, por diferentes razones (entre las cuales, sobre todo, el efecto de las mareas y de los movimientos sísmicos que redistribuyen la masa de la Tierra), la duración del día no es totalmente estable y, actualmente, el segundo se define mediante la referencia a relojes atómicos extraordinariamente precisos. De todas formas, organismos internacionales vigilan la discrepancia entre la progresión de los relojes atómicos y la rotación de la Tierra e introducen 1 segundo intercalar (*leap second*, en ingés) cuando es necesario para eliminar las diferencias. Desde 1972 ha sido necesaria la introducción de 25 segundos intercalares, en 25 años distintos. El gobierno de Estados Unidos ofrece, en la página web: *time.gov*, la hora oficial corregida por los organismos internacionales.

Naturalmente, el Sol pasa por el meridiano de un lugar después de haber pasado por el meridiano de los lugares situados más al Este y antes de pasar por los meridianos de los lugares situados más al Oeste. Esto hace que la hora no sea la misma en lugares de diferente longitud geográfica: es más tarde al Este de un punto y más temprano al Oeste. Por consiguiente, la superficie de la Tierra se divide en 24 husos horarios, centrados en el meridiano de Greenwich (o meridiano 0) y en los 23 meridianos en los que el mediodía se produce $1, 2, 3, \ldots, 12$ horas antes o $1, 2, 3, \ldots 11$ horas después. Sin embargo, los husos horarios están adecuadamente modificados para que la hora sea común en diversos territorios nacionales. El mapa de la figura 6.21 muestra los husos horarios reales.

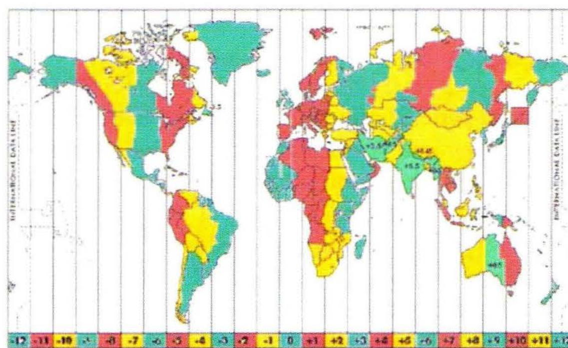


Figura 6.21: Los husos horarios.

La hora solar en el meridiano de Greenwich se designa por *UTC* o *Tiempo Universal Coordinado*, sustituyendo a la denominación antigua *GMT* o *Tiempo Medio de Greenwich*. La hora en el resto de los otros husos horarios es $UTC+1, UTC+2, \ldots$ o bien $UTC-1, UTC-2, \ldots$ La política de ciertos Gobiernos de llevar una hora de adelanto, o dos en el horario de verano, respecto a la hora solar introduce perturbaciones de la hora "legal" respecto a la hora solar. Por ejemplo, como los países árabes conservan la hora solar, respecto a la hora legal española, en Marruecos es una hora menos en invierno y dos en verano, aún perteneciendo al mismo huso horario. Cabe señalar también que los husos horarios no se consideran en las regiones polares, ya que el Polo Norte y el Polo Sur, donde se cortan todos los meridianos, pertenecen a todos los husos horarios.

La *línea de cambio de fecha internacional* es el centro del huso horario $UTC+12$. Cuando allí es medianoche, termina la fecha x y comienza la fecha $x+1$. A poca distancia a su Oeste falta poco para que empiece el día $x+1$, pero a poca distancia el Este, faltan muchas horas para que termine la fecha x. Por eso, después de navegar en las primeras horas del día x hacia el Este, los barcos que atraviesan la línea de cambio de fecha internacional cuentan todavía con las últimas horas del día x para continuar su viaje. A efectos sociales, "han ganado un día", como les ocurre a los protagonistas de la novela de Julio Verne *"La vuelta al mundo en ochenta días"*.

En cambio, si el viaje es hacia el Oeste y se aproximan a la citada línea a las 17:30 horas del día x, al cruzarla están a las 17:31 horas del día $x+1$; con lo cual "han perdido un día".

EL AÑO

Por su parte, el **año** es el tiempo que tarda la Tierra en completar una vuelta alrededor del Sol. Aunque en este caso resulta más difícil averiguar cuando se completa el giro, la inclinación del eje de rotación de la Tierra, respecto a su órbita alrededor del Sol, produce fenómenos notables. De hecho, desde la antigüedad se observó que hay dos días al año en que el periodo de luz diurna y de obscuridad nocturna duran lo mismo. Son los llamados *equinoccios* de primavera y de otoño, en los que el Sol se encuentra en el plano del ecuador terrestre. Tras el equinoccio de primavera, la luz diurna se alarga, hasta llegar al *solsticio de verano*, que corresponde al día de máxima duración de la luz diurna y la noche más corta. En esa fecha el Sol se encuentra, a mediodía, en su punto más alto sobre el horizonte; esto es, en el hemisferio Norte, en la vertical del Trópico de Cancer. Después, la noche se alarga y, tras el equinoccio de otoño, la luz diurna sigue disminuyendo hasta el *solsticio de invierno*, día de mayor duración de la noche, en el que el Sol de mediodía está en su punto más bajo sobre el horizonte; corresponde, para el hemisferio Norte, a que el Sol esté en la vertical del Trópico de Capricornio. La tradición ha asociado con ambos solsticios fiestas de celebración en muchas culturas, que se han hecho coincidir actualmente con la Navidad y la noche de San Juan. En la figura 6.22 se representa el movimiento anual del Sol, visto desde la Tierra; los equinoccios corresponden a las posiciones del Sol dentro del plano ecuatorial y los solsticios a los extremos de la órbita –la eclíptica–, con el Sol en su posición más alta y más baja sobre el plano ecuatorial.

Contando el número de días entre los sucesivos equinoccios de primavera, o entre los sucesivos solsticios de verano, los astrónomos egipcios y mesopotámicos atribuyeron al año una duración aproximada de 365.25 días, es decir 365 días y 6 horas. Sobre esa base, en el año 46 a.C, Julio César instauró en el Imperio Romano el **calendario Juliano** que establecía que hubiese un ciclo de tres años de 365 días, seguido de un año bisiesto con 366 días. Eran bisiestos, por tanto, todos los años múltiplos de 4. Y, de esta manera, cada cuatro años se compensaba el efecto del 1/4 de día de exceso de la duración del año respecto a los 365 días de un año normal.

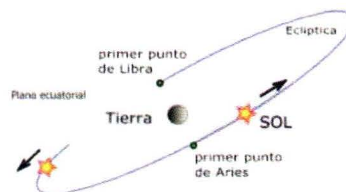


Figura 6.22: Movimiento anual del sol.

Sin embargo, la duración del año es ligeramente inferior a la estimación indicada; de manera que, tras cada ciclo de cuatro años, el comienzo oficial de la primavera se retrasaba algunos minutos respecto a su comienzo efectivo. Con el tiempo, los errores se fueron acumulando y, si no se hubiese producido una corrección, la primavera habría terminado por empezar oficialmente en plena canícula, lejos del día con igual duración de la luz diurna y de la noche. Para 1582, el error acumulado era más o menos de 10 días; así que el Papa Gregorio XIII encargó a dos astrónomos (Luis Lilio y Crístobal Clavio) una reforma que se conoce como **calendario Gregoriano**. Consta de un ciclo de 400 años, de los cuales son bisiestos los múltiplos de 4, excepto si son múltiplos de 100 y no son múltiplos de 400. Así, con dicha modificación del calendario Juliano, no fueron bisiestos los años 1700, 1800 y 1900, mientras que sí lo fueron el año 1600 y el 2000. La duración media del año, a lo largo del ciclo de 400 años establecido, resulta ser de 365.2425 días (véanse las cuestiones 23 y 24), mientras que la estimación actual de la longitud del año es de 365.242189 días. Todavía existe una pequeña diferencia de 0.000311 días de más por año de lo que debería ser; lo cual equivale a 26.87 segundos de exceso y producirá un error de un día completo cada 3215 años. Previsiblemente, para compensar el error será necesario suprimir un año bisiesto en torno al año 4797. No obstante, hay que tener en cuenta que la velocidad de giro de la Tierra sobre su eje va disminuyendo progresivamente, por efecto sobre todo de las mareas que



produce la atracción Lunar; de forma que la duración del día es cada vez un poco mayor. En consecuencia el reajuste deberá ser estudiado en su momento de acuerdo con los datos disponibles en esa época.

La instauración del calendario Gregoriano tuvo que recuperar el desfase que se había producido hasta 1582 con el calendario Juliano. De hecho, en los países católicos que primero implantaron el nuevo sistema (Italia, España y Portugal), el día siguiente al 4 de Octubre de 1582 fue el 15 de Octubre, suprimiendo 10 días del calendario. El ajuste se produjo en fechas distintas en cada país. Francia saltó del 9 de Diciembre de 1582 al 20 de Diciembre. En Inglaterra y sus colonias, hasta 1752 no se decretó que al 2 de Septiembre le sucedería el 14 de Septiembre, saltando ya 11 días. En Grecia el ajuste se demoró hasta 1923 y el 1 de Marzo fue el día siguiente al 15 de Febrero.

De forma convencional, aunque influido por el ciclo lunar de 29 y pico días, el año se divide en 12 **meses**. Lo más simple sería intercalar 5 meses de 31 días entre los restantes 7 meses de 30 días, añadiendo un día a algún mes de 30 días los años bisiestos. Sin embargo, por razones históricas los meses tienen la duración que nos resulta habitual, en la que tienen 30 días Abril, Junio, Septiembre y Noviembre, mientras que Febrero consta de 29 o 28 según que sea bisiesto o no.

Desde el punto de vista laboral y religioso, tiene mucha importancia la **semana**, compuesta de 7 días consecutivos, que coinciden relativamente con las fases de la Luna. Un año no bisiesto consta de 52 semanas y un día; razón por la cual, cada fecha que un año cae en determinado día de la semana (Jueves, por ejemplo) cae al año siguiente en el siguiente día de la semana (Viernes, en este caso). La regla se altera con los años bisiestos, puesto que constan de 52 semanas y dos días, siendo el día adicional el 29 de Febrero.

Es la existencia de los siete días de la semana, entre los cuales es festivo el domingo (en nuestra cultura), la que obliga cada año a cambiar las hojas del calendario, para facilitar, sin hacer cálculos, el día de la semana en la que cae cada fecha del año. Sin embargo, no es difícil diseñar un calendario perpetuo que calcule automáticamente el día de la semana de cualquier fecha. La página web: *http://www.gabilos.com/textocalendario.htm* ofrece uno de ellos.

ACTIVIDADES

8.1 Si un reloj de péndulo se atrasa 8 minutos al día y nunca se pone en hora, volverá a marcar la hora exacta después de

a) 45 días.
b) 90 días.
c) 120 días.

8.2 Si un reloj de péndulo se adelanta 7 minutos al día y nunca se pone en hora, volverá a marcar la hora exacta después de

a) 102 días, 20 horas, 34 minutos y 17.13 segundos.
b) 102 días, 20 horas, 38 minutos y 42.24 segundos.
c) 102 días, 21 horas, 17 minutos y 14.52 segundos.

8.3 Entre las 18:22 horas del Martes y las 10:50 el Viernes siguiente, transcurren

a) 4342 minutos.
b) 3918 minutos.
c) 3868 minutos.

8.4 Entre las 7:40 horas del 14 de Marzo y las 16:15 del 19 de Marzo, transcurren

a) $128.58\overset{\frown}{3}$ horas.
b) 128.538 horas.
c) 127.835 horas.

8.5 Si a las 22:50 se emprende un viaje de 4 horas 46 minutos de duración, durante el cual no se cambia de huso horario, la hora de llegada serán las

a) 2:46 del día siguiente.
b) 3:36 del día siguiente.
c) 4:04 del día siguiente.

8.6 Según *Google Maps*, el trayecto en automóvil de Zagreb a Atenas dura 15 horas y 52 minutos. Atenas está en el huso horario anterior al de Zagreb. Saliendo a las 8:30 de Zagreb, la hora local al llegar a Atenas será

a) 1:22.
b) 0:22.
c) 11:22.

8.7 Según *Google Maps*, el trayecto en automóvil de Atenas a Zagreb dura 16 horas y 1 minuto. Atenas está en el huso horario anterior al de Zagreb. Saliendo a las 16:30 de Atenas, la hora local al llegar a Zagreb será

a) 6:31.
b) 7:31.
c) 8:31.

8.8 Los horarios de los vuelos se indican siempre en la hora local. Iberia ofrece un vuelo que sale de Madrid a las 11:40 y llega a Río de Janeiro a las 17:15, pero se sabe que en Brasil es 5 horas más temprano que en España; entonces la duración del vuelo es

a) 5 horas y 35 minutos.
b) 9 horas y 35 minutos.
c) 10 horas y 35 minutos.

8.9 Air France tiene un vuelo que sale de París a las 12:35 y llega a Hong Kong a las 10:30 (del día siguiente), ambos en horario local. Entre París y Hong Kong hay una diferencia horaria de 6 horas. El vuelo dura

a) 15 horas y 55 minutos.
b) 13 horas y 55 minutos.
c) 12 horas y 55 minutos.

8.10 Un vuelo sale de Nueva York a las 21:50 y tarda 7 horas y 20 minutos en llegar a París. Dado que en Nueva York son seis horas menos que en París, llega al día siguiente a la hora local

a) 11:10.
b) 9:10.
c) 8:10.

8.11 El vuelo de regreso sale de París a las 19:10 y tarda 8 horas y 5 minutos en llegar a Nueva York. Dado que en Nueva York son seis horas menos que en París, la hora local a la que se llega a Nueva York es

a) 0:15 del día siguiente.
b) 23:15.
c) 21:15.

8.12 Un tren sale de Málaga a las 8:00 y viaja hacia Barcelona a velocidad constante de 90 km/h. A las 10:20 sale un tren de Barcelona y viaja hacia Málaga a velocidad constante de 120 km/h. Si la vía entre ambas ciudades tiene una longitud de 900 kilómetros, ambos trenes se cruzan a las

a) 12:54:28.
b) 13:37:08.
c) 13:56:12.

8.13 Un coche sale de Valencia a las 12:30 y viaja hacia Bilbao a velocidad constante de 110 km/h. A las 14:00 sale otro coche de Bilbao en dirección a Valencia a velocidad constante de 90 km/h. La distancia por carretera entre Valencia y Bilbao es de 612 kilómetros. Cuando ambos coche se crucen estarán a una distancia de Valencia de

a) 410.85 kilómetros.
b) 372.62 kilómetros.
c) 324.28 kilómetros.

8.14 La diferencia de longitud geográfica entre los extremos de cada huso horario teórico es de

a) 12°.
b) 15°.
c) 18°.

8.15 Sabiendo que el radio de la Tierra mide 6375 kilómetros, la anchura de los husos horarios teóricos en el ecuador terrestre es de

a) 1215 kilómetros.
b) 1488 kilómetros.
c) 1669 kilómetros.

8.16 Un navegante solitario parte de Sudáfrica y atraviesa el océano Índico, el Pacífico y el Atlántico, para regresar al punto de partida. Empieza su viaje al mediodía de cierta fecha y recorre 5° de longitud geográfica cada día. La duración del viaje y el número de veces

que habrá visto pasar al Sol sobre su cabeza antes de llegar a su destino son respectivamente

a) 72 días y 72 veces.
b) 72 días y 73 veces.
c) 72 días y 71 veces.

8.17 Un navegante solitario parte de Sudáfrica y atraviesa el océano Atlántico, el Pacífico y el Índico, para regresar al punto de partida. Empieza su viaje al mediodía de cierta fecha y recorre 8° de longitud geográfica cada día. La duración del viaje y el número de veces que habrá visto pasar al Sol sobre su cabeza antes de llegar a su destino son respectivamente

a) 45 días y 44 veces.
b) 45 días y 45 veces.
c) 45 días y 46 veces.

8.18 La figura 6.23 muestra, en azul, la duración de la luz diurna en Madrid, durante los distintos días del año 2011. Los equinoccios corresponden a los puntos marcados con

a) *A* y *B*.
b) *A* y *C*.
c) *B* y *D*.

8.19 La figura 6.23 muestra, en azul, la duración de la luz diurna en Madrid, durante los distintos días del año 2011. Los solsticios corresponden a los puntos marcados con

a) *A* y *B*.
b) *A* y *C*.
c) *B* y *D*.

8.20 En la figura 6.23 aparecen representadas, en verde y naranja respectivamente, la hora de la salida y la puesta del Sol en Madrid, durante los sucesivos días del año 2011. Las discontinuidades o saltos que se aprecian en ambas curvas son debidas a

a) los pasos del Sol por el ecuador terrestre.
b) la influencia de la Luna.
c) la introducción y supresión del horario de verano.

8.21 El primer día del siglo II fue el

a) 1 de Enero del año 100.
b) 1 de Enero del año 101.
c) 1 de Enero del año 200.

8.22 El primer día del tercer milenio fue el

a) 1 de Enero del año 2001.
b) 1 de Enero del año 2000.
c) 1 de Enero del año 200.

8.23 Según el calendario Gregoriano, en cada ciclo de 400 años el número de años bisiestos es

a) 100.
b) 97.
c) 96.

8.24 Según el calendario Gregoriano, la duración media del año es

a) 365.2425 días.
b) 365.2422 días.
c) 365.24219 días.

8.25 En la noche del 31 de Diciembre del año 406, las tribus bárbaras del Norte de Europa atravesaron el Rin, que estaba congelado, para invadir las Galias, dando lugar al comienzo de la caída del Imperio Romano. Contando desde el comienzo de nuestra era (1 de enero del año 1), habían transcurrido

a) 138 190 días.
b) 148 190 días.
c) 148 291 días.

8.26 El 14 de Julio de 1789 se produjo la toma de la Bastilla, inicio de la Revolución Francesa. Desde el comienzo de nuestra era (1 de enero del año 1) habían transcurrido

a) 653 614 días.
b) 566 807 días.
c) 532 304 días.

8.27 Con una jornada laboral de 8 horas cinco días a la semana, la proporción de tiempo semanal trabajado es



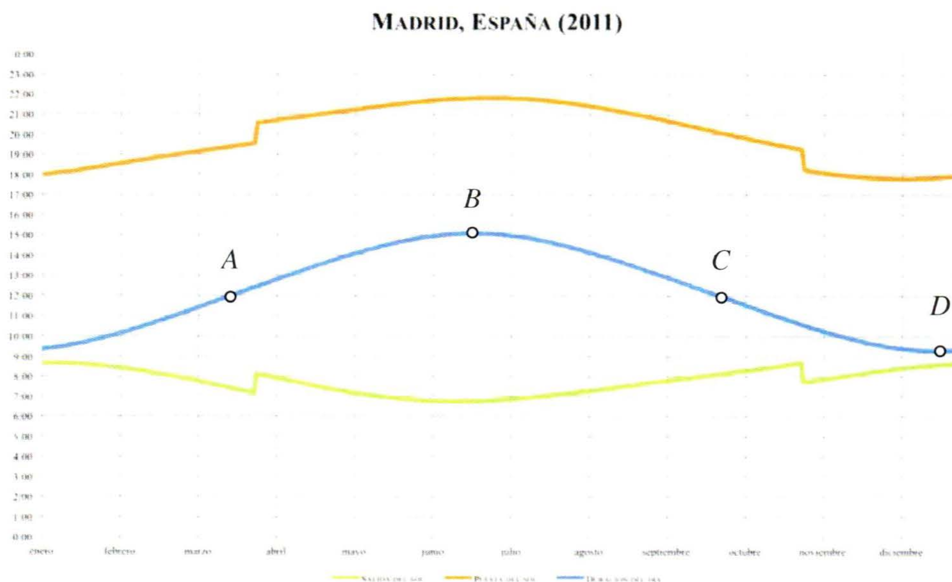


Figura 6.23: Ciclo del sol en Madrid (2011).

a) 26.32 %.
b) 24.18 %.
c) 23.81 %.

8.28 En un mes de 31 días, sin más festivos que los fines de semana y que empieza un Jueves, una jornada laboral de 8 horas cinco días a la semana, supone una proporción de tiempo mensual trabajado del

a) 23.66 %.
b) 26.24 %.
c) 28.48 %.

8.29 Entre los años 2001 y 2400, el número de calendarios (con distinta disposición de los días) que será necesario imprimir es

a) 7.
b) 14.
c) 400.

8.30 Si el 6 de Mayo de 2014 es Martes, el 6 de Mayo de 2018 será

a) Domingo.
b) Lunes.
c) Viernes.

8.31 Si el 4 de Febrero de 2015 cae en Miércoles, el 4 de Febrero de 2020 será

a) Lunes.
b) Martes.
c) Sábado.

8.32 Si un 29 de Febrero a mediados de siglo cae en Sábado, el 29 de Febrero siguiente será

a) Martes.
b) Jueves.
c) Viernes.

9 EL MUNDO DEL FÚTBOL

CONTEXTO

El fútbol es un deporte muy popular en todo el mundo. Mueve multitudes, dinero, emociones, pasiones que a pocos dejan indiferentes. Los medios de comunicación prestan gran atención a las diferentes competiciones. El público sigue con gran interés las declaraciones de los principales protagonistas: entrenador, jugadores destacados, presidentes del club y periodistas especializados. Además, los medios tecnológicos actuales hacen posible la elaboración de numerosos conjuntos de datos estadísticos relativos a los encuentros y torneos.

El fútbol, llamado también balompié, se juega con un balón esférico cuya circunferencia no puede ser superior a 70 centímetros ni inferior a 68 cm. El encuentro enfrenta a dos equipos de 11 jugadores, dirigidos por su entrenador. El juego consiste en que los jugadores de cada equipo desplacen el balón con el pie, haciéndolo circular entre sus compañeros, al objeto de lograr introducirlo en la meta que defiende el equipo contrario, lo cual representa un gol. Gana el equipo que mete más goles, si bien el encuentro puede terminar en empate, salvo en algunos partidos concretos de determinadas competiciones. Normalmente, el partido dura dos tiempos de 45 minutos, con un descanso intermedio de 15 minutos. Si durante el transcurso del encuentro se producen interrupciones significativas se puede añadir a cada tiempo unos minutos de prolongación.

En el equipamiento de los jugadores, se destaca el dorsal o número personal de identificación en el campo. Actualmente, las plantillas de un club oscilan entre los 20 y 25 jugadores, admitiéndose como dorsal cualquier número entre 1 y 99, el cual debe mantenerse a lo largo de toda la temporada de juego. Uno de los jugadores ejerce de capitán en representación de sus compañeros.

El desarrollo del juego se rige por unas determinada reglas. El árbitro del encuentro tiene la facultad de sancionar las eventuales infracciones, o faltas, previstas por el reglamento. En su cometido, el árbitro está auxiliado por dos jueces de línea y un cuarto, e incluso un quinto, árbitro. Las faltas más repetidas consisten en zancadillear, agarrar o dar patadas a un contrario. Por otra parte, ningún jugador puede tocar el balón con la mano, excepto uno de ellos que se denomina guardameta o portero. La pena máxima, con la que se castigan determinadas faltas que ocurren en el área penal, se denomina penalti. La ejecuta un jugador mediante un tiro libre directo desde el punto de penal, sin más defensor que el guardameta del equipo sancionado. Determinadas faltas pueden acarrear también una sanción disciplinaria, en forma de tarjeta amarilla con el significado de amonestación, o roja que conlleva la expulsión del partido del jugador castigado.

Los encuentros de fútbol entre los diferentes equipos se organizan en forma de competiciones. Las más habituales son la liga y la copa.

En la liga todos los equipos juegan contra todos, habitualmente a doble vuelta una vez en el campo de cada contendiente. La victoria suma tres puntos al equipo ganador y el empate representa un punto para cada uno. Al final de la temporada, el equipo que haya logrado más puntos es el campeón de la liga. Para jugar la liga, los equipos se clasifican en divisiones: primera o división de honor, segunda o división de plata, etc. Cada división suele tener alrededor de 20 equipos. Al final de temporada se produce el ascenso de los equipos mejor clasificados en una división a la división superior, con el consiguiente descenso de otros tantos equipos a la división que abandonan los ascendidos.

En el sistema de copa, los equipos se enfrentan por parejas, organizadas según determinadas reglas e incluso contando con la intervención del azar al efectuar por sorteo los emparejamientos. Habitualmente, se juega también a doble vuelta con sendos partidos en el campo de cada uno de los contendientes. El ganador de la eliminatoria es el equipo que contabilice más goles en total, con la peculiaridad de que, en caso de empate en el cómputo global, los goles obtenidos en el campo contrario computan el doble. Si esta regla no permite deshacer el empate, se acude al lanzamiento de tandas de penalties, cinco por cada equipo, hasta el momento en que uno resulte vencedor. En el argot del fútbol a este sistema para decidir el vencedor se le suele llamar la "lotería de los penalties". De esta forma, los equipos

ganadores van avanzando a las sucesivas fases: dieciseisavos, octavos, cuartos, semifinales, hasta llegar a la ansiada final que se juega a un solo partido. Sólo puede haber un ganador de la copa, por lo que si después de los 90 minutos de juego que marca el reglamento, el resultado es de empate, se juega una prórroga de 30 minutos. De persistir el empate, se acude a la citada lotería de penalties.

El torneo de fútbol más importante es la *Copa Mundial de la FIFA (Fédération Internationale de Football Association)*, o simplemente "mundial", que se celebra cada cuatro años. En ella participan las selecciones nacionales de los países de mayor nivel futbolístico entre las diferentes confederaciones geográficas que forman la FIFA. En el año 2010, el mundial se celebró en Sudáfrica y la campeona fue la selección española. La FIFA ha publicado varias estadísticas sobre esta competición que se encuentran en la web http://es.fifa.com/tournaments/archive/worldcup/ southafrica2010/index.html.

El terreno de juego



Figura 6.24: Esquema del terreno de juego de un campo de fútbol.

La figura 6.24 representa un esquema del terreno de juego de un campo de fútbol, con la descripción de sus principales elementos: las metas, o porterías, las líneas de banda y meta, la línea media, los postes y cuadrantes de esquina, las áreas de meta, las áreas de penal, el círculo central, los puntos de penal y el punto central. Como se puede apreciar, algunos elementos son opcionales y no figuran en todos los campos.

La figura 6.25 incluye las medidas que definen cada una de los elementos, zonas y puntos del campo. Hay que observar que el reglamento no exige una longitud y anchura estrictos para las dimensiones del propio terreno de juego, sino que permite cualquier medida comprendida entre los límites indicados en la figura 6.25, de forma que la longitud de la línea de banda tiene que tener un mínimo de 90 metros y un máximo de 120, mientras que la anchura, o sea la longitud de la línea de meta, tiene que tener un mínimo de 45 metros y un máximo de 90.

Medidas métricas

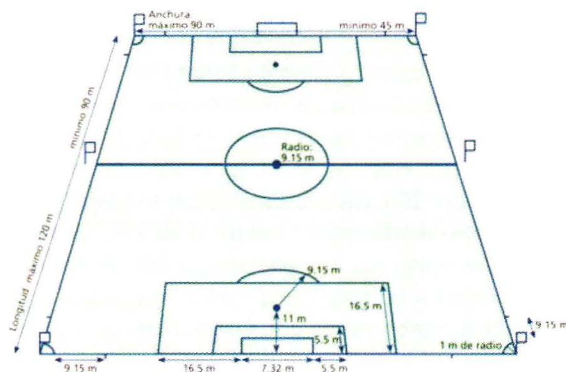


Figura 6.25: Medidas del terreno de juego de un campo de fútbol.

No obstante, la mayoría de los campos suelen tener las medidas recomendadas por los organismos internacionales: 105 metros de longitud y 68 metros de anchura (ver figura 6.27).

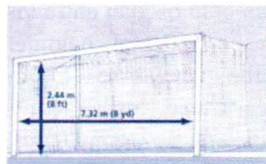


Figura 6.26: Dimensiones de la meta, o portería, de un campo de fútbol.

Las dimensiones de las porterías vienen indicadas en la figura 6.26: ancho 7.32 metros y alto 2.44 metros. Expresados en el sistema imperial británico, los valores anteriores corresponden a 8 yardas de ancho y 8 pies de alto.

En la figura 6.27 se encuentra una representación del terreno de juego en un plano cartesiano. El origen de coordenadas es el punto central, o centro del campo,



Figura 6.27: Representación en el plano cartesiano del terreno de juego de un campo de fútbol.

el eje de ordenadas coincide con la línea media, el eje de abscisas es la recta perpendicular a la línea media por el punto central, y la unidad de medida en cada eje es el metro.

ACTIVIDADES

9.1 Próximo a celebrarse un partido de máxima trascendencia de cara a la clasificación final de la liga, la prensa recogía las siguientes declaraciones del entrenador del Sport Club de Fútbol:

- *El próximo partido es muy importante para nosotros. Necesitamos el apoyo de la afición. ¡Ojalá acuda mucha gente al estadio!*

Las palabras del entrenador pueden expresarse como las siguientes oraciones: p = *el próximo partido es muy importante para nosotros*, q = *necesitamos el apoyo de la afición*, r = *¡ojalá acuda mucha gente al estadio!*. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) p y q son proposiciones lógicas, pero r no es una proposición lógica.
b) q y r son proposiciones lógicas, pero p no es una proposición lógica.
c) p y r son proposiciones lógicas, pero q no es una proposición lógica.

9.2 Al ser preguntado por la posible alineación de su equipo, el entrenador del Sport Club de Fútbol manifestó a los medios de comunicación: *"Si Bieito se recupera de su lesión entonces no jugará Joao"*. La alineación fue: *Manoel, Walter, Rocha, Renato, Souza, Crislan, Joao, Gilberto, Emerson, Fabricio, Claudinei*. Suponiendo que el entrenador dijo la verdad, podemos deducir que *Bieito no se recuperó de su lesión* al aplicar la regla de inferencia denominada

a) *Modus ponendo ponens.*
b) *Modus tollendo tollens.*
c) *Modus tollendo ponens.*

9.3 En una rueda de prensa, el entrenador del Sport C.F. respondió a la pregunta de un reportero: *"Nuestro rival es un equipo muy combativo o tiene mucha suerte".*

- *O las dos cosas*, añadió el periodista.

- *En efecto, o las dos cosas*, concedió el entrenador.

El partido finalizó 0-1 a favor el equipo rival, tanto marcado en una jugada desgraciada del Sport C.F. Todos los periodistas deportivos convinieron en afirmar que la supuesta combatividad del rival había brillado por su ausencia. Suponiendo que el comentario del entrenador es cierto y que, en efecto, el rival no había mostrado su combatividad en modo alguno, podemos deducir que *el rival tiene mucha suerte* al aplicar la regla de inferencia denominada

a) *Modus ponendo ponens.*
b) *Modus tollendo tollens.*
c) *Modus tollendo ponens.*

9.4 En vista de que las previsiones meteorológicas anunciaban que el día del encuentro sería soleado, el entrenador del Sport C. F. razonaba a su equipo técnico: *"A nosotros nos conviene que el terreno de juego esté húmedo. Así pues, si el día del partido no llueve, funcionará la manguera y se regará el campo".* El día del partido amaneció soleado y no cayó ni una sola gota de agua. Entonces podemos afirmar que *funcionó la manguera y se regó el campo* si aplicamos la regla de inferencia denominada

a) *Modus ponendo ponens.*
b) *Modus tollendo tollens.*
c) *Modus tollendo ponens.*

9.5 De camino hacia el campo para asistir a un encuentro al final de la temporada dos amigos comentaban:

- *"Si ganamos este partido nos clasificamos para la* champions league", decía uno.

- *"Si nos clasificamos para la* champions league, *salvamos la temporada"*, apostillaba el otro.

Ya en la tribuna, dirigiendo la mirada hacia el palco presidencial, reflexionaban: *"Si ganamos este partido salvamos la temporada".* Esta última reflexión

a) es consecuencia lógica de los dos comentarios anteriores al aplicar la regla de razonamiento denominada *Modus ponendo ponens.*
b) es consecuencia lógica de los dos comentarios anteriores al aplicar la regla de razonamiento denominada *Ley del silogismo hipotético.*
c) no se deduce necesariamente de los dos comentarios anteriores.

9.6 Al finalizar un encuentro, el jugador *Bieito* del Sport Club de Fútbol razonó del siguiente modo ante los micrófonos de la televisión: *No jugamos bien pero ganamos el partido; puesto que ganamos el partido sumamos tres puntos; si sumamos tres puntos seremos campeones; luego, no jugamos bien pero seremos campeones.*

a) El razonamiento del jugador es lógicamente válido.
b) El razonamiento del jugador es una falacia.
c) Sin disponer de más premisas no es posible decidir si el razonamiento del jugador es válido o es una falacia.

9.7 Sea $I\!R$ el conjunto de los números reales. Consideremos los subconjuntos de $I\!R$ definidos de la forma siguiente:

$$A = \{x \in I\!R \mid x \geq 90\} \quad B = \{x \in I\!R \mid x \leq 120\}$$

Para que x sea una longitud reglamentaria de un campo de fútbol tiene que ocurrir necesariamente que

a) $x \in A \cup B$.
b) $x \in A \cap B$.
c) $x \in A^c \cap B^c$.

9.8 Sea $I\!R$ el conjunto de los números reales. Consideremos los subconjuntos de $I\!R$ definidos de la forma siguiente:

$$C = \{y \in I\!R \mid y < 45\} \quad D = \{y \in I\!R \mid y > 90\}$$

Para que y sea una anchura reglamentaria de un campo de fútbol tiene que ocurrir necesariamente que

a) $y \in C \cup D$.
b) $y \in C \cap D$.
c) $y \in C^c \cap D^c$.

9.9 Si x es un número real que representa la longitud de un campo de fútbol con medidas reglamentarias entonces se cumple necesariamente que

a) $x \in [90, 120]$.
b) $x \in (90, 120]$.
c) $x \in (90, 120)$.

.

9.10 Si y es un número real que representa la anchura de un campo de fútbol con medidas reglamentarias entonces se cumple necesariamente que

a) $y \in (45, 90)$.
b) $y \in (45, 90]$.
c) $y \in [45, 90]$.

.

9.11 Sea ℓ el número real que representa la longitud de la circunferencia de un balón de fútbol reglamentario. Entonces

a) $\ell \in (-\infty, 68) \cap (70, \infty)$
b) $\ell \in (-\infty, 68) \cup (70, \infty)$
c) $\ell \in (-\infty, 68)^c \cap (70, \infty)^c$

9.12 Un club de fútbol tiene una plantilla integrada por 23 jugadores. Sea A el conjunto formado por los nombres de los jugadores y $B = \{1, 2, 3, \ldots, 98, 99\}$ el conjunto de los 99 primeros números naturales. Consideremos la aplicación $f : A \mapsto B$ que asigna a cada jugador el número del dorsal que lo identifica en el campo a lo largo de la temporada de juego. Entonces podemos afirmar que

a) f es un aplicación sobreyectiva.
b) f es un aplicación inyectiva.
c) f es un aplicación biyectiva.

9.13 De las medidas de la meta establecidas en el enunciado

a) se deduce que una yarda es igual 3 pies.
b) se deduce que un pie es igual $\frac{1}{8}$ yardas.
c) no es posible deducir la equivalencia entre la yarda y el pie.

9.14 De las medidas de la meta establecidas en el enunciado

a) se deduce que una yarda es igual 1.0929 metros.
b) se deduce que una yarda es igual 0.915 metros.
c) no es posible deducir la equivalencia entre la yarda y el metro.

9.15 De las medidas de la meta establecidas en el enunciado

a) se deduce que un pie es igual 0.305 metros.
b) se deduce que un pie es igual 3.2787 metros.
c) no es posible establecer la equivalencia entre el pie y el metro.

9.16 La suma de las longitudes de los dos palos de una meta más el larguero superior que los une es igual a

a) 43 pies.
b) 17.08 metros.
c) 12.2 metros.

9.17 En el campo representado en la figura 6.27 el espacio entre los palos de una portería es una fracción de la longitud de la línea de meta

a) igual a $\frac{1}{10}$.
b) menor que $\frac{1}{10}$.
c) mayor que $\frac{1}{10}$.

9.18 La dimensión mayor del rectángulo formado por un área de meta es igual a



a) 12.82 metros.
b) 18.32 metros.
c) 16.5 metros.

9.19 La dimensión mayor del rectángulo formado por un área penal es igual a

a) 23.82 metros.
b) 40.32 metros.
c) 33 metros.

9.20 El perímetro del terreno de juego representado en la figura 6.27 es igual a

a) 173 metros.
b) 346 metros.
c) 210 metros.

9.21 De la figura 6.25 se deduce que el perímetro del rectángulo que forma un área de meta es igual a

a) 47.64 metros.
b) 54.92 metros.
c) 51.28 metros.

9.22 De la figura 6.25 se deduce que el perímetro del rectángulo que forma un área penal es igual a

a) 76.92 metros.
b) 113.64 metros.
c) 95.28 metros.

9.23 La superficie del terreno de juego representado en la figura 6.27 es igual a

a) 7,140 metros cuadrados.
b) 346 metros cuadrados.
c) 9,600 metros cuadrados.

9.24 La superficie del rectángulo que forma un área penal es igual a

a) 816.75 metros cuadrados.
b) 362.34 metros cuadrados.
c) 665.28 metros cuadrados.

9.25 La superficie del rectángulo que forma un área de meta es igual a

a) 110.77 metros cuadrados.
b) 120.78 metros cuadrados.
c) 100.76 metros cuadrados.

9.26 La superficie de una portería es igual a

a) 9.76 metros cuadrados.
b) 17.86 metros cuadrados.
c) 35.72 metros cuadrados.

9.27 Con respecto a la superficie del terreno de juego de la figura 6.27, la superficie de una portería supone

a) el 0.25 %.
b) el 0.75 %.
c) el 0.08 %.

9.28 ¿Qué porcentaje del área penal está ocupada por el área de meta?

a) 18.15 %.
b) 15.15 %.
c) 16.65 %.

9.29 La ecuación que representa la circunferencia que delimita el círculo central

a) es $x^2 + y^2 = 9.15$.
b) es $x^2 + y^2 = 83.72$.
c) no puede calcularse porque el enunciado no proporciona los datos necesarios para ello.

9.30 La longitud de la circunferencia que delimita el círculo central

a) mide aproximadamente 263.02 metros.
b) mide aproximadamente 57.49 metros.
c) no puede calcularse porque el enunciado no proporciona los datos necesarios para ello.

9.31 La superficie del círculo central

a) mide aproximadamente 263.02 metros cuadrados.
b) mide aproximadamente 57.49 metros cuadrados.
c) no puede calcularse porque el enunciado no proporciona los datos necesarios para ello.



9.32 En la representación cartesiana de la figura 6.27 la ecuación de la recta que une el punto central con uno cualquiera de los puntos de penal es

a) $y = 0$.
b) $y = 1$.
c) $y = 11$.

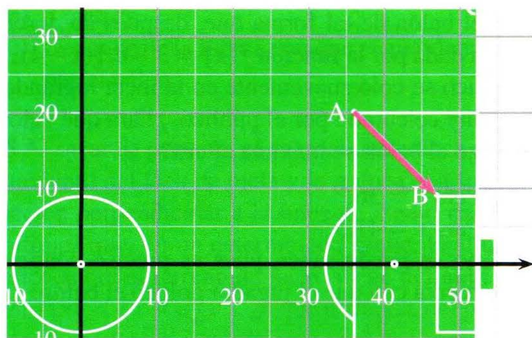
9.33 En la representación cartesiana de la figura 6.27 la ecuación de la recta perpendicular al eje de abscisas por el punto de penal con abscisa positiva es

a) $x = 11$.
b) $x = 41.5$.
c) $y = 41.5$.

9.34 En la representación cartesiana de la figura 6.27 la ecuación de la recta que une el punto central con el punto en que se coloca el poste del banderín de la esquina superior derecha del campo es

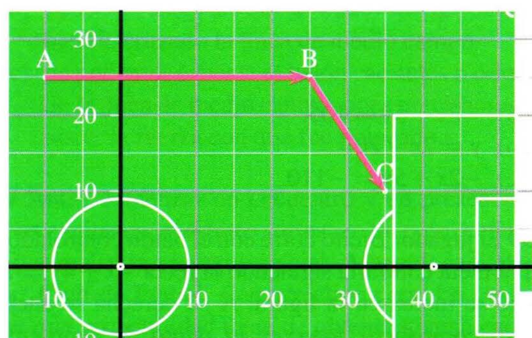
a) $y = \frac{52.5}{34}x$.
b) $105y + 68x = 0$.
c) $105y - 68x = 0$.

9.35 La distancia entre los puntos A y B de la figura mide aproximadamente



a) 20.51 metros.
b) 18.98 metros.
c) 15.56 metros.

9.36 En el minuto 89 del encuentro, el jugador *Bieito* se hace con el balón en el punto A de coordenadas (-10,25), corre con el balón controlado hasta el punto B de coordenadas (25,25), momento en que le obstaculiza un contrario al cual regatea y avanza hasta el punto C de coordenadas (35,10), desde donde chuta el balón logrando el tanto que supone la victoria de su equipo. Al redactar la crónica del partido, ¿cuál de los siguientes titulares puede considerarse más riguroso?

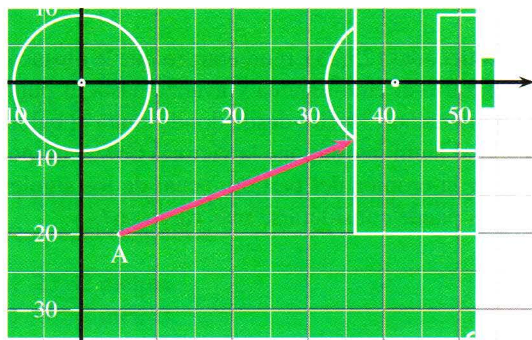


a) *Tras una cabalgada de 50 metros,* Bieito *marca el tanto que dio el triunfo a su equipo.*
b) *Tras una cabalgada de más de 50 metros,* Bieito *marca el tanto que dio el triunfo a su equipo.*
c) *Tras una cabalgada de casi 50 metros,* Bieito *marca el tanto que dio el triunfo a su equipo.*

9.37 Partiendo del punto A de coordenadas (5,-20), el jugador *Bieito* corre en diagonal hacia la meta contraria siguiendo la recta que tiene pendiente igual a $\frac{2}{5}$. Suponiendo que nadie obstaculiza su camino, el punto en el que pisa al área penal tiene coordenadas

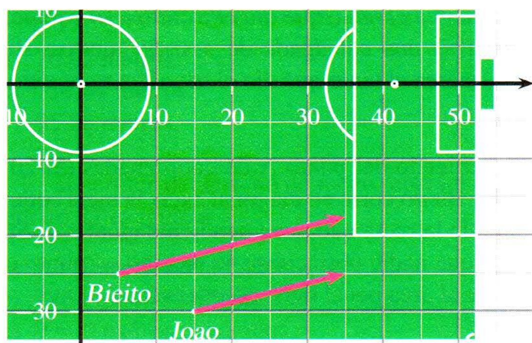
a) $(36, -7.6)$.
b) $(36, 16.5)$.
c) $(36, -5.5)$.

9.38 Partiendo del punto A de coordenadas (5,-20), El jugador *Bieito* corre en diagonal hacia la meta contraria siguiendo la recta que tiene pendiente igual a $\frac{2}{5}$, como se ve en la figura. La ecuación de la recta que sigue *Bieito* es



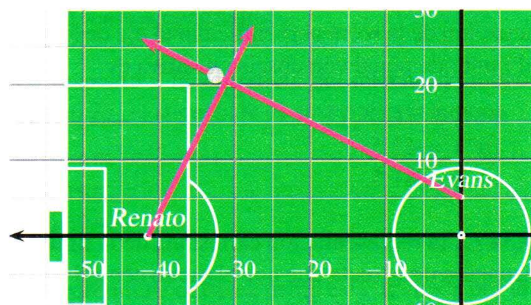
a) $-2x + 5y = 105$.
b) $y = 2x + 70$.
c) $-2x + 5y = -110$.

9.39 El jugador *Bieito* corre con el balón controlado hacia la meta contraria siguiendo la recta $-x + 4y = 105$, como se indica en la figura. A su derecha se encuentra su compañero *Joao*, en el punto de coordenadas (15,-30), quien, para acompañarle en la jugada, comienza también a correr siguiendo una dirección paralela a la recta que sigue *Bieito*. La ecuación de la recta a lo largo de la cual se desplaza *Joao* es



a) $-x + 4y = -135$.
b) $y = x + 135$.
c) $-2x + 8y = -110$.

9.40 Al comienzo del segundo tiempo, el atacante *Evans* corre desde el círculo central hacia un balón "dividido" que se encuentra por la zona del lateral izquierdo del área penal del equipo defensor. En su carrera, *Evans* sigue la ruta marcada por la recta de ecuación $x + 2y = 10$, como se indica en la figura. Al cruce sale el defensor *Renato*, partiendo del punto de penal de su área y corriendo en dirección perpendicular a la ruta de *Evans*. Entonces, la ecuación de la recta que recorre *Renato* es



a) $y = 2x + 83$.
b) $2x + y = -83$.
c) $x + 2y = -20.75$.

9.41 Unos minutos antes de finalizar el primer tiempo, el guardameta del equipo visitante realiza una falsa salida que es aprovechada por *Bieito* para tocar de vaselina el balón de tal forma que, después de describir la curva dada por la función $f(x) = 3 - 0.1(x - 41.5)^2$, el esférico se coló suavemente en la meta logrando un tanto muy celebrado por el público. ¿Para qué valor de x alcanzó el balón su máxima altura?

a) Para $x = 36$.
b) Para $x = 41.5$.
c) no se puede saber, pues es preciso conocer la fuerza con que el jugador golpeó el balón.

9.42 Unos minutos antes de finalizar el primer tiempo, el guardameta del equipo visitante realiza una falsa salida que es aprovechada por *Bieito* para tocar de vaselina el balón de tal forma que, después de describir la curva dada por la función $f(x) = 3 - 0.1(x - 41.5)^2$, el esférico se coló suavemente en la meta logrando un tanto muy celebrado por el público. La altura máxima a que ascendió el balón

a) fue de 3 metros.
b) fue de 4 metros.
c) no se puede saber, pues es preciso conocer la fuerza con que el jugador golpeó el balón.

9.43 Al sacar de portería, el guardameta coloca el balón en un punto del área de meta y lo golpea con fuerza en dirección perpendicular a la línea de medio campo. Si admitimos que, en un determinado saque, la altura del esférico sobre el terreno de juego viene definida por la curva $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$, ¿para qué valor de x el balón alcanza la máxima altura?

a) Para $x = 60$.
b) Para $x = 30$.
c) Depende de la fuerza con que el guardameta golpee el balón.

9.44 Al sacar de portería, el guardameta coloca el balón en un punto del área de meta y lo golpea con fuerza en dirección perpendicular a la línea de medio campo. Si admitimos que, en un determinado saque, la altura del esférico sobre el terreno de juego viene definida por la curva $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$, ¿cuál es la altura máxima que alcanza el balón en su recorrido?

a) 5 metros.
b) 3 metros.
c) Depende de la fuerza con que el guardameta golpee el balón.

9.45 Al sacar de portería, el guardameta coloca el balón en un punto del área de meta y lo golpea con fuerza en dirección perpendicular a la línea de medio campo. Si admitimos que, en un determinado saque, la altura del esférico sobre el terreno de juego viene definida por la curva $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$, ¿a qué distancia del punto de saque se encuentra el punto en que el que cae el balón al campo?

a) 60 metros.
b) 30 metros.
c) Depende de la fuerza con que el guardameta golpee el balón.

9.46 Al sacar de portería, el guardameta coloca el balón en un punto del área de meta y lo golpea con fuerza en dirección perpendicular a la línea de medio campo. Si admitimos que, en un determinado saque, la altura del esférico sobre el terreno de juego viene definida por la curva $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$ y no le toca ningún jugador antes de caer de nuevo al terreno de juego

a) podemos asegurar que el balón cae al suelo sin cruzar la línea de medio campo.
b) podemos asegurar que el balón cae al suelo habiendo cruzado la línea de medio campo.
c) no podemos saber si el balón cae antes o después de la línea de medio campo, pues precisamos conocer la fuerza con que fue golpeado.

9.47 Antes comenzar un encuentro y en presencia de ambos capitanes, el árbitro sortea a cara o cruz el equipo que realizará el saque inicial. *Manoel*, capital del Sport Club de Fútbol, siempre elige cara. Le gustaría saber qué probabilidad tiene de obtener alguna cara en los dos partidos de una eliminatoria de copa. Dicha probabilidad es

a) $\frac{2}{4}$.
b) $\frac{3}{4}$.
c) $\frac{2}{3}$.

9.48 *Manoel*, como capitán del equipo, siempre pide *"cara"* en el sorteo de campo que realiza el árbitro antes de comenzar un encuentro. En una semana del año hay tres encuentros de liga: domingo, miércoles y sábado. *Manoel* quiere saber qué probabilidad tiene de obtener alguna cara en los tres sorteos. Dicha probabilidad es

a) $\frac{2}{3}$.
b) $\frac{3}{4}$.
c) $\frac{7}{8}$.

9.49 Después de ganar la eliminatoria de cuartos de la copa, el entrenador del Sport C.F. está calculando las posibilidades que tiene de ganar la semifinal. Su próximo rival será el vencedor del enfrentamiento entre el Internacional F.C. y el Bahía Club. Las apuestas entre estos equipos están 1:1, es decir, ambos tienen la misma probabilidad, igual a 0.5, de pasar a enfrentarse con el Sport C.F. El entrenador cree que la probabilidad de



ganar al Bahía asciende al 0.8, mientras que considera al Internacional un rival más difícil, calculando que solo tiene 4 posibilidades entre 10 de vencerle. Si las estimaciones del entrenador son correctas, ¿cuál será la probabilidad de que el Sport F.C. gane la semifinal?

a) 0.52.
b) 0.65.
c) 0.60.

9.50 Cumplido el tiempo reglamentario y la prórroga, un partido de copa finaliza con empate. Para determinar el vencedor, se procede a lanzar una tanda de penalties. Para ello, el entrenador del equipo A designa a los jugadores A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5. Atendiendo a las estadísticas de cada jugador, los expertos determinan la siguiente tabla de probabilidades de acierto en la ejecución del penalti.

Jugador	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Probabilidad	0.90	0.85	0.88	0.92	0.95

Suponiendo que cada jugador acierta independientemente de los demás, ¿cual es la probabilidad de que los cinco lanzamientos se transformen en gol?

a) 0.59.
b) 0.41.
c) 0.85.

9.51 Cumplido el tiempo reglamentario y la prórroga, un partido de copa finaliza con empate. Para determinar el vencedor, se procede a lanzar una tanda de penalties. Para ello, el entrenador del equipo A designa a los jugadores A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5. Atendiendo a las estadísticas de cada jugador, los expertos determinan la siguiente tabla de probabilidades de acierto en la ejecución del penalti.

Jugador	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Probabilidad	0.90	0.85	0.88	0.92	0.95

Suponiendo que cada jugador acierta independientemente de los demás, ¿cual es la probabilidad de se produzca al menos un fallo?

a) 0.59.
b) 0.41.
c) 0.15.

9.52 En el mundial celebrado en Sudáfrica en el año 2010 participó un cierto número de equipos. El campeonato se desarrolló en dos fases. En la primera, se organizaron varios grupos y en cada uno de ellos se celebró un torneo por el sistema de liga. Pasaron a la segunda fase los dos primeros de cada grupo, resultando un número igual a la mitad del total de participantes. En la segunda fase los equipos se enfrentaron por parejas a un único partido. En la primera eliminatoria se redujo a la mitad el número de clasificados de la primera fase. Seguidamente, los supervivientes se enfrentaron por parejas en una segunda eliminatoria, quedando reducido de nuevo a la mitad el número de equipos en competición. Finalmente, se eliminaron una vez más por parejas hasta quedar únicamente dos equipos privilegiados que disputaron la final. ¿Cuántos equipos iniciaron el campeonato?

a) 32.
b) 64.
c) No se puede saber pues es necesario conocer el número de grupos.

9.53 En un mundial participa un cierto número de equipos. El campeonato se desarrolla en dos fases. En la primera, se organizan varios grupos, todos con igual número de equipos, y en cada grupo se celebra un torneo por el sistema de liga a una sola vuelta, es decir, cada equipo se enfrenta con todos los de su grupo una única vez. En la primera fase se jugaron un total de 48 partidos. Entonces:

a) Se puede asegurar con certeza que el número total de equipos que jugaron la primera fase fue 32.
b) Se puede asegurar con certeza que el número total de equipos que jugaron la primera fase fue 48.
c) Con los datos que proporciona el enunciado no se puede asegurar con certeza cuántos equipos jugaron la fase.



9.54 La variable estadística *"nacionalidad de un jugador que participa en un campeonato de fútbol"* es un variable

a) cualitativa.
b) cuantitativa discreta.
c) cuantitativa continua.

9.55 La variable estadística *"número de goles marcados por un jugador a lo largo de un campeonato"* es un variable

a) cualitativa.
b) cuantitativa discreta.
c) cuantitativa continua.

9.56 La variable estadística *"número de partidos jugados por un futbolista a lo largo de un campeonato mundial"* es un variable

a) cualitativa.
b) cuantitativa discreta.
c) cuantitativa continua.

9.57 La variable estadística *"distancia recorrida por un jugador en el campo a lo largo de un partido"* es un variable

a) cualitativa.
b) cuantitativa discreta.
c) cuantitativa continua.

9.58 Según las estadísticas de la FIFA, 96 jugadores marcaron algún gol a lo largo del mundial de 2010. La tabla siguiente muestra la distribución de la variable *"número de goles marcados por cada uno de los goleadores"* y la frecuencia absoluta de goleadores que anotó cada número.

Número de goles marcados (x_i)	Frecuencia absoluta de goleadores (F_i)
1	71
2	14
3	4
4	3
5	4

A la vista de los datos anteriores, podemos asegurar que

a) El porcentaje de goleadores que consiguieron un único gol no alcanzó el 72 %.
b) Más del 25 % de los goleadores consiguieron más de un gol.
c) El porcentaje de goleadores que anotó cinco goles superó el 5 %.

9.59 Según las estadísticas de la FIFA, el número de partidos jugados en el mundial de 2010 por cada uno de los seleccionados españoles viene dado en la tabla 6.8. Consideremos la variable estadística *"número de partidos jugados por cada seleccionado del equipo español en el mundial de 2010"*. Entonces la frecuencia relativa correspondiente al valor 7

Jugador	Partidos	Jugador	Partidos	Jugador	Partidos
Casillas	7	Torres	7	Arbeloa	1
Albiol	0	Cesc	4	Pedro	5
Piqué	7	Capdevila	7	Llorente	1
Marchena	3	Valdés	0	J. Martínez	1
Puyol	7	Mata	1	Silva	2
Iniesta	6	Alonso	7	Navas	3
Villa	7	Ramos	7	Reina	0
Xavi	7	Busquets	7		

Tabla 6.8: Número de partidos jugados por cada uno de los seleccionados españoles en el mundial de 2010.

a) vale aproximadamente 0.3043.
b) vale aproximadamente 0.4348.
c) no se puede calcular porque hay seleccionados que no jugaron ningún partido.

9.60 Según las estadísticas de la FIFA, el número de partidos jugados en el mundial de 2010 por cada uno de los seleccionados españoles viene dado en la tabla 6.8. Consideremos la variable estadística *"número de partidos jugados por cada seleccionado del equipo español en el mundial de 2010"*. Entonces la frecuencia relativa acumulada correspondiente al valor 3

a) vale aproximadamente 0.3043.
b) vale aproximadamente 0.4348.
c) no se puede calcular porque hay seleccionados que no jugaron ningún partido.

9.61 Según las estadísticas de la FIFA, la altura en centímetros de cada uno de los jugadores del equipo español que participaron en el mundial de 2010 viene dada en la tabla 6.9. Entonces la altura media del equipo era igual a

Jugador	Altura	Jugador	Altura	Jugador	Altura
Casillas	184	Torres	181	Arbeloa	184
Albiol	187	Cesc	175	Pedro	169
Piqué	192	Capdevila	182	Llorente	194
Marchena	182	Valdés	183	J. Martínez	190
Puyol	178	Mata	174	Silva	177
Iniesta	170	Alonso	183	Navas	172
Villa	175	Ramos	183	Reina	187
Xavi	170	Busquets	189		

Tabla 6.9: Altura en centímetros de los jugadores del equipo de España que participaron en el mundial de Sudádrica.

a) 180.91 cm.
b) 182.43 cm.
c) 179.38 cm.

9.62 Según las estadísticas de la FIFA, la altura en centímetros de cada uno de los jugadores del equipo español que participaron en el mundial de 2010 viene dada en la tabla 6.9. El rango de la variable *altura*

a) es igual a 25cm.
b) es igual a 194 cm.
c) no se puede calcular a partir de los datos de la tabla.

9.63 Un campeonato mundial de futbol se jugó en dos fases. A la segunda fase pasaron 16 equipos que se eliminaron por el sistema de copa a partido único, enfrentándose por parejas en rondas sucesivas hasta determinar el campeón. Se jugó además un encuentro adicional para decidir el tercer y cuarto puesto. El número de goles marcados en todo el campeonato fue exactamente el doble del número de partidos de la primera fase. Además, en media se marcaron 1.5 goles por partido en todo el campeonato. En todos los encuentros, salvo en uno, hubo jugadores amonestados con tarjeta amarilla. Si en dicho encuentro el árbitro hubiese enseñado tarjeta amarilla a todos y cada uno de los jugadores de uno de los dos equipo, las estadísticas de todo el campeonato hubiesen informado de que el número medio de tarjetas amarillas por partido ascendería exactamente a 4. ¿Cuántas tarjetas amarillas hubo efectivamente en el mundial?

a) 245
b) 145
c) con los datos proporcionados no se puede saber.

9.64 Según las estadísticas de la FIFA, en la tabla 6.10 viene dada la distribución del número de tarjetas amarillas mostradas en los encuentros jugados en el mundial del 2010. Entonces el número medio de tarjetas amarillas por partido fue

Número de tarjetas amarillas (x_i)	Número de encuentros (F_i)
0	2
1	5
2	11
3	11
4	12
5	14
6	4
7	2
8	1
9	1
12	1

Tabla 6.10: Número de tarjetas por partido en el mundial de 2010.

a) 3.62.
b) 4.32.
c) 4.

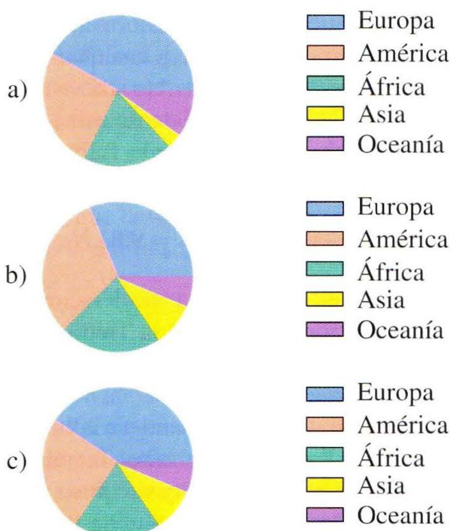
9.65 Según las estadísticas de la FIFA, en la tabla 6.10 viene dada la distribución del número de tarjetas amarillas mostradas en los encuentros jugados en el mundial del 2010. Entonces la dispersión del número de tarjetas amarillas mostradas, medida por la desviación típica fue

a) 4.42.
b) 2.10.
c) no se puede calcular pues es necesario conocer la media.

9.66 La figura 6.28 muestra la distribución geográfica de los equipos que participaron en el mundial de la FIFA de 2010. El diagrama de sectores que representa con mayor exactitud la distribución de frecuencias del número de países pertenecientes a cada continente es



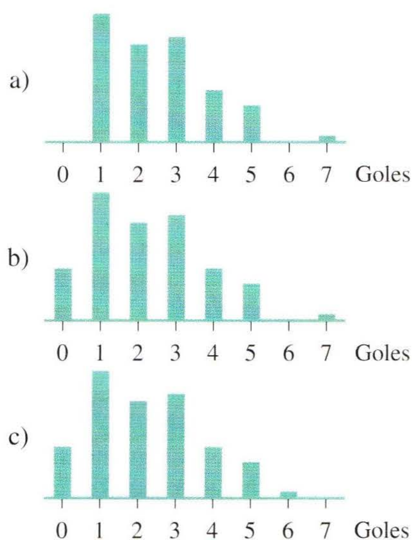
Figura 6.28: Distribución geográfica de los equipos que participaron en el mundial de la FIFA de 2010.



9.67 Según las estadísticas de la FIFA, la distribución del número total de goles al final del encuentro, en los partidos jugados en el mundial de 2010, se muestra en la tabla siguiente.

Número total de goles (x_i)	Número de partidos (F_i)
0	7
1	17
2	13
3	14
4	7
5	5
6	0
7	1

¿Cuál es el diagrama de barras que representa con mayor exactitud dicha distribución?



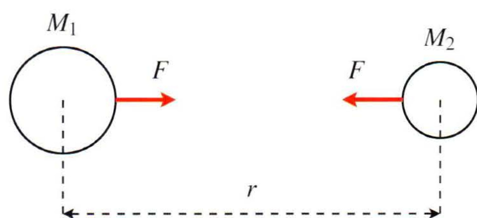
10 LA CAÍDA DE LOS CUERPOS

CONTEXTO

Todos hemos observado que las cosas se caen si nada las soporta. Pero el propósito de la Ciencia es explicar cómo y por qué ocurren los fenómenos que se observan. Así que, en este caso, se trata de entender cómo y por qué se caen las cosas.

En 1687, Isaac Newton, en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, enunció la *Ley de gravitación universal*, según la cual:

> Cualquier par de objetos con masa se atraen con fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambos.



$$F = G\ \frac{M_1 M_2}{r^2}$$

La figura ilustra el enunciado y la fórmula expresa el valor de la fuerza. En esta última, M_1 y M_2 son las masas de ambos objetos, medidas en kilogramos (kg), r es la distancia en metros (m) entre los centros de gravedad de ambos y G es la *constante de gravitación universal*.

Según la mecánica de Newton, una fuerza es todo aquello capaz de modificar el estado de movimiento de un cuerpo. En concreto, de acuerdo con la *segunda ley de Newton*:

> Un cuerpo de masa M, sometido a una fuerza F, sufre una aceleración a que verifica
>
> $$F = M\,a.$$

Es decir, cuando una fuerza F actúa sobre un cuerpo de masa M, éste se ve sometido a una aceleración a; o, dicho de otro modo, si la fuerza actúa durante un tiempo t, su velocidad inicial, v_0, pasa a ser

$$v = v_0 + at.$$

La unidad de fuerza es el *Newton* (N) que se define como la fuerza capaz de imprimir una aceleración $a = 1\ m/s^2$ a cualquier cuerpo de masa 1 kg. Con esta unidad, la constante de gravitación universal ha sido medida en diversos experimentos y tiene el valor

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2.$$

Dicho de otra forma: dos cuerpos de 1 kg de masa cada uno, separados por una distancia de 1 m, se atraen con una fuerza de $6.67 \cdot 10^{-11}\ N$. En el vacío y en ausencia de cualquier otra fuerza, cada uno de los cuerpos sufriría una aceleración de $6.67 \cdot 10^{-11}\ m/s^2$.

Lo pequeña que es la constante G explica por qué, al situar dos cuerpos sobre una mesa, no apreciamos ninguna fuerza entre ellos; la resistencia del aire y el rozamiento contra la mesa son suficientes para vencer la atracción que indica de la *Ley de gravitación universal*. Pero, en sentido contrario, la fuerza de la gravedad está presente de manera permanente en nuestras vidas. De hecho, la Tierra tiene una masa enorme, del orden de $5.968 \cdot 10^{24}$ kilogramos, y atrae a cualquier cuerpo con una fuerza apreciable. En concreto, como el radio de la Tierra es de 6371 km, un objeto de masa 1 kg situado a 10 m del suelo, es atraído por la Tierra con una fuerza

$$F = G\ \frac{5.968 \cdot 10^{24} \cdot 1}{(6371000 + 10)^2} = 9.81\ N$$

y produce sobre el objeto una aceleración $a = 9.81\ m/s^2$ en dirección al centro de la Tierra. En consecuencia, el objeto cae, acelerando a $9.81\ m/s^2$, hasta que tropieza con el suelo.

La fuerza de la gravedad nos mantiene adheridos al suelo e impide que flotemos en el aire. También permite que nuestra báscula indique nuestro *peso*; aunque esté graduada en kilogramos, lo que mide es la fuerza que ejercen nuestros pies al subirse a ella. Si nuestra



masa es de 75 kg, en la Tierra ejercemos sobre la báscula una fuerza $F = 9.81 \cdot 75 = 735.75\ N$ que la graduación muestra como 75 kg. Pero, la misma báscula, usada en la Luna, cuya masa y fuerza de la gravedad son mucho menores, daría una lectura muy inferior, a pesar de que nuestra masa siga siendo la misma.

Asimismo es la fuerza de la gravedad, en este caso del Sol, la que mantiene a la Tierra en su órbita, haciéndola girar en torno a él. De hecho, fueron las observaciones de los movimientos de los planetas, realizadas fundamentalmente por el astrónomo Kepler a finales del siglo XVI, las que permitieron a Newton establecer su *Ley de gravitación Universal*. También la fuerza de gravedad de la Luna provoca las mareas y la atracción gravitatoria entre las partículas dispersas por el espacio condensa los gases interestelares para formar las estrellas.

Volviendo a la caída de los cuerpos, es claro que, en nuestro entorno, la altura de un objeto sobre el suelo afecta muy poco a la fuerza con la que la Tierra lo atrae. Por tanto, se puede suponer que un cuerpo en caída libre está sometido a una aceleración constante $a = 9.81\ m/s^2$. Así, partiendo de su valor inicial v_0, su velocidad cambia, de tal forma que, al cabo de un tiempo t, tiene el valor

$$v = v_0 - 9.81 \cdot t\ m/s.$$

Aquí se considera negativa la dirección vertical hacia abajo; de forma que, si el cuerpo se ha lanzado hacia arriba con una velocidad v_0 positiva, va frenando hasta alcanzar una altura máxima, para volver a caer a continuación. En cambio, si se lanza hacia abajo, con una velocidad v_0 negativa, cada vez cae con más velocidad.

Dado que la velocidad es la derivada del espacio recorrido, la altura sobre el suelo de un cuerpo en caída libre es

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2$$

donde y_0 es la altura inicial desde la que cae y v_0 la velocidad con la que se movía inicialmente, contadas otra vez como positivas hacia arriba y negativas hacia abajo. De hecho, al derivar la última expresión respecto a t, se obtiene como velocidad instantánea $v_0 - 9.81 \cdot t$.

Lo anterior describe el movimiento exclusivamente vertical de un cuerpo sometido a la atracción terrestre. Sin embargo, es muy frecuente que un tal movimiento vertical se combine con un movimiento uniforme horizontal, porque, a la vez que se imprime una velocidad vertical v_0 al objeto, se le dota también de una velocidad inicial horizontal w_0. En tal caso, el objeto se mueve en el plano (x, y) formado por la dirección vertical, junto con la dirección horizontal en que se ha realizado en lanzamiento. Ignorando los rozamientos con el aire, el movimiento horizontal no se ve frenado por ninguna causa, mientras que el movimiento vertical tiene las peculiaridades indicadas (una aceleración negativa de 9.81 m/s^2). En consecuencia, las dos coordenadas (x, y) de objeto, en el instante t, responden a las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x_0 + w_0 \cdot t \\ y = y_0 + v_0 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2 \end{cases}$$

Normalmente el origen se fija en la posición inicial, de modo que $x_0 = y_0 = 0$. Con el único dato de las velocidades iniciales, v_0 y w_0, es entonces posible determinar múltiples características del movimiento. Por ejemplo, despejando de la primera ecuación $t = x/w_0$, y sustituyendo en la segunda, se obtiene

$$y = \frac{v_0}{w_0} - 9.81 \cdot \frac{x^2}{2w_0^2}.$$

Esta ecuación muestra que el objeto describe una parábola dentro del plano (x, y) y el sistema de ecuaciones anterior es la descripción de lo que se denomina *tiro parabólico*.

ACTIVIDADES

10.1 Un objeto de 50 kg de masa se sitúa a 10 cm de otro de 1000 kg. Según la *Ley de gravitación universal*, la fuerza con la que se atraen es de

a) 0.0062 Newtons.
b) 0.00335 Newtons.
c) 0.00033 Newtons.

10.2 Si un objeto de 50 kg de masa se sitúa a 10 cm de otro de 1000 kg, se atraen con una fuerza de 0.00033 N. En ausencia de ninguna otra fuerza, el objeto de 50 kg se moverá hacia el otro con una aceleración de

a) $6.6 \cdot 10^{-6}\, m/s^2$.
b) $6.6 \cdot 10^{-4}\, m/s^2$.
c) $6.6 \cdot 10^{-3}\, m/s^2$.

10.3 Si un objeto de 50 kg de masa se sitúa a 10 cm de otro de 1000 kg, se atraen con una fuerza de 0.00033 N. En ausencia de ninguna otra fuerza, el objeto de 1000 kg se moverá hacia el otro con una aceleración de

a) $3.3 \cdot 10^{-7}\, m/s^2$.
b) $3.3 \cdot 10^{-5}\, m/s^2$.
c) $3.3 \cdot 10^{-4}\, m/s^2$.

10.4 Un avión de 50 toneladas de masa, acelera para alcanzar al cabo de 3 minutos una velocidad de 900 Kilómetros por hora. Durante ese tiempo, los motores han ejercido una fuerza de

a) 52 200 N.
b) 69 500 N.
c) 85 000 N.

10.5 La Luna tiene una masa de $7.368 \cdot 10^{22}\, kg$ y un radio de 1740 kilómetros. En su superficie, la fuerza de la gravedad sobre un objeto de 1 kg es de

a) 9.81 N.
b) 3.54 N.
c) 1.62 N.

10.6 Un astronauta de 75 kg de masa ha llevado a la Luna su báscula casera. Pesándose en la Luna, donde la fuerza de la gravedad es de 1.62 N por kilogramo, verá que su peso es

a) 12.385 kg.
b) 32.450 kg.
c) 41.320 kg.

10.7 Una piedra cae desde 20 m de altura sobre el suelo. La altura al cabo de 1 segundo será

a) 10.5 metros.
b) 15.1 metros.
c) 17.2 metros.

10.8 Una piedra cae desde 20 m de altura sobre el suelo. El tiempo que tarda en llegar al suelo es

a) 2.02 segundos.
b) 2.8 segundos.
c) 3.22 segundos.

10.9 Una piedra cae desde 20 m de altura sobre el suelo. La velocidad con la que llega al suelo es

a) 92.56 km/h.
b) 86.45 km/h.
c) 71.28 km/h.

10.10 Una piedra, que cae al suelo desde una cierta altura, lo golpea a una velocidad de 36 m/s. La altura desde la que ha caído la piedra es de

a) 80 metros.
b) 66 metros.
c) 54 metros.

10.11 Al tratar de devolver una pelota, un tenista golpea la bola a 1 metro del suelo y le imprime una velocidad vertical hacia arriba de 150 km/h. Al cabo de 5 segundos la pelota estará a una altura de

a) 86.725 metros.
b) 67.75 metros.
c) 48.125 metros.

10.12 Al tratar de devolver una pelota, un tenista golpea la bola a 1 metro del suelo y le imprime una velocidad vertical hacia arriba de 150 km/h. Al cabo de 5 segundos la pelota está

a) subiendo.
b) bajando.
c) inmóvil.

10.13 Al tratar de devolver una pelota, un tenista golpea la bola a 1 metro del suelo y le imprime una velocidad vertical hacia arriba de 150 km/h. El tiempo que permanecerá subiendo la pelota es

a) 3.75 segundos.
b) 4.25 segundos.
c) 6.1 segundos.



10.14 Al tratar de devolver una pelota, un tenista golpea la bola a 1 metro del suelo y le imprime una velocidad vertical hacia arriba de 150 km/h. La altura máxima hasta la que sube la bola es

a) 68.4 metros.
b) 74.6 metros.
c) 89.5 metros.

10.15 Al tratar de devolver una pelota, un tenista golpea la bola a 1 metro del suelo y le imprime una velocidad vertical hacia arriba de 150 km/h. El tiempo que tarda la pelota en caer al suelo es

a) 7.8 segundos.
b) 8.52 segundos.
c) 9.16 segundos.

10.16 Al tratar de devolver una pelota, un tenista golpea la bola a 1 metro del suelo y le imprime una velocidad vertical hacia arriba de 150 km/h. La velocidad con la que la pelota bota en el suelo es

a) 150.88 km/h.
b) 152.24 km/h.
c) 156.8 km/h.

10.17 Un ascensor sube a 0.6 m/s y, cuando está a 15 metros del suelo, el cable se rompe. Un segundo después estará a una altura de

a) 15.525 metros.
b) 12.585 metros.
c) 10.695 metros.

10.18 Un ascensor sube a 0.6 m/s y, cuando está a 15 metros del suelo, el cable se rompe. Un segundo después estará

a) subiendo a 0.25 m/s.
b) bajando a 9.21 m/s.
c) bajando a 5.85 m/s.

10.19 Un ascensor sube a 0.6 m/s y, cuando está a 15 metros del suelo, el cable se rompe. Tarda en caer al suelo

a) 1.81 segundos.
b) 2.3 segundos.
c) 2.82 segundos.

10.20 Un ascensor sube a 0.6 m/s y, cuando está a 15 metros del suelo, el cable se rompe. Llega al suelo con una velocidad de

a) 81.18 km/h.
b) 72.24 km/h.
c) 61.78 km/h.

10.21 Un arquero dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. La velocidad total que el arco imprime a la flecha es

a) 273.72 km/h.
b) 315 km/h.
c) 225 km/h.

10.22 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. Al cabo de 2 segundos, la flecha se encuentra a una altura

a) 4.75 metros.
b) 5.38 metros.
c) 6.34 metros.

10.23 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. Al cabo de 2 segundos, la flecha se encuentra a una distancia horizontal del punto del disparo igual a

a) 150 metros.
b) 120 metros.
c) 90 metros.

10.24 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. Al cabo de 2 segundos, la flecha se encuentra a una distancia total del punto del disparo igual a

a) 155.38 metros.
b) 152.45 metros.
c) 150.1 metros.

10.25 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. En la dirección vertical, al cabo de 2 segundos la flecha

a) baja con velocidad 9.7 m/s.
b) baja con velocidad 7.12 m/s.
c) sube con velocidad 2.1 m/s.

10.26 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. La flecha cae al suelo al cabo de

a) 2.548 segundos.
b) 3.256 segundos.
c) 4.152 segundos.

10.27 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. La distancia a la que cae la flecha es

a) 88.7 metros.
b) 137.5 metros.
c) 191.1 metros.

10.28 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. La altura máxima alcanzada por la flecha es

a) 6.58 metros.
b) 7.96 metros.
c) 9.18 metros.

10.29 Un avión vuela horizontalmente a 700 metros de altura y a 700 km/h. Si las alas se desprenden, al cabo de 6 segundos, su altura será

a) 523.42 metros.
b) 412.68 metros.
c) 324.35 metros.

10.30 Un avión vuela horizontalmente a 700 metros de altura y a 700 km/h. Si las alas se desprenden, al cabo de 6 segundos, su velocidad vertical será de

a) 96.8 km/h.
b) 166.5 km/h.
c) 211.9 km/h.

10.31 Un avión vuela horizontalmente a 700 metros de altura y a 700 km/h. Si las alas se desprenden, caerá al suelo al cabo de

a) 11.946 segundos.
b) 12.712 segundos.
c) 14.482 segundos.

10.32 Un avión vuela horizontalmente a 700 metros de altura y a 700 km/h. Si las alas se desprenden, la distancia a la que caerá al suelo es

a) 2.323 kilómetros.
b) 1.856 kilómetros.
c) 1.482 kilómetros.

10.33 Un avión vuela horizontalmente a 700 metros de altura y a 700 km/h. Si las alas se desprenden, la velocidad vertical con la que llega al suelo es

a) 468.55 km/h.
b) 421.88 km/h.
c) 389.77 km/h.

10.34 Un avión vuela horizontalmente a 700 metros de altura y a 700 km/h. Si las alas se desprenden, la velocidad total con la que llega al suelo es

a) 769.4 km/h.
b) 817.3 km/h.
c) 856.7 km/h.

11 PRUEBAS DIAGNÓSTICAS

CONTEXTO

En la década los ochenta del siglo XX, motivados por el miedo que había provocado la extensión del SIDA (síndrome de inmunodeficiencia adquirida), algunos estados de Norteamérica (Illinois y Louisiana entre otros) impusieron la obligación de realizar un test de detección del síndrome para poder solicitar una licencia de matrimonio.

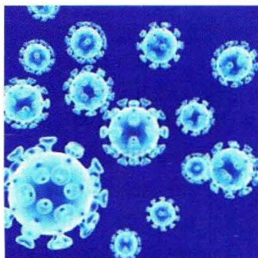


Figura 6.29: Imagen en el microscopio electrónico del virus VIH causante del SIDA.

El test de la sangre para la detección del virus del SIDA, aprobado en 1985 por el Departamento de salud, era denominado ELISA, producido por la casa Abbott. De acuerdo con los datos del trabajo de DIRK PETERSON[1], los resultados de 100 000 análisis de solicitantes de la licencia fueron los que aparecen en la tabla que se muestra a continuación.

	Estado del individuo		
	Infectado	No infectado	Total
Test positivo	28	220	248
Test negativo	2	99750	99752
Total	30	99970	100000

Tabla 6.11: Resultados de 100 000 análisis

ACTIVIDADES

11.1 Si elegimos una de las 100 000 personas analizadas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su análisis haya resultado positivo?

a) 0.00028.
b) 0.00248.
c) 0.00030.

11.2 Si elegimos al azar un análisis que haya resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona que se analizó no esté infectada?

a) 0.887.
b) 0.113.
c) 0.99970.

11.3 Elegimos al azar una de las personas no infectadas que hay entre las 100 000 analizadas; la probabilidad de que su test sea negativo es

a) 0.00030.
b) 0.99970.
c) 0.997799.

11.4 Se denomina *sensibilidad* del un test al porcentaje de individuo infectados que resultan positivos, la sensibilidad es una medida de la capacidad del test para detectar casos positivos entre los que deben ser positivos. A la vista de los resultados, la sensibilidad del test ELISA es igual a

a) 0.028 %.
b) 93.33 %.
c) $2/30 \cdot 100\,\%$.

11.5 Una buena cualidad de un test es su *capacidad para descubrir infectados*, se suele medir por el porcentaje de individuos infectados que hay entre los que resultan positivos. En el caso del test ELISA ese porcentaje es

[1] *For Better or for Worse? Mandatory AIDS Testing for Marriage License Applicants*, Journal of Urban and Contemporary Law, vol 38, 1990, 159–182.

a) 93.33 %.
b) 88.71 %.
c) 11.29 %.

11.6 Un posible error de cualquier test son los *falsos positivos*, es decir los casos en que el test resulta positivo pero el individuo no está infectado. Supongamos que elegimos un individuo al azar entre los 100 000 analizados, la probabilidad de que no esté infectado un individuo cuyo test ha resultado positivo es

a) 0.8871.
b) 0.1129.
c) 0.9333.

11.7 Otro error de cualquier test son los *falsos negativos*, es decir los casos en que el test resulta negativo pero el individuo está infectado. Supongamos que elegimos un individuo al azar entre los 100 000 analizados, la probabilidad de que un individuo cuyo test ha resultado negativo esté infectado es

a) 0.00002005.
b) 0.1129.
c) 0.9333.

11.8 Supongamos que elegimos un individuo al azar entre los 100 000 analizados, la probabilidad de que un individuo esté infectado y resulte positivo es

a) 0.9333.
b) 0.00028.
c) 0.1129.

11.9 La proposición: "si un test tiene una sensibilidad del 100 %, entonces un individuo que resulte positivo en el test, está infectado" es

a) verdadera.
b) falsa.
c) indecible.

11.10 La proposición: "si un test no tiene falsos negativos, entonces un individuo infectado siempre resulta positivo" es

a) verdadera.
b) falsa.
c) indecible.

12 CÓDIGOS

CONTEXTO

En español, la palabra código tiene dos significados bien distintos, casi opuestos.

Por una parte, se denominan *códigos* a los sistemas de cifrado de mensajes, es decir a los sistemas para transmitir un mensaje encriptado de suerte que sólo quién posea la *clave* del código pueda *descifrarlo* e interpretarlo. El objeto principal de estos códigos es lograr la confidencialidad del mensaje; es decir, que la información transmitida sólo pueda ser conocida por el emisor y la persona a quién va dirigido, permaneciendo oculto su significado a terceras personas que puedan interceptarlo. La ciencia que estudia la creación de esta clase de códigos se denomina Criptografía, palabra que proviene del griego κρύτττοζ (criptos), que significa oculto o secreto y γράφειν (grafein), que significa escritura. La Criptografía es la ciencia que estudia los sistemas que permiten mantener cierta información secreta, como nuestras contraseñas bancarias o nuestros mensajes personales a la vista de los espías, como posibles ladrones y estafadores o los funcionarios de la NSA norteamericana.

Por otra parte, también denominamos códigos a los sistemas que sirven garantizar que una información enviada llega a su receptor íntegra pese a los posibles errores en la transmisión que puedan ocurrir. Estos códigos permiten detectar si ha ocurrido algún error e incluso corregirlos cuando se trata de unos pocos errores. Estos códigos están presentes continuamente en nuestra vida y aquí veremos algunos ejemplos y las matemáticas que

subyacen tras ellos. La ciencia que estudia estos códigos se denomina Teoría de la codificación.

Para comprender mejor el objeto de la Teoría de la codificación conviene tener presente que toda transmisión de información está sujeta a errores, es lo que los ingenieros denominaron *ruido*, palabra que nos sugiere una conversación en un ambiente ruidoso donde es difícil entender las palabras de nuestro interlocutor. La analogía entre la transmisión de la información y una conversación en un medio ruidoso va más allá de una simple imagen y nos sugiere los métodos que la tecnología ha empleado para resolver o paliar la dificultad. Cuando mantenemos una conversación en un medio ruidoso, nuestro primer reflejo es hablar al oído de nuestro interlocutor y mucho más alto, aumentar el el volumen de nuestros sonidos y concentrarlos; así se hizo en los primeros años de las telecomunicaciones, el problema del ruido se solventaba aumentando la intensidad de la señal y empleando señales de pequeño espectro. Sin embargo, si el nivel de ruido es muy superior a la máxima intensidad de nuestra voz, o si por alguna razón no podemos gritar, probablemente nos haremos entender mediante con las manos, emplearemos un código de signos visuales, incluso repetiremos varias veces la misma información para estar seguros de que nuestro mensaje ha sido entendido. Esta fue la situación que se dio en telecomunicaciones durante la Segunda guerra mundial, cuando se trataba de ocultar las señales de comunicaciones y era preciso emplear señales de baja intensidad y amplio espectro que pasaran desapercibidas, o cuando los primeros satélites fueron lanzados al espacio, ya que un satélite no puede disponer de la cantidad de energía suficiente para enviar señales de alta intensidad. En estas condiciones, para lograr una comunicación fiable, es necesario codificar la información enviada de manera que podamos detectar e incluso corregir los posibles errores. Gracias a estos códigos, en nuestros días todas las transmisiones se realizan mediante señales de baja intensidad y, como sabemos bien por la telefonía móvil, son completamente efectivas.

La primera idea para lograr esa comunicación fiable es similar a nuestra reacción al conversar en un medio ruidoso: enviar repetido el mensaje varias veces; esta estrategia se denomina *añadir redundancia al mensaje*, esto es completar el mensaje con símbolos o caracteres que no aportan un significado adicional, sino que sirven de comprobación de la exactitud de los restantes. Pero enviar repetido el mensaje varias veces no es procedimiento económico, ya que significa duplicar, triplicar o cuadruplicar el número de bits enviados. La Teoría de la codificación ha logrado códigos mucho más eficientes donde con un pequeño porcentaje de símbolos redundantes se puede lograr una correcta transmisión.



Imagen del Mariner IV (1964) sin codificar

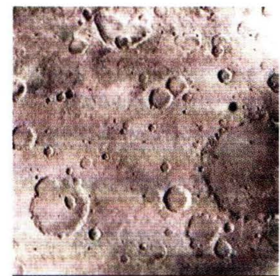


Imagen del Mariner VI (1969) con un código Reed-Muller

Figura 6.30: Imágenes de Marte de las sondas Mariner.

La figura 6.30 muestra dos imágenes de la Luna tomadas por las sondas Mariner IV y VI. La imagen de la izquierda corresponde a los datos enviado por el Mariner IV sin codificar, la imagen de la derecha es el resultado de detectar los errores y corregirlos mediante un código denominado de Reed-Muller.

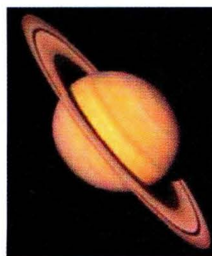




Figura 6.31: Imágenes en color del Voyager (1971) enviadas en código de Golay.

En la figura 6.31 podemos ver una imagen del planeta Saturno enviada por la nave Voyager, la información se codificó con un código que detecta y corrige errores denominado de Golay en honor a su creador Marcel J. E. Golay.

EL DÍGITO DEL CONTROL DEL DNI

En España, a cada Documento nacional de identidad se le asigna un número de 8 cifras. Desde 2007, además del número, tienen una letra final. Esa letra no se asigna de manera caprichosa, sino mediante una regla que veremos a continuación, letra que sirve para validar la coherencia de los restantes números. El objeto de añadir la letra de control no es impedir el fraude, ya que conociendo la regla de asignación se puede hallar otros números válidos, sino evitar los errores mecanográficos inconscientes que ocurren al incorporar un número de DNI a un sistema computerizado. Cualquier base de datos bien diseñada que tenga el número de DNI como uno de los campos de identificación, valida automáticamente el número introducido para detectar si el operador se ha equivocado al pulsar alguna tecla.

El procedimiento de asignación de la letra está basado en los restos de la división del número del documento entre 23. Sabemos que, al dividir cualquier entero entre 23, el resto de la división es un número entero que varía entre 0 y 22, ambos inclusive. La letra final se asocia de acuerdo con la correspondencia definida en la tabla 6.12.

Resto	0	1	2	3	4	5	6	7
Letra	T	R	W	A	G	M	Y	F
Resto	8	9	10	11	12	13	14	15
Letra	P	D	X	B	N	J	Z	S
Resto	16	17	18	19	20	21	22	
Letra	Q	V	H	L	C	K	E	

Tabla 6.12: Asignación de letras en el DNI.

Las letras I, Ñ, O y U no se utilizan. Las letras O e I se han descartado para evitar confusiones con los caracteres numéricos 0 y 1, y la letra Ñ para evitar confusiones con la N.

CÓDIGOS DE CUENTAS DE CLIENTES

En la mayor parte de los países, los números que las entidades financieras emplean para identificar las cuentas de sus clientes están estandarizados. En España, constan de veinte dígitos divididos en cuatro bloques con la estructura siguiente

$$EEEE \quad OOOO \quad DD \quad NNNNNNNNNN$$

El primer bloque $EEEE$ son el código de la entidad, cuatro dígitos que coinciden con el número de registro que la entidad tiene en el Banco de España. El segundo bloque $OOOO$ son cuatro dígitos que identifican la oficina de la entidad. Él tercer bloque DD son dos dígitos de control, que sirven para validar la corrección de los restantes. Los últimos diez dígitos $NNNNNNNNNN$ son el número de la cuenta propiamente dicho.

El primer dígito de control valida la información de los primeros ocho dígitos, esto es la información relativa a la entidad y a la oficina. Para calcularlo, supongamos que

$$x_1x_2x_3x_4\ x_5x_6x_7x_8$$

son los ocho primeros dígitos del código de la cuenta. Primero hallaremos el número

$$\begin{aligned} M \quad = \quad & 2^2 \cdot x_1 + 2^3 \cdot x_2 + 2^4 \cdot x_3 + 2^5 \cdot x_4 \\ & + 2^6 \cdot x_5 + 2^7 \cdot x_6 + 2^8 \cdot x_7 + 2^9 \cdot x_8 \end{aligned}$$

A continuación, se calcula el resto, r, de la división de M entre 11. Si $r = 0$, el primer dígito de control es igual a 0; si $r = 1$, el primer dígito de control es igual a 1; en otro caso, si $r \neq 0$ y $r \neq 1$, el primer dígito de control es igual a la diferencia entre $11 - r$. Por ejemplo, si $M = 6320$, entonces el resto de la división por 11 es $r = 6$, ya que $6320 = 574 \cdot 11 + 6$, y el primer dígito de control es igual a $11 - r = 11 - 6 = 5$.

El segundo dígito valida la información de los últimos diez dígitos correspondientes al número de cuenta. Para calcularlo, supongamos que

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}$$

son los últimos diez dígitos de código de la cuenta. Primero hallaremos el número

$$\begin{aligned} N \quad = \quad & 2^0 \cdot x_1 + 2^1 \cdot x_2 + 2^2 \cdot x_3 + 2^3 \cdot x_4 + 2^4 \cdot x_5 \\ & + 2^5 \cdot x_6 + 2^6 \cdot x_7 + 2^7 \cdot x_8 + 2^8 \cdot x_9 + 2^9 \cdot x_{10} \end{aligned}$$

A continuación, se calcula el resto, s, de la división de N entre 11. Si $s = 0$, el primer dígito de control es igual a 0; si $s = 1$, el primer dígito de control es igual a 1;

en otro caso, si $s \neq 0$ y $s \neq 1$, el primer dígito de control es igual a la diferencia entre $11 - s$. Por ejemplo, si $N = 5512$, entonces el resto de la división por 11 es $s = 1$, ya que $5512 = 501 \cdot 11 + 1$, y el primer dígito de control es igual a 1.

ACTIVIDADES

12.1 La aplicación definida por la tabla 6.12 entre el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 22\}$ y el conjunto A de todas las letras del alfabeto que asocia una letra a cada resto de la división entera por 23 es

a) biyectiva.
b) inyectiva.
c) sobreyectiva.

12.2 Sea A es el conjunto de letras del alfabeto y R el conjunto de los restos de la división entera por 23. Consideremos la correspondencia $f\colon A \mapsto R$ que asocia a cada letra un resto de acuerdo con la tabla 6.12 de asignación de letras del DNI. La correspondencia f

a) es una aplicación inyectiva.
b) es una aplicación sobreyectiva.
c) no es aplicación.

12.3 ¿Qué letra corresponde a un DNI cuyo número sea 02693750?

a) F.
b) V.
c) J.

12.4 El DNI con número 95362431 tiene asignada la letra S, ¿qué letra tendrá asignada el DNI con número 95362432?

a) Q.
b) W.
c) D.

12.5 ¿La secuencia 95362441W es un código de DNI válido?

a) sí.
b) no.
c) depende del portador del documento.

12.6 Una cuenta corriente está abierta en la oficina 0001 de una entidad cuyo número de registro es 5432, su primer dígito de control debe ser igual a

a) 5.
b) 6.
c) 1.

12.7 La proposición *"el número*

5432 1001 81 4202597001

es un código válido de cuenta" es

a) verdadera.
b) falsa.
c) indecible.



RESPUESTAS DE LAS ACTIVIDADES

1 NÓMINAS

1.1 *Respuesta correcta: c*

Puesto que C es un subconjunto de D, la relación que une el conjunto C con el conjunto de todos los descuentos D es la relación de inclusión $\subset$. No se trata de un elemento de D como indica la alternativa b), ni tiene sentido utilizar el signo "$\leq$" que se establece entre números.

1.2 *Respuesta correcta: b*

Claramente la intersección de los dos conjuntos es el conjunto vacío. P no está contenido en S. Tampoco su unión es el conjunto universal.

1.3 *Respuesta correcta: b*

La intersección de F y P es un conjunto. Su único elemento es g. Por tanto la representación por enumeración de este conjunto es $\{g\}$.

1.4 *Respuesta correcta: b*

El cardinal de un conjunto es el número de elementos que lo forman. Tanto el conjunto R como el conjunto D tienen 4 elementos. Por tanto el cardinal de ambos conjuntos es el mismo.

1.5 *Respuesta correcta: c*

Puesto que R y D tienen el mismo número de elementos podemos asegurar que entre ellos es posible establecer alguna aplicación que sea biyectiva. Por ejemplo, la aplicación $h : R \mapsto D$ representada en la figura 6.32 es biyectiva.

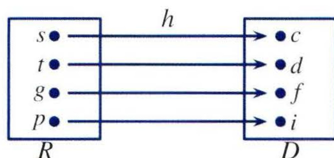


Figura 6.32: Representación de la aplicación $h : R \mapsto D$ biyectiva.

Ahora bien, dicha aplicación no es la única aplicación biyectiva que se puede establecer entre R y D. Por ejemplo, la aplicación $k : R \mapsto D$ representada en la figura 6.33 también es biyectiva y es distinta de h.

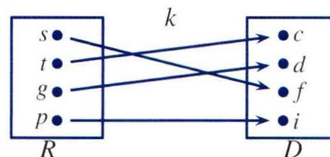


Figura 6.33: Representación de la aplicación $k : R \mapsto D, k \neq h$ y k biyectiva.

1.6 *Respuesta correcta: a*

Según de deduce de la figura tenemos:

$$(k \circ h)(s) = k(h(s)) = k(f) = s.$$

$$(k \circ h)(t) = k(h(t)) = k(d) = p.$$

$$(k \circ h)(g) = k(h(g)) = k(c) = p.$$

$$(k \circ h)(p) = k(h(p)) = k(f) = s.$$

1.7 *Respuesta correcta: b*

Llamemos T al total bruto de ingresos que debe figurar en la nómina. Puesto que el IRPF se calcula sobre esta cantidad, y el porcentaje de este impuesto es el 14%, tenemos que $207.93 = \frac{14}{100}T$, es decir, $T = \frac{207.93 \cdot 100}{14} =$ 1,485.21 euros.

1.8 *Respuesta correcta: a*

Sea T el sueldo bruto de una nómina ordinaria como la de la tabla 6.1. Puesto que el IRPF que figura en la tabla es el 14% de esta cantidad, se tiene $T = \frac{207.93 \cdot 100}{14} = 1{,}485.21$ euros. Según indica el enunciado, la paga extra no incluye el concepto *complemento personal* que, como vemos en la tabla 6.1, es igual a 14.08. Por tanto el sueldo bruto de una paga extra es $T - 14.08 = 1{,}485.21 - 14.08 = 1{,}471.13$ euros.

1.9 *Respuesta correcta: a*

Sea T el sueldo bruto de una nómina ordinaria como la de la tabla 6.1. Entonces $T = \frac{207.93 \cdot 100}{14} = 1{,}485.21$ euros. Una paga extra supone $T - 14.08 = 1{,}471.13$ euros. Puesto que percibe 12 pagas ordinarias y 2 pagas extras, el sueldo anual bruto asciende a

$$12 \cdot 1{,}485.21 + 2 \cdot 1{,}471.13 = 20{,}764.78 \text{ euros}$$

1.10 *Respuesta correcta: a*

Sea T el sueldo bruto de una nómina ordinaria como la de la tabla 6.1. Entonces $T = \frac{207.93 \cdot 100}{14} = 1{,}485.21$ euros. Una paga extra supone $T - 14.08 = 1{,}471.13$ euros. Las 12 pagas ordinarias y las 2 extras suponen 20,764.78 euros. La base de cotización para calcular las cuotas de la Seguridad Social es la duodécima parte de esta cantidad, es decir, $\frac{20{,}764.78}{12} = 1{,}730.40$.

1.11 *Respuesta correcta: a*

La base de cotización para calcular las cuotas de la Seguridad Social es 1,730.40. Por tanto la cuota por contingencias comunes es $1{,}730.40 \cdot \frac{4.70}{100} = 81.33$ euros.

1.12 *Respuesta correcta: b*

La base de cotización para calcular las cuotas de la Seguridad Social es 1,730.40. Por tanto la cuota por desempleo es $1{,}730.40 \cdot \frac{1.60}{100} = 27.69$ euros.

1.13 *Respuesta correcta: a*

La base de cotización para calcular las cuotas de la Seguridad Social es 1,730.40. Por tanto la cuota por formación es $1{,}730.40 \cdot \frac{0.1}{100} = 1.73$ euros.

1.14 *Respuesta correcta: b*

La base de cotización para calcular las cuotas de la Seguridad Social es 1,730.40. Por tanto las cuotas son: *contingencias comunes*, 81.33; *desempleo*, 27.69; *formación profesional*, 1.73. Entonces las cotizaciones a la Seguridad Social suman un total de 110.75, lo cual, junto con el porcentaje correspondiente al IRPF hacen un total de 318.68 euros.

1.15 *Respuesta correcta: b*

La base de cotización para calcular las cuotas de la Seguridad Social es 1,730.40. Por tanto las cuotas son: *contingencias comunes*, 81.33; *Desempleo*, 27.69; *formación profesional*, 1.73. Entonces las cotizaciones a la Seguridad Social suman un total de 110.75, lo cual, junto con el porcentaje correspondiente al IRPF hacen un total de 318.68 euros. Por otra parte, el total de ingresos es 1,485.21. Por tanto, el importe líquido total a percibir es

$$1{,}485.21 - 318.68 = 1{,}166.53 \text{ euros}$$

1.16 *Respuesta correcta: c*

El importe correspondiente al total T de ingresos se calcula a partir del importe del IRPF, de la forma $T = \frac{207.93 \cdot 100}{14} = 1{,}485.21$ euros. Si tenemos en cuenta el dato que figura en la tabla respecto del complemento personal, 14.08 euros, y añadimos el nuevo dato conocido correspondiente al complemento general, 546.12 euros, podemos escribir

$$\text{Sueldo } + \text{Trienios } + 546.12 + 14.08 = 1{,}485.21$$

De esta igualdad podemos deducir que

$$\begin{aligned} \text{Sueldo } + \text{Trienios } &= 1{,}485.21 - 546.12 - 14.08 \\ &= 925.01 \end{aligned}$$

pero no podemos saber a cuánto asciende el sueldo solamente.

1.17 *Respuesta correcta: a*

Sabemos que el importe que figura en el total de ingresos es $T = \frac{207.93 \cdot 100}{14} = 1{,}485.21$ euros. Si tenemos en cuenta el complemento personal, 14.08 euros, y añadimos el nuevo dato conocido correspondiente al complemento general, 546.12 euros, tenemos

$$\text{Sueldo } + \text{Trienios } + 546.12 + 14.08 = 1{,}485.21$$

Ahora sabemos que el trabajador ha cumplido un trienio y que este hecho le supone un incremento del sueldo base en un 5 %, es decir

$$\begin{aligned} \text{Sueldo} + \text{Trienios} &= \text{Sueldo} + 0.05 \cdot \text{Sueldo} \\ &= 1.05 \cdot \text{Sueldo} \end{aligned}$$

Entonces

$$1.05 \cdot \text{Sueldo } + 546.12 + 14.08 = 1{,}485.21$$

Al despejar

$$\text{Sueldo} = \frac{1}{1.05}\,(1{,}485.21 - 546.12 - 14.08) = 880.96$$

De paso, podemos calcular también que

$$\text{Trienios} = 0.05 \cdot \text{Sueldo} = 0.05 \cdot 880.96 = 44.05$$

1.18 *Respuesta correcta: a*

El sueldo bruto sin complemento personal es $T = \frac{207.93}{0.14} - 14.08 = 1{,}471.13$. Por tanto el importe de una hora extraordinaria es igual a $1{,}471.13 \cdot 0.005 = 7.36$. Así pues, si realiza 2 horas extraordinarias cobra $2 \cdot 7.36 = 14.71$ euros, con lo cual ya compensa el importe del complemento personal.

1.19 *Respuesta correcta: b*

El descuento de IRPF es el 14 %. Puesto que $0.14 = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$, podemos afirmar que a) es correcta. Los descuentos en las cotizaciones a la Seguridad Social suman en conjunto $4.70 + 1.60 + 0.10 = 6.40\,\%$. Esto quiere decir que los descuentos en cotizaciones a la SS suponen 6.40 euros de cada 100, por lo cual deducimos que b) es incorrecta. Finalmente, comprobamos que c) es correcta. El porcentaje total de descuentos es $14.00 + 4.70 + 1.60 + 0.10 = 20.40 > 20$. Esto significa que de cada 100 euros, se descuentan más de 20, o lo que es lo mismo, de cada 10 euros se descuentan más de 2.

1.20 *Respuesta correcta: b*

Sea S la cantidad correspondiente al sueldo base actual. Según el enunciado, la cantidad actual correspondiente a la antigüedad es $T = 0.05\ S$. El salario actual correspondiente a estos dos conceptos es $S + T = S + 0.05S = 1.05S$. El nuevo sueldo base será $S' = (S + 0.02\ S) = 1.02\ S$. Por otra parte, el nuevo incremento debido a la antigüedad será $T' = 2 \cdot 0.05\ S' = 2 \cdot 0.05 \cdot 1.02\ S = 0.102\ S$. El nuevo salario será $S' + T' = 1.02\ S + 0.102\ S = 1.122\ S$. Entonces el porcentaje de incremento es $\frac{1.122\ S - 1.05\ S}{1.05\ S} \cdot 100 = 6.86\,\%$.

1.21 *Respuesta correcta: c*

Según el enunciado la base mensual de cotización a la SS mínima es 753 y la máxima 3597, es decir,

$$753 \leq x \leq 3597.$$

De ello, deducimos que $x \in [753, 3597]$. Este intervalo es igual a la intersección de los intervalos $[753, \infty)$ y $(-\infty, 3579]$, es decir,

$$[753, 3597] = [753, \infty) \cap (-\infty, 3579]$$

Ahora bien, $[753, \infty) = I_1^c$ y $(-\infty, 3579] = I_2^c$.

2 EL RECIBO DEL AGUA

2.1 *Respuesta correcta: a*

$E - S = \{a_1, d_1, d_2\} - \{a_2, d_2\} = \{a_1, d_1\} = A$.

2.2 *Respuesta correcta: c*

$E \cap S = \{d_2\}$, por lo que $(E \cap S)^c = \{a_1, d_1, a_2\}$. Por otra parte $A \cup Y = \{a_1, d_1, a_2\}$.

2.3 *Respuesta correcta: b*

Tenemos: $A \cap S = \emptyset$ y $E \cap Y = \emptyset$. Por tanto,

$$(A \cap S) \cup (E \cap Y) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

La alternativa c) no es correcta porque $(A \cap S)^c = C$ y $(E \cap Y)^c = C$, por lo cual $(A \cap S)^c \cap (E \cap Y)^c = C$.

2.4 *Respuesta correcta: b*

La imagen del subconjunto $A \subset C$ es el subconjunto de P formado por los elementos que son imagen de algún elemento de A. En este caso, $f(a_1) = s$ y $f(d_1) = s$. Por tanto $f(A) = \{s\}$. Observemos que la alternativa a) no es correcta, porque s es un elemento de P, mientras que $f(A)$ es un subconjunto, es decir, no es lo mismo el elemento $s \in P$ que el subconjunto de P cuyo único elemento es s, $\{s\} \subset P$.

2.5 *Respuesta correcta: c*

La imagen inversa del subconjunto $\{u\} \subset P$ es el subconjunto de C formado por los elementos que cuya imagen pertenece a $\{u\}$. El único elemento de C cuya imagen es $u \in \{u\} \subset P$ es a_2. Por tanto $f^{-1}(\{u\}) = \{a_2\}$. Observemos que la alternativa b) no es correcta porque $f^{-1}(\{u\})$ es un conjunto y no un elemento.

2.6 *Respuesta correcta: b*

f es una aplicación sobreyectiva porque todos los elementos de P son imagen de alguno de C. No es inyectiva porque que hay elementos de C que tienen la misma imagen. Por tanto, no es tampoco biyectiva.

2.7 *Respuesta correcta: b*

Llamemos C_1 al conjunto de personas que entrevista el primer encuestador y C_2 al conjunto de entrevistados por el segundo encuestador. Entonces $\#(C_1) = 284$ y $\#(C_1) = 223$. El conjunto de personas entrevistadas por alguno de los encuestadores es $C_1 \cup C_2$, mientras que el conjunto de personas que fueron entrevistadas por ambos encuestadores es $C_1 \cap C_2$. Entonces

$$\begin{aligned} \#(C_1 \cap C_2) &= \#(C_1) + \#(C_2) - \#(C_1 \cup C_2) \\ &= 284 + 223 - 458 = 49 \end{aligned}$$

2.8 *Respuesta correcta: c*

El importe del servicio de distribución es 6.48 y el IVA correspondiente es 0.65. Por tanto, el porcentaje a que corresponde el IVA es $\frac{0.65}{6.48}\,100 = 10.0\,\%$. El IVA del alcantarillado es 0.00, por lo cual es evidente que el porcentaje correspondiente también es $0.0\,\%$. Finalmente, el importe total de la factura es 39.62, del cual 36.47 corresponde a los servicios y 3.15 al IVA. Entonces el porcentaje a que corresponde el IVA es $\frac{3.15}{36.47}\,100 = 8.6\,\%$.

2.9 *Respuesta correcta: b*

Según los datos de la tabla 6.2 el porcentaje de variación correspondiente al tramo de consumo $[25, 50)$ es

$$\frac{0.6869 - 0.5496}{0.5646} \times 100\,\% = 25.0\,\% \approx 25.00\,\%$$

2.10 *Respuesta correcta: c*

El porcentaje de variación correspondiente al intervalo $[50, \infty)$ es

$$\frac{1.9766 - 1.3176}{1.3176} \times 100\,\% = 50.0\,\% \approx 50.00\,\%$$

2.11 *Respuesta correcta: a*

Según los datos facilitados, el diámetro del contador es $D = 13$, el número de viviendas es $N = 1$, pues se trata de una vivienda unifamiliar, y el número de días transcurridos es $DP = 61$ (21 correspondientes al mes de octubre, 30 al mes de noviembre y 10 al mes de diciembre). Entonces al aplicar la fórmula de la cuota de servicio de aducción resulta:

$$\begin{aligned} \text{Cuota} &= 0.0178(D \times D + 225N) \times (DP/60) \\ &= 0.0718 \times (13 \times 13 + 225 \times 1) \times (61/60) \\ &= 7.13 \end{aligned}$$

Puesto que el servicio de aducción está sujeto a un IVA del $10\,\%$, el importe que debe figurar en la factura es igual a

$$\text{Cuota Aducción} = 7.13 + 0.71 = 7.84$$

2.12 *Respuesta correcta: b*

Según los datos facilitados, el diámetro del contador es $D = 13$, el número de viviendas es $N = 1$, pues se trata de una vivienda unifamiliar, y el número de días transcurridos es $DP = 61$ (21 correspondientes al mes de octubre, 30 al mes de noviembre y 10 al mes de diciembre). Entonces al aplicar la fórmula de la cuota de servicio de distribución resulta:

$$\begin{aligned} \text{Cuota} &= 0.0081(D \times D + 225N) \times (DP/60) \\ &= 0.0081 \times (13 \times 13 + 225 \times 1) \times (61/60) \\ &= 3.24 \end{aligned}$$

Puesto que el servicio de distribución está sujeto a un IVA del $10\,\%$, el importe que debe figurar en la factura es igual a

$$\text{Cuota Distribución} = 3.24 + 0.32 = 3.56$$

2.13 *Respuesta correcta: c*

Según los datos facilitados, el número de viviendas es $N = 1$, pues se trata de una vivienda unifamiliar, y el número de días transcurridos es $DP = 61$ (21 correspondientes al mes de octubre, 30 al mes de noviembre y

10 al mes de diciembre). Entonces al aplicar la fórmula de la cuota de servicio de depuración resulta:

$$\begin{aligned} \text{Cuota} &= (3.1433 \times N) \times (DP/60) \\ &= (3.1433 \times 1) \times (61/60) \\ &= 3.20 \end{aligned}$$

Puesto que el servicio de depuración está sujeto a un IVA del 10 %, el importe que debe figurar en la factura es igual a

$$\text{Cuota Depuración} = 3.20 + 0.32 = 3.52$$

2.14 *Respuesta correcta: b*

Según los datos facilitados, el consumo del período es igual a 33 m^3. Entonces al aplicar la fórmula de la cuota de alcantarillado resulta:

$$\text{Cuota} = 0.2240 \times 33 = 7.39$$

Puesto que el servicio de alcantarillado no está sujeto a un IVA, en la factura debe figurar el importe anterior.

2.15 *Respuesta correcta: c*

El consumo ha sido de 33 m^3. Puesto que estamos en temporada de invierno, los primeros 25 m^3 se han de facturar a razón de 0.2971 euros por m^3. Los $33 - 25 = 8$ restantes pertenecen al segundo tramo por lo que se facturan a razón de 0.5496 euros por m^3. En total, resulta

$$25 \times 0.2971 \ + \ 8 \times 0.5496 = 11.82$$

Al importe anterior hay que sumarle el 10 % de IVA correspondiente Por tanto, el importe total con impuestos es $11.82 + 1.18 = 13.00$.

2.16 *Respuesta correcta: a*

El consumo ha sido de 53 m^3. Los primeros 25 m^3 se facturan a razón de 0.1337 euros por m^3. Los 25 siguientes, hasta llegar a 50, pertenecen al segundo tramos, por lo cual se facturan a razón de 0.2107 euros por m^3. Los 3 restantes, que pertenecen al último tramo, se facturan a razón de 0.5021 euros por m^3. En total,

$$25 \times 0.1337 \ + \ 25 \times 0.2107 + 3 \times 0.5021 = 10.12$$

Al importe anterior hay que sumarle el 10 % de IVA correspondiente Por tanto, el importe total con impuestos es $10.12 + 1.01 = 11.13$.

2.17 *Respuesta correcta: a*

La función es creciente en todo el intervalo $[0, \infty)$. Observemos que cualesquiera que sean los valores x, $y \in [0, \infty)$ tales que $x < y$ entonces siempre se cumple que $f(x) \leq f(y)$.

2.18 *Respuesta correcta: a*

La función que da el coeficiente para calcular el coste variable del servicio de distribucion está definida para valores no negativos de la abscisa, que se expresa en m^3. Según el enunciado en el intervalo $[0, 25)$ el coeficiente es constante y vale 0.1337. La representación gráfica de esta función constante es una recta paralela al eje de abscisas. En el intervalo $[25, 50)$ el coeficiente cambia al valor 0.2107, comenzando este valor en el extremo inferior del intervalo. Por tanto, la gráfica presenta un salto y se mantiene constante hasta llegar al valor 50. En este punto, la gráfica presenta un nuevo salto, tomando en el intervalo $[50, \infty]$ el valor constante 0.5021.

2.19 *Respuesta correcta: b*

Como se aprecia en la figura 6.4, la función f es discontinua en los puntos $x = 25$ y $x = 50$. Por tanto, a) no es cierta ya que $25, 50 \in [0, \infty)$. Asimismo, c) tampoco es cierta porque $25 \in [0, 50)$. En cambio, f es continua en todos los puntos del intervalo $[0, 25)$, puesto que $25 \notin [0, 25)$. Observemos que la función es constante en todo el intervalo $[0, 25)$, puesto que $f(x) = 0.3121$ para $x \in [0, 25)$.

2.20 *Respuesta correcta: b*

La gráfica de la figura consta de tres tramos: de 0 a 25, de 25 a 50 y de 50 en adelante. Por tanto, no puede corresponder al servicio de alcantarillado, pues este servicio solo tiene un tramo de facturación. Para resolver la duda sobre si se trata del servicio de aducción o el servicio de distribución, nos fijamos en los puntos de abscisa 25 ó 50. Para la distribución sería $f(25) \approx 25 \times 0.1337 = 3.3425$. Para la aducción en temporada de invierno sería $f(25) \approx 25 \times 0.2971 = 7.4275$. Se aprecia en la figura que $f(25)$ es aproximadamente 3.3425. Más claro se ve en el punto $x = 50$. Para la distribución, sería $f(50) \approx 50 \times 0.1337 = 6.6850$ mientras que para la aducción el valor sería $f(50) \approx 50 \times 1.3176 = 65.8800$ que claramente estaría fuera de la figura representada.

3 CENTROS COMERCIALES

3.1 *Respuesta correcta: b*

La única oración que enuncia algo que pueda valorarse como verdadero o falso es *te esperamos*. La oración *sumérgete en el verano* expresa una orden, mientras que la oración *que no te lo cuenten* expresa un deseo.

3.2 *Respuesta correcta: c*

La oración *¿por qué no te quedas a comer?* es una interrogación sobre la cual no puede decidirse si es cierta o falsa, por lo que no es una proposición lógica. Las oraciones de las otras alternativas, enuncian algo sobre lo que se puede estar o no de acuerdo, es decir, se puede decidir acerca de su verdad o falsedad. Por tanto, son proposiciones lógicas.

3.3 *Respuesta correcta: b*

La oración *"abrir una lata no es cocinar"* enuncia algo sobre lo que se puede opinar si es cierto o falso. Por tanto es una proposición lógica. La oración se entiende como *si se abre una lata entonces no se cocina*, es decir, es una proposición lógica compuesta.

3.4 *Respuesta correcta: b*

Llamemos $p =$ *"es verano*, $q =$ *"los precios están rebajados* y $r =$ *"hace calor"*. Entonces el razonamiento se puede simbolizar de la forma siguiente:

	$p \to q$	*"cuando es verano los precios están rebajados".*
	$r \to p$	*"si hace calor es verano".*
	$\neg r$	*"no hace calor".*
$\therefore$	$\neg q$	*"los precios no están rebajados".*

La tabla de verdad del razonamiento es la siguiente:

			Premisas			*Conclusión*
p	q	r	$p \to q$	$r \to p$	$\neg r$	$\neg q$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V	F
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

En el segundo y sexto caso las premisas son ciertas y la conclusión falsa; entonces el razonamiento es una falacia.

3.5 *Respuesta correcta: a*

La intersección de los conjuntos E y L no es el conjunto vacío porque $E \cap L = \{\text{Corte Inglés Ocio}, \text{FNAC}, \text{MediaMarkt}\}$.

3.6 *Respuesta correcta: a*

En general, el cardinal de la unión de conjuntos es igual a la suma de los cardinales de cada uno de ellos menos el cardinal de la intersección. Tenemos $\#(E) = 5$, $\#(L) = 5$, $\#(T) = 9$. Por otra parte, puesto que $E \cap L = \{\text{Corte Inglés Ocio}, \text{FNAC}, \text{MediaMarkt}\}$, $E \cap T = \emptyset$ y $L \cap T = \emptyset$, tenemos $\#(E \cap L) = 3$, $\#(E \cap T) = 0$, $\#(L \cap T) = 0$. Por tanto

$$\begin{aligned} \#(E \cup L) &= \#(E) + \#(L) - \#(E \cap L) = 5 + 5 - 3 = 7 \\ \#(E \cup T) &= \#(E) + \#(T) - \#(E \cap T) = 4 + 9 - 0 = 13 \\ \#(L \cup T) &= \#(L) + \#(T) - \#(L \cap T) = 5 + 9 - 0 = 14 \end{aligned}$$

3.7 *Respuesta correcta: b*

El precio sin IVA de la impresora es $\frac{199.95}{1.21} = 165.25$, y el IVA es el 21 % de esta cantidad, es decir 34.70.

3.8 *Respuesta correcta: c*

El porcentaje de variación es $\frac{49.95-89.95}{89.95}\,100 = -44.47\,\%$.

3.9 *Respuesta correcta: c*

Se obtuvo un descuento sobre el importe total de las dos compras que ascendió a 237.75. Entonces el porcentaje de descuento fue $\frac{10}{237.75} \cdot 100 = 4.21\,\%$.

3.10 *Respuesta correcta: a*

La fracción de mujeres que visita el centro es $\frac{3}{5}$. Puesto que dos de cada tres mujeres son visitantes asiduas, podemos deducir que la fracción de todos los visitantes que son mujeres y son asiduas es $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$. En cuanto a los hombres, sabemos que representan una fracción igual a $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ de todos los visitantes. También sabemos que del colectivo de hombres son visitantes asiduos una fracción igual a $1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}$. Así pues, la contribución de los hombres a los visitantes asiduos representa una fracción igual a $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{11} = \frac{8}{55}$ de todos los visitantes. Entonces, la fracción total de asiduos, tanto mujeres como hombres, es $\frac{2}{5} + \frac{8}{55} = \frac{30}{55} = 0.55$. Entonces podemos afirmar solamente que un poco más de la mitad de los visitantes son asiduos.

3.11 *Respuesta correcta: b*

Llamemos n al número de personas que formaban el grupo inicial. En principio, tocaban a $\frac{3/4}{n}$ litros de vino cada uno. Si se añaden dos personas al grupo, entonces le corresponde a cada uno $\frac{3/4}{n+2}$. Según afirma el enunciado, ésta última cantidad es igual a las tres cuartas partes de la primera, es decir, $\frac{3}{4}\,\frac{3/4}{n} = \frac{3/4}{n+2}$. Al simplificar la expresión anterior resulta la ecuación $\frac{3}{4n} = \frac{1}{n+2}$. Puesto que $n \neq 0$, la ecuación anterior es equivalente a $3(n+2) = 4n$ y, al resolver, llegamos a que $n = 6$.

3.12 *Respuesta correcta: c*

Llamemos x al precio ordinario de paquete de azúcar, y al precio ordinario del paquete de café y z al precio ordinario del paquete de galletas. Entonces, de la compra de la primera semana se sigue que $x + y + z = 5.80$. En la segunda semana se compran 3 paquetes de café, pero sólo se pagan 2, por lo cual la cuenta es $x + 2y + z = 8.75$. En la tercera semana, el beneficio le alcanza a las galletas, por lo que el ticket de esta semana es $x + y + 2z = 7.75$. Este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se resuelve de manera muy sencilla. La segunda ecuación se puede poner de la forma siguiente $x + y + z + y = 8.75$. Puesto que sabemos que $x + y + z = 5.80$, resulta $5.80 + y = 8.75$, de donde $y = 8.75 - 5.80 = 2.95$, es decir, el precio del paquete del café es 2.95 euros. De manera similar, la tercera ecuación se puede poner de la forma siguiente: $x + y + z + z = 7.75$. Al sustituir el valor de la compra de la primera semana, resulta $5.80 + z = 7.75$, por lo cual $z = 7.75 - 5.80 = 1.95$ es el precio del paquete de galletas. Si sustituimos los precios que hemos encontrado en la ecuación de la primera semana, tenemos: $x + 2.95 + 1.95 = 5.80$, por lo que $x = 5.80 - 2.95 - 1.95 = 0.90$, es decir, el precio del paquete de azúcar es 0.90 euros. Así pues, la alternativa a) es cierta, ya que el precio del café es 2.95 y es el mayor de los tres. La alternativa b) también es cierta, ya que el precio del café es mayor que la suma de los otros dos juntos. La única alternativa que no es correcta es la c) porque el precio del paquete de galletas es 1.95 euros.

3.13 *Respuesta correcta: a*

Llamemos d a la cantidad de dinero que retiraron del cajero y z al precio de los zapatos. Según los datos, los sucesivos gastos son: z euros, los zapatos; $\frac{z}{3}$ euros, el jersey; $\frac{z}{2}$ euros, los vaqueros; $\frac{z}{3}$ euros, la camisa; $\frac{z}{2}$ la cena y $\frac{z}{4}$ euros, el cine. Así pues, el gasto total supuso

$$z + \frac{z}{3} + \frac{z}{2} + \frac{z}{3} + \frac{z}{2} + \frac{z}{4} = \frac{35}{12}z \text{ euros}$$

Si restamos esta cantidad del dinero retirado del cajero, resultan los 25 euros sobrantes, $d - \frac{35}{12}z = 25$. Por otra parte, una camisa y un jersey adicionales hubiesen costado $\frac{z}{3} + \frac{z}{3} = \frac{2z}{3}$. Esta cantidad ha de ser igual al importe del cine más el dinero sobrante, es decir, $\frac{2z}{3} = \frac{z}{4} + 25$. Si resolvemos esta ecuación resulta $\frac{2z}{3} - \frac{z}{4} = \frac{5z}{12} = 25$, es decir, $z = 60$ que es el precio de los zapatos. Si utilizamos la ecuación que da el gasto total encontramos la solución de la pregunta planteada $d = 25 + \frac{35}{12}z = 25 + \frac{35}{12}\,60 = 200$.

3.14 *Respuesta correcta: b*

Como se aprecia en la figura, el parking tiene forma rectangular salvo una esquina en forma de triángulo. Las medidas del rectángulo son 60 metros de largo y 30 de ancho, por lo que su área es 1800 metros cuadrados. Por su parte, la base del triángulo mide 20 metros

y su altura 10. Por tanto su área es igual a $\frac{20\cdot 10}{2} = 100$ metros cuadrados. Así pues, la superficie del parking es $1800 - 100 = 1700$ metros cuadrados. El presupuesto asciende, por tanto, a $1700 \cdot 5 = 8{,}500$ euros.

3.15 *Respuesta correcta: c*

Podemos entender que la distancia recorrida por el cliente es aproximadamente la distancia desde el punto (12.5,12.5) al punto (60,15). Esta distancia es $\sqrt{(60-12.5)^2+(15-12.5)^2} = 47.57$ metros.

3.16 *Respuesta correcta: b*

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,0) y (27.5,22.5) es

$$\begin{aligned} y &= \frac{22.5-0}{27.5-0}(x-0)+0 \\ &= \frac{9}{11}x \end{aligned}$$

La igualdad anterior es equivalente a la ecuación $11y - 9x = 0$.

3.17 *Respuesta correcta: a*

La longitud b de la base del triángulo que forma la zona de moda viene dada por la distancia entre los puntos (0,0) y (27.5,0), es decir, $b = \sqrt{(27.5-0)^2+(0-0)^2} = 27.5$. Por su parte, la altura h viene dada por la distancia entre los puntos (27.5,0) y (27.5,22.5), es decir, $h = \sqrt{(27.5-27.5)^2+(22.5-0)^2} = 22.5$ Así pues, el área buscada vale

$$A = \frac{b\,h}{2} = \frac{27.5\cdot 22.5}{2} = \frac{618.75}{2} = 309.38\,m^2$$

3.18 *Respuesta correcta: c*

La fachada norte de los *grandes almacenes* está sobre una recta que es paralela al eje de abscisas. Por tanto, su ecuación tiene que ser de la forma $x = a$. Observando la figura 6.9, comprobamos que es la ecuación $y = 22.5$. Además, la forma de las ecuaciones de las otras dos alternativas impiden que puedan ser la ecuación de la recta buscada, independientemente de los coeficientes de las variables y el término independiente.

3.19 *Respuesta correcta: a*

La pared común entres los grandes almacenes y la zona de restaurantes se extiende a lo largo de una recta perpendicular al eje de abscisas que corta a dicho eje en el punto $x = 55$. Por tanto la ecuación de dicha recta es $x = 55$.

3.20 *Respuesta correcta: b*

La gráfica de l curva está formada por los puntos de las forma $(x, f(x))$. Cuando $x = 55$ resulta $f(x) = 0.01\cdot 55^2 - 55 + 50 = 25.25$.

3.21 *Respuesta correcta: b*

Como se ve en la figura 6.10, los *grandes almacenes* tienen una forma que es prácticamente rectangular con dos de sus lados paralelos al eje x. Entonces hay que buscar el punto de la curva que dista menos de la fachada superior de dicha tienda. Como se aprecia en la figura 6.10, dicho punto es el punto en que se alcanza el mínimo de la función $f(x)$. Para encontrarlo, calculamos la primera derivada e igualamos a cero la ecuación que resulta.

$$f'(x) = 2\cdot 0.01\,x - 1 = 0$$

Al despejar, tenemos $\hat{x} = \frac{1}{0.02} = 50$. El valor que toma la función en este punto es: $f(50) = 0.01\cdot 50^2 - 50 + 50 = 25$. Por tanto el punto buscado tiene coordenadas $(50, 25)$. Como podemos observar en la figura 6.10, la fachada de los *grandes almacenes* está sobre la recta de ecuación $y = 22.5$, es decir, el caminante pasa una distancia igual a 25-22.5 = 2.5 metros de dicha fachada.

3.22 *Respuesta correcta: b*

La primera derivada de la función es $f'(x) = 2\cdot 0.01\,x - 1$ y la segunda derivada es $f''(x) = 0.02$. Dado que $f''(x) > 0$ para todos los valores de x, la función $f(x)$ es convexa.

3.23 *Respuesta correcta: b*

Sea A el suceso *"la película elegida es americana"*, E el suceso *"elige ella"* y E^c el suceso *"elige él"*. Según el enunciado $P(E) = P(E^c) = \frac{1}{2}$, pues elige ella o él,

según salga cara o cruz. Entonces

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|E)P(E) + P(A|E^c)P(E^c) \\ &= \frac{8}{10}\frac{1}{2} + \frac{4}{10}\frac{1}{2} \\ &= \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

3.24 *Respuesta correcta: b*

Sea A el suceso *"la película elegida es americana"*, E el suceso *"elige ella"* y E^c el suceso *"elige él"*. Se pretende que la probabilidad $P(A) = \frac{1}{2}$, ya que ésta es la condición para que los tipos de películas tengan la misma probabilidad de ser elegidas. Debemos buscar un valor $P(E)$ para el cual se cumpla esta condición. Dado que $P(E^c) = 1 - P(E)$, tenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = P(A) &= P(A|E)P(E) + P(A|E^c)P(E^c) \\ &= \frac{8}{10}P(E) + \frac{4}{10}(1 - P(E)) \\ &= \frac{4}{10} + \frac{4}{10}P(E) \end{aligned}$$

Al despejar, resulta $P(E) = \frac{1}{4}$. De aquí, $P(E^c) = \frac{3}{4}$. Así pues, por cada vez que elija ella, él tiene que elegir 3 veces.

3.25 *Respuesta correcta: b*

La frecuencia relativa del subsector *telefonía e internet* es $\frac{9}{5+5+9} = \frac{9}{19} = 0.47$.

3.26 *Respuesta correcta: a*

El gasto total del mes de enero fue

$$E = 154.80 + 65.35 + 40.30 + 250.40 = 510.85$$

mientras que el gasto total del mes de abril fue

$$A = 210.75 + 50.25 + 70.30 + 190.75 = 522.05$$

Por tanto el porcentaje de variación del gasto de abril con respecto a enero fue

$$\frac{522.05 - 510.85}{510.85} \cdot 100\,\% = 2.19\,\%$$

3.27 *Respuesta correcta: c*

El gasto total de cada sector en los cuatro meses fue el siguiente:

Alimentación	= 154.80+ 189.15+ 265.40 + 210.75	= 820.10
Bebidas	= 65.35 + 80.40+ 75.90 + 50.25	= 271.90
Droguería	= 40.30 + 125.45 + 90.80 + 70.30	= 326.85
Hogar	= 250.40 + 125.75 + 75.30 + 190.75	= 642.20

El gasto total fue

$$Total = 820.10 + 271.90 + 326.85 + 642.20 = 2{,}061.05$$

El porcentaje de gasto correspondiente a cada sector es

$$\begin{aligned} \text{Alimentación} &= \tfrac{820.10}{2{,}061.05} \cdot 100\,\% = 39.79\,\% \\ \text{Bebidas} &= \tfrac{271.90}{2{,}061.05} \cdot 100\,\% = 13.19\,\% \\ \text{Droguería} &= \tfrac{326.85}{2{,}061.05} \cdot 100\,\% = 15.86\,\% \\ \text{Hogar} &= \tfrac{642.20}{2{,}061.05} \cdot 100\,\% = 31.16\,\% \end{aligned}$$

Entonces el gasto conjunto en alimentación y bebidas fue igual a 39.79 + 13.19 = 52.98 % que supone más de la mitad del gasto. Por tanto, la afirmación a) es cierta. El gasto conjunto en bebidas y droguería fue 13.19 + 15.86 = 29.05 % que resulta inferior al gasto en hogar, por tanto b) es también cierta. Claramente, resulta falsa c) porque el gasto en hogar no llegó al 33.33 %.

3.28 *Respuesta correcta: a*

El gasto total de cada sector en los cuatro meses fue el siguiente: alimentación, 820.10; bebidas, 271.90; droguería, 326.85; hogar, 642.20. El gasto total fue 2,061.05. El porcentaje de gasto correspondiente a cada sector fue: alimentación, 39.79 %; bebidas, 13.19 %; droguería, 15.86 %; hogar, 31.16 %. Al representar los porcentajes anteriores en un diagrama de sectores se obtiene la figura a).

3.29 *Respuesta correcta: c*

La opción a) es incorrecta: todos los meses confunde los datos de bebidas con los de droguería y viceversa. La opción b) es incorrecta pues cambia los datos de febrero por los del mes de abril y viceversa. La única opción que representa adecuadamente los datos es la c).

3.30 *Respuesta correcta: b*

El gasto medio mensual en *alimentación* fue

$$\overline{A} = \frac{154.80+189.15+265.40+210.75}{4} = 205.03$$

3.31 *Respuesta correcta: b*

El gasto total de cada mes fue:

Enero	= 154.80+65.35+ 40.30+250.40	= 510.85
Febrero	= 189.15+ 80.40+ 125.45+ 125.75	= 520.75
Marzo	= 265.40+75.90+90.80+75.30	= 507.40
Abril	= 210.75+ 50.25+70.30+190.75	= 522.05

El gasto medio mensual fue

$$\overline{Gasto} = \frac{510.85+520.75+507.40+522.05}{4} = 515.26$$

Entonces, la varianza del gasto mensual es

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{4}[(510.85-515.26)^2+(520.75-515.26)^2 \\ &\quad +(507.40-515.26)^2+(522.05-515.26)^2] \\ &= 39.37 \end{aligned}$$

La desviación típica es $s = \sqrt{39.37} = 6.27$.

3.32 *Respuesta correcta: c*

A lo largo del cuatrimestre, la media del los gastos en cada uno de los tres sectores fue: alimentación, 205.03; bebidas, 67.97; droguería, 81.71. Por su parte, la desviación típica fue: alimentación, 40.16; bebidas, 11.60; droguería, 30.99. Por tanto, el coeficiente de variación de cada sector fue: alimentación, $\frac{40.16}{205.03} = 0.20$; bebidas, $\frac{11.60}{67.97} = 0.17$; droguería, $\frac{30.99}{81.71} = 0.38$. Así pues el sector de mayor variabilidad fue el de droguería.

4 APARATOS DE TELEVISIÓN

4.1 *Respuesta correcta: a*

En un televisor de formato $< 16:9 >$, el cociente del ancho dividido por el alto es $16/9$. Es decir $\frac{x}{y} = \frac{16}{9}$ o bien $\frac{x}{16} = \frac{y}{9}$.

4.2 *Respuesta correcta: b*

Es $x = \frac{16}{9}y$ o bien $x = 1.\widehat{7}y = 1.777\ldots y$. En cambio $y = \frac{9}{16}x = 0.5625x$.

4.3 *Respuesta correcta: c*

El televisor tiene de alto $y = \frac{9}{16}\,81.91 = 46.074$ cm.; luego, según el teorema de Pitágoras, su diagonal mide $D = \sqrt{81.91^2+46.074^2} = 93.979$ cm. o bien $D = 93.979/2.54 = 37$ pulgadas.

4.4 *Respuesta correcta: b*

En un televisor de 42” $= 42 \cdot 2.54 = 106.68$ cm., con formato $< 16:9 >$, su ancho x y su alto $y = \frac{9}{16}x$, según el teorema de Pitágoras, cumplen $x^2 + y^2 = 106.68^2$ o bien $(1+0.5625^2)x^2 = 106.68^2$; de donde $x^2 = \frac{106.68^2}{1+0.5625^2} = 8645.22$ y $x = 92.98$ cm. El ancho del marco de la pantalla suele ser muy reducido en los televisores modernos y no se ha tenido en cuenta.

4.5 *Respuesta correcta: a*

La diagonal de un televisor de 32” mide 81.28 cm. Al ser el formato $< 16:9 >$, su alto y y su ancho $x = \frac{16}{9}y$ cumplen, según el teorema de Pitágoras: $y^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 y^2 = 81.28^2$, es decir $4.16y^2 = 6606.44$; luego $y^2 = \frac{6606.44}{4.16} = 1588.09$ e $y = 39.85$ cm. Contando con la altura de la peana, es necesario disponer de al menos 49.85 cm.

4.6 *Respuesta correcta: c*

El alto de la pantalla es $y = \frac{9}{16}x$. Como $x^2 + y^2 = D^2$ o bien $x^2(1+(9/16)^2) = D^2$, resulta

$$x^2 = \frac{D^2}{(1+(9/16)^2)} = \frac{16^2 \cdot D^2}{16^2+9^2} = \frac{16^2 \cdot D^2}{337}$$

y, en definitiva, $x = \frac{16 \cdot D}{\sqrt{337}}$. El resultado vale tanto si D y x se expresan en pulgadas, como si se expresan en



centímetros; si D se mide en pulgadas y x en centímetros, hay que multiplicar por 2.54, o sea $x = \frac{40.64 \cdot D}{\sqrt{337}}$.

4.7 *Respuesta correcta: b*

Midiendo el ancho x en centímetros y la diagonal D en pulgadas, $x = \frac{40.64}{\sqrt{337}} \cdot D$. Es una función lineal de D que crece $\frac{40.64}{\sqrt{337}} = 2.21$ centímetros por cada pulgada de aumento de D.

4.8 *Respuesta correcta: a*

En centímetros la diagonal de la pantalla mide 165.1 cm. Su ancho x y su alto $y = \frac{9}{16}x$ deben cumplir $x^2 + y^2 = 165.1^2$, es decir $x^2(1 + 0.5625^2) = 165.1^2$; por tanto $x^2 = \frac{165.1^2}{1+0.5625^2} = 20706.38$ y $x = 143.9$ cm. En consecuencia, $y = 0.5625 \cdot 143.9 = 80.94$ cm. y el perímetro de la pantalla mide $2x + 2y = 449.68$ cm.

4.9 *Respuesta correcta: c*

La diagonal de la pantalla mide 65", luego su ancho x y su alto $y = 0.5625x$, medidos en pulgadas, verifican $x^2 + 0.5625^2x^2 = 65^2$; por tanto $x = \sqrt{\frac{4225}{1.316}} = 56.65$" e $y = 0.5625 \cdot 56.65 = 31.87$". El área de la pantalla mide pues $x \cdot y = 56.65 \cdot 31.87 = 1805.44$ pulgadas cuadradas. En cm^2, hay que multiplicar por 2.54^2; con lo cual el área es $1805.44 \cdot 2.54^2 = 11647.97$ cm^2 o 1.16 m^2 aproximadamente.

4.10 *Respuesta correcta: b*

Sean x e y el ancho y el alto de la pantalla, mientras que x' e y' son el ancho y el alto de la imagen. Con el formato $< 16 : 9 >$ del televisor será $y = 0.5625x$, mientras que la imagen de formato $< 4 : 3 >$ tiene una altura $y' = 3/4x' = 0.75x'$. Como se ajusta la imagen para que sea $y = y'$, resulta $0.5625x = 0.75x'$ o bien $x' = \frac{0.5625}{0.75}x = 0.75x$. Así pues el ancho de la imagen es $x' = 3/4x$ y el resto de la pantalla, $1/4x$, aparece en sendas bandas negras en los laterales de la imagen.

4.11 *Respuesta correcta: b*

Puede comprobarse que $1280 \cdot 9 = 720 \cdot 16 = 11520$. También $1280 = 16 \cdot 80$ y $720 = 9 \cdot 80$. Al ser el cociente del número de columnas de píxels, dividido por el de filas, equivalente a $16/9$ resulta que los píxels son cuadrados.

4.12 *Respuesta correcta: a*

Como $1920 = 16 \cdot 120$ y $1080 = 9 \cdot 120$, la fracción $\frac{1920}{1080}$ es equivalente a $\frac{16}{9}$. Nuevamente las pantallas de resolución 1920×1080 se componen de píxels cuadrados.

4.13 *Respuesta correcta: b*

Basta observar que $1920 \times 1080 = 2073600$ píxels o, abreviadamente, 2 megapíxels.

4.14 *Respuesta correcta: a*

Como $1280 \times 720 = 921600$ píxels, puede enunciarse la resolución como 1 megapíxel o, con una precisión inusual, 0.92 megapíxels.

4.15 *Respuesta correcta: b*

Si x es el número de columnas e y el número de filas, el formato $< 4 : 3 >$ indica que $y = \frac{3}{4}x$. Por tanto $x \cdot y = \frac{3}{4}x^2$ tiene el valor aproximado de $5.5 \cdot 10^6$ (5.5 megapíxels) y resulta $x \simeq \sqrt{4 \cdot 5.5 \cdot 10^6/3} = 2708.01$. Como x es un número entero, será $x = 2708$ e $y = 2031$. De hecho, la resolución 2708×2031 equivale a 5.4999 megapíxels.

4.16 *Respuesta correcta: b*

El formato de la pantalla es $\frac{1280}{720} = \frac{16}{9}$; o técnicamente $< 16 : 9 >$. Con una diagonal de 65", su ancho x y su alto $y = 0.5625x$ cumplen $x^2 + 0.5625^2x^2 = 65^2$, de modo que $x^2 = \frac{65^2}{1+0.5625^2} = 3209.5$ y $x = 56.652$ pulgadas. El tamaño de los píxels es pues $\frac{56.652}{1280} = 0.04426$" o bien $0.04426 \cdot 2.54 = 0.112$cm. = 1.12mm. El mismo resultado se obtiene dividiendo el alto $y = 0.5625 \cdot 56.652 = 31.867$" por el número de filas: $\frac{31.867}{720} = 0.4426$".

4.17 *Respuesta correcta: a*

El formato de la pantalla es $\frac{1920}{1080} = \frac{16}{9}$; o técnicamente $< 16 : 9 >$. Con 32" de diagonal, su ancho x y su alto $y = 0.5625x$ verifican $x^2 + 0.5625^2x^2 = 32^2$, de donde $x^2 = \frac{32^2}{1+0.5625^2} = 777.88$ y $x = 27.89$". El número de píxels por pulgada es pues $\frac{1920}{27.89} = 68.84$. Igualmente, como el alto es $y = 0.5625 \cdot 27.89 = 15.69$, es $\frac{1080}{15.688} = 68.84$ *PPP*. El inverso $\frac{1}{68.84} = 0.0145$" es el tamaño de los píxels en pulgadas, que equivale a 0.0368cm. = 0.368mm.

4.18 *Respuesta correcta: c*

0.5 metros por cada 10" significa 0.05 metros por pulgada, de modo que la distancia en metros al televisor debe ser $0.05 \cdot D + 0.5$.

4.19 *Respuesta correcta: a*

La regla indica que la distancia a un televisor de tamaño D debe ser $0.05 \cdot D + 0.5$ metros. Si se va a ver a 2 metros de distancia, el tamaño debe ser $0.05 \cdot D + 0.5 = 2$, con lo cual $D = \frac{1.5}{0.05} = 30$".

4.20 *Respuesta correcta: b*

Sea x el ancho de la pantalla e $y = \frac{9}{16}x$ su alto. Como $x^2 + y^2 = D^2$, resulta $x^2 = \frac{D^2}{1+0.5625^2} = \frac{D^2}{1.3164}$ o bien $x = \frac{D}{1.147}$ pulgadas. La distancia mínima al televisor debe ser pues $2 \cdot \frac{D}{1.147} 2.54 = 4.43D$ centímetros o $f(D) = 0.0443D$ metros.

4.21 *Respuesta correcta: c*

Según la respuesta del ejercicio anterior, la distancia mínima al televisor debe ser $f(D) = 0.0443\,D$ metros. Para $D = 37$", resulta que un televisor de 37" no debe observarse a menos de $f(37) = 0.0443 \cdot 37 = 1.64$ metros.

4.22 *Respuesta correcta: b*

La distancia mínima a un televisor de tamaño D viene dada por $f(D) = 0.0443\,D$ metros. Para una distancia de 1.5 metros, cumplen $f(D) \leq 1.5$ los televisores de tamaño $D \leq \frac{1.5}{0.0443} = 33.86$". Dicho de otra manera, lo televisores de tamaño superior a 33.86" deben verse a más de 1.5 metros.

4.23 *Respuesta correcta: a*

Sea x el ancho de la pantalla e $y = 0.5625x$ su alto. Como $x^2 + y^2 = D^2$, resulta $x^2 = \frac{D^2}{1+0.5625^2} = \frac{D^2}{1.3164}$ o bien $x = \frac{D}{1.147}$ pulgadas. La distancia máxima al televisor debe ser pues $5 \cdot \frac{D}{1.147} 2.54 = 11\,D$ centímetros o $f(D) = 0.11\,D$ metros.

4.24 *Respuesta correcta: b*

Según la respuesta del ejercicio anterior, la distancia máxima al televisor debe ser $f(D) = 0.11\,D$ metros. Para $D = 24$", resulta que un televisor de 24" no debe observarse a más de $f(24) = 0.11 \cdot 24 = 2.64$ metros.

4.25 *Respuesta correcta: b*

La distancia máxima a un televisor de tamaño D viene dada por $f(D) = 0.11\,D$ metros. Para una distancia de 2 metros, cumplen $f(D) \geq 2$ los televisores de tamaño $D \geq \frac{2}{0.11} = 18.18$". Dicho de otra manera, lo televisores de tamaño inferior a 18.18" deben verse a menos de 2 metros.

4.26 *Respuesta correcta: a*

Según se ha visto, la primera recomendación expresa la distancia a un televisor de tamaño D" mediante la función $f(D) = 0.05\,D + 0.5$ metros. En cambio la distancia máxima al televisor se recomienda que sea $0.11\,D$ metros. Se cumple $0.05\,D + 0.5 < 0.11\,D$ siempre que sea $0.06\,D > 0.5$ o bien $D > 8.33$". Dado que los televisores son siempre de tamaño superior al indicado, ambas recomendaciones son siempre compatibles.

4.27 *Respuesta correcta: c*

Según se ha visto, la primera recomendación expresa la distancia a un televisor de tamaño D" mediante la función $f(D) = 0.05\,D + 0.5$ metros. En cambio la distancia mínima al televisor se recomienda que sea $0.0443\,D$ metros. Se cumple $0.05\,D + 0.5 > 0.0443\,D$ para cualquier televisor (de tamaño $D > 0$).

4.28 *Respuesta correcta: c*

El ancho x de la pantalla y su alto $y = 0.5625x$ cumplen $x^2 + y^2 = D^2$, luego $x\sqrt{1 + 0.5625^2} = D$ o bien $x = 0.87D$"; en metros $x = \frac{0.87 \cdot 2.54}{100}\,D$ metros. Si d designa la distancia en metros al televisor, el triángulo rectángulo de catetos d y $x/2$ debe formar en el espectador un ángulo de 15°, cuya tangente es 0.268. Por tanto $\frac{x/2}{d} = \operatorname{tg} 15°$, es decir $\frac{0.011\,D}{d} = 0.268$ o bien $d = \frac{0.011\,D}{0.268} = 0.041\,D$ metros. Se trata de una distancia ligeramente inferior a la distancia mínima de la recomendación (b).

5 METALES PRECIOSOS

5.1 *Respuesta correcta: b*

La proposición *"Si la plata es más densa que el oro, entonces el oro es más denso que el platino"* es un condicional que podemos simbolizar por $p \to q$, donde p es la proposición *"La plata es más densa que el oro"* y q es la proposición *"El oro es más denso que el platino"*. De acuerdo con los datos de la tabla 6.4, la proposición p es falsa, luego la proposición $p \to q$ es verdadera cualquiera que sea el valor de verdad de q

5.2 *Respuesta correcta: a*

La oración *"¿Dónde está mi anillo de oro?"* es una interrogación y no afirma algo que pueda ser juzgado verdadero o falso. La oración *"Tiene un corazón de oro"* afirma un hecho que puede ser juzgado como verdadero o falso según a quién se aplique y es una proposición lógica. La oración *"No es oro todo lo que reluce"*. niega que si un objeto reluce, sea de oro y este hecho también puede ser considerado verdadero o falso, luego es una proposición lógica

5.3 *Respuesta correcta: c*

La proposición $p \to q$ enuncia que *"si es de oro macizo, entonces es barato"*; la proposición $\neg p \to q$ enuncia que *"si no es de oro macizo, entonces es barato"*; la respuesta correcta es $p \to \neg q$.

5.4 *Respuesta correcta: a*

En términos de p y q, la proposición *"No es cierto que si un objeto reluce, entonces sea de oro"* se representa por $\neg(q \to p)$, es decir es la proposición $\neg(\neg q \vee p) = q \wedge \neg p$.

5.5 *Respuesta correcta: c*

Aplicado a los metales preciosos, el quilate no es una unidad de masa, sino de la riqueza de la aleación. La cantidad de oro de cada anillo depende de la pureza del oro (los quilates que tiene) y la masa total del anillo; con los datos del enunciado no puede saberse si un anillo contendrá más o menos gramos de oro que el otro, tan sólo que el anillo de Juan contiene más oro por gramo que el de María.

5.6 *Respuesta correcta: a*

El razonamiento es un caso particular del *modus ponendo ponens*. Otra vez, observemos que la validez del razonamiento no tiene que ver con la verdad o falsedad de la conclusión. La proposición *"El oro es más denso que el platino"* es falsa, pero el razonamiento es lógicamente válido.

5.7 *Respuesta correcta: b*

El razonamiento es un caso particular del *modus tollendo tollens*.

5.8 *Respuesta correcta: c*

Designemos la proposición *"La plata es más densa que el oro"* por p y la proposición *"El oro es más denso que el platino"* por q; con símbolos, el razonamiento anterior se traduce en

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & \neg q \end{array}$$

La tabla de verdad del razonamiento es:

		Premisas		*Conclusión*
p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	V

Como puede apreciarse hay un caso en que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa. Por tanto, el razonamiento es una falacia.

5.9 *Respuesta correcta: b*

Designemos la proposición *"La plata es más densa que el oro, entonces el paladio es más denso que el platino"* por p, la proposición *"El paladio es más denso que el platino"* por q y la proposición *"El oro es más denso

que el paladio" por r; con símbolos, el razonamiento anterior se traduce en

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ \hline \therefore & p \to r \end{array}$$

luego es un caso particular de la Ley del silogismo hipotético.

5.10 *Respuesta correcta: a*

Designemos la proposición *"El paladio es denso que el oro"* por p y la proposición *"El paladio es más denso que la plata"* por q; con símbolos, el razonamiento anterior se traduce en

$$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

La tabla de verdad del razonamiento es:

		Premisas		*Conclusión*
p	q	$p \vee q$	$\neg p$	q
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Como puede apreciarse, siempre que las premisas son verdaderas la conclusión también lo es, luego el razonamiento es lógicamente válido pero no es un caso particular de la Ley del silogismo hipotético ya que el razonamiento no tiene premisas condicionales.

5.11 *Respuesta correcta: a*

El conjunto está definido por una enumeración de los metales que lo componen.

5.12 *Respuesta correcta: b*

Todos los metales del conjunto B son preciosos, luego el conjunto B es un subconjunto de A.

5.13 *Respuesta correcta: c*

Todos los metales preciosos son metales pero no todos los metales son preciosos, luego $A \subset B$ y, en consecuencia, $B^c \subset A^c$. La respuestas a y b no son ciertas ya que hay metales que no son preciosos.

5.14 *Respuesta correcta: b*

La composición de una aleación de dos metales se puede interpretar como un subconjunto de dos metales. El conjunto A tiene seis subconjuntos formados por dos elementos

$$\begin{array}{ccc} \{\text{plata, paladio}\} & \{\text{plata, oro}\} & \{\text{plata, platino}\} \\ \{\text{paladio, oro}\} & \{\text{paladio, platino}\} & \{\text{oro, platino}\} \end{array}$$

luego hay seis composiciones posibles de aleaciones de dos metales de A.

5.15 *Respuesta correcta: a*

A cada aleación le corresponde un subconjunto, luego es aplicación; además, es inyectiva, ya que dos aleaciones con distintas tienen composiciones distintas y se transforman den distintos subconjuntos. La transformación no es sobreyectiva, ya que los subconjuntos de A que sólo tienen un elemento no tienen preimagen, ya que se considera aleación a la combinación de dos o más metales.

5.16 *Respuesta correcta: a*

Para hallar los quilates del nuevo anillo es necesario calcular la fracción de su masa que es oro y reducir esa fracción a denominador 24; el numerador de esa fracción es el número de quilates.

El primer anillo es de 23 quilates, luego el oro que contiene es igual a la $\frac{23}{24}$ partes de la masa total; así, contiene $\frac{23}{24} \cdot 5$ gramos de oro. El segundo anillo contiene $\frac{20}{24} \cdot 10$ gramos de oro. El nuevo anillo tendrá un peso de 15 gramos y contendrá $\frac{23}{24} \cdot 5 + \frac{20}{24} \cdot 10$ gramos de oro. La proporción de oro en su masa es igual al cociente del contenido de oro entre la masa total.

$$\frac{\frac{23}{24} \cdot 5 + \frac{20}{24} \cdot 10}{15} = \frac{23 + 40}{3 \cdot 24} = \frac{21}{24}$$

Luego el nuevo anillo es de oro de 21 quilates.

5.17 *Respuesta correcta: b*

La moneda de 10 g contiene

$$\frac{20}{24} \cdot 10 = \frac{200}{24} \approx 8.33$$

gramos de oro; la moneda de media onza contiene

$$\frac{18}{24} \cdot \frac{31.1}{2} \approx 11.66$$

gramos de oro.

5.18 *Respuesta correcta: c*

El contenido en oro de un anillo de oro 22 quilates y 9 g de masa es $\frac{22}{24} \cdot 9 = 8.25$ g.

5.19 *Respuesta correcta: b*

El peso del oro contenido en la moneda es $\frac{22}{24} \cdot 15 = 13.75$ g. El peso del oro que contiene el anillo es $\frac{18}{24} \cdot 12 = 9$ g. Luego el contenido total de oro es $13.75 + 9 = 22.75$ g por el que pagarán $22.75 \cdot 30 = 682.5$ euros.

5.20 *Respuesta correcta: c*

Designemos por x el precio marcado en el escaparate y por d la cantidad de dinero que lleva. Puesto que si compra dos monedas al precio x le sobrarán 50 euros, podemos poner $2x + 50 = d$. Por otra parte, si le rebajan un 10 % el precio, cada moneda valdrá $0.9x$ y, puesto que ha comprado tres monedas rebajadas y le han sobrado 8 euros, podemos poner $3 \cdot 0.9x + 8 = d$. Las condiciones del enunciado se traducen en el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 50 & = & d \\ 2.7x & + & 8 & = & d \end{array}\right\}$$

Si restamos la primera ecuación a la segunda, resulta $0.7x - 42 = 0$; luego $x = 42/0.7 = 60$.

5.21 *Respuesta correcta: b*

Designemos por x el precio marcado en el escaparate. Si le rebajan el precio un r %, cada moneda pasará a costar $(1 - \frac{r}{100})x$. El coste de tres monedas sin rebaja es $3x$; el coste de cuatro monedas rebajadas un r % es $4(1 - \frac{r}{100})x$. Para que tres monedas al precio original cuesten igual que cuatro rebajadas debe cumplirse

$$3x = 4\left(1 - \frac{r}{100}\right)x$$

es decir $3 = 4 - 4\frac{r}{100}$, o bien $4r = 100$, luego $r = 25$; la rebaja debe ser del 25 %.

5.22 *Respuesta correcta: a*

Designemos por x el precio de la onza de plata y por y el precio de la media onza de oro. De la primera condición se tiene $x + 2y = 1100$ y de la segunda $2x + y = 595$. Para resolver el sistema de dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 1100 \\ 2x & + & y & = & 595 \end{array}\right\}$$

restamos a la segunda ecuación el doble de la primera y resulta

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 1100 \\ & & -3y & = & -1605 \end{array}\right\}$$

luego $y = 2705/3 = 535$; si reemplazamos este valor en la primera ecuación, resulta $x + 1070 = 1100$, luego $x = 1100 - 1070 = 30$.

5.23 *Respuesta correcta: c*

Designemos por x el número de onzas, en millones, que había en la reserva antes de realizar la venta; si el 32 % de x es igual a 4.3 millones de onzas, se tiene $0.32x = 4.3$, luego $x = 4.3/0.32 = 13.44$ millones de onzas.

5.24 *Respuesta correcta: c*

Designemos por x el número de onzas, en millones, que había en la reserva antes de realizar la venta. Si no se han realizado nuevas ventas, la reserva actual contiene el 68 % de las onzas de oro que había en 2011, es decir $0.68x$; el valor de la reserva es $1050 \times 0.68x$ millones de euros. Puesto que el 32 % de x es igual a 4.3 millones, se tiene $0.32x = 4.3$ y, en millones de euros, el valor de la reserva actual es

$$1050 \times 0.68x = 1050 \times 0.68\frac{4.3}{0.32} = \frac{3070.2}{0.32} = 9594.37$$

6 COTIZACIÓN DE LAS MONEDAS Y LINGOTES DE INVERSIÓN

6.1 *Respuesta correcta: c*

El coste fijo c es igual a 5.5y el porcentaje añadido por el comerciante del 6%, es decir $r = 0.06$, el precio es igual a $f(x) = (1+r)x + c$, donde x es la cotización de la onza de oro. En este caso, $f(x) = 1.06x + 5.5$. Si $x = 1300$, entonces $f(x) = 1.06 \times 1300 + 5.5 = 1383.5$.

6.2 *Respuesta correcta: a*

Puesto que la gráfica de función precio es una recta, basta hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_1, y_1) = (1000, 1054)$ y $(x_2, y_2) = (1200, 1264)$.

$$y - 1054 = \frac{1264 - 1054}{1200 - 1000}(x - 1000)$$

se sigue $y - 1054 = 1.05(x - 1000)$, o bien $y - 1054 = 1.05x - 1050$, es decir $y = 1.05x + 4$. Luego el coste fijo de la pieza es $c = 4$.

6.3 *Respuesta correcta: a*

Puesto que la gráfica de función precio es una recta, basta hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_1, y_1) = (1100, 1149)$ y $(x_2, y_2) = (1300, 1357)$.

$$y - 1149 = \frac{1357 - 1149}{1300 - 1100}(x - 1100)$$

se sigue $y - 1149 = 1.04(x - 1100)$, o bien $y - 1149 = 1.04x - 1144$, es decir $y = 1.04x + 5$. Luego la prima añadida por el comerciante es $r = 0.04$ o el 4% del valor intrínseco de la pieza.

6.4 *Respuesta correcta: c*

Puesto que la gráfica de función precio es una recta, basta hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_1, y_1) = (1000, 1054)$ y $(x_2, y_2) = (1200, 1264)$.

$$y - 1054 = \frac{1264 - 1054}{1200 - 1000}(x - 1000)$$

se sigue $y - 1054 = 1.05(x - 1000)$, o bien $y - 1054 = 1.05x - 1050$, es decir $y = 1.05x + 4$. Cuando $x = 1300$, el precio de venta será $1.05 \times 1300 + 4 = 1369$.

6.5 *Respuesta correcta: b*

La función precio es una suma de funciones, $f'(x) = (1.045x)' + (4)'$, luego $f'(x) = 1.045 + 0 = 1.045$. La derivada del precio es constante e igual a la pendiente de la recta, esto es característico de las funciones lineales. Su interpretación económica es que es el incremento que tiene el precio si la cotización aumenta una unidad monetaria.

6.6 *Respuesta correcta: c*

El valor de x que hace los precios iguales, $f_A(x) = f_B(x)$ es la solución de la ecuación $1.04x + 5 = x + 35$, es decir $0.04x = 30$, luego $x = 30/0.04 = 750$.

6.7 *Respuesta correcta: a*

La función $f_A(x) = 1.06x + 5$ es lineal y creciente, cuánto mayor es el precio x, más vale la función; se sigue que su gráfica es una recta que tiene pendiente igual a 1.06. De manera semejante, la función $f_B(x) = x + 40$ es lineal y creciente, con pendiente igual a 1.

La figura de la alternativa *b* no representa correctamente las funciones $f_A(x)$ y $f_B(x)$ ya que una de las funciones es creciente y la otra decreciente. Tampoco la alternativa *c* representa correctamente las funciones $f_A(x)$ y $f_B(x)$, ya que sus gráficas no son rectas paralelas, puesto que tienen pendientes distintas. La alternativa *a* si representa fielmente las propiedades de ambas funciones, la gráfica de $f_A(x)$ tiene una pendiente mayor que la de $f_B(x)$, por lo que crece más rápidamente; sin embargo, el término fijo de B es mayor que el de A y se tiene que para valores pequeños de x, el precio $f_A(x)$ es menor que $f_B(x)$, mientras que para valores grandes de x ocurre al revés.

Habrá un valor x para el cual los dos precios se igualen. Podemos hallar ese valor poniendo $f_A(x) = f_B(x)$, es decir

$$1.06x + 5 = x + 40$$

o bien $0.06x = 35$; si tomamos dos decimales exactos, se sigue $x = 35/0.06 = 583.33$. Por debajo de 583.33 es más barato comprar a B, por encima es mejor comprar a B.

6.8 *Respuesta correcta: b*

La longitud del contorno de la moneda es aproximadamente la longitud de una circunferencia de radio $\frac{28}{2}$, por lo que su medida es $L = 2\,\pi\,\frac{28}{2} \approx 87.96$mm.



7 SUMINISTRO Y CONSUMO ANUAL DE ORO

7.1 *Respuesta correcta: c*

De acuerdo con los datos de la tabla 6.5, la producción primaria mundial de oro fue igual a $420 + 255 + 227 + 220 + 150 + 145 + 120 + 100 + 1133 = 2770$, luego el porcentaje de producción procedente de China fue $\frac{420}{2770} \cdot 100\,\%$, es decir $15.16\,\%$.

7.2 *Respuesta correcta: b*

Durante 2013, la producción de USA fue de 227 toneladas y la de Australia de 255 toneladas. Para que USA tuviera en 2014 la misma producción que Australia tuvo en 2013, debería aumentarla en 28 toneladas; es decir la producción de 2013 debería aumentar en un $\frac{28}{227} \cdot 100\,\% = 12.33\,\%$ para alcanzar las 255 toneladas.

7.3 *Respuesta correcta: a*

Hasta el final de 2012 se habían extraído 175000 toneladas. En 2013, de acuerdo con los datos de la tabla 6.5, la producción primaria mundial de oro fue de 2770 toneladas que incrementaron el tonelaje extraído en un porcentaje igual a $\frac{2770}{175000} \cdot 100\,\% = 1.58\,\%$.

7.4 *Respuesta correcta: a*

De acuerdo con los datos de la tabla 6.6, la producción en 1970 fue de 1000.4 toneladas, mientras que la producción en 2010 fue de 189 toneladas. En términos absolutos, la producción en 2010 ha disminuido en $1000.4 - 189 = 811.4$ toneladas respecto de 1970, luego había disminuido en un $\frac{811.4}{1000.4} \cdot 100 = 81.11\,\%$ respecto de la producción de 1970.

La alternativa b no es correcta; si la producción disminuye, lo hará en cierta cantidad positiva, ya que como mucho disminuirá en el total cuando la producción se reduzca a cero. El porcentaje de disminución será positivo.

La alternativa c no es correcta; la producción de 1970, respecto de la de 2010, fue mayor en un porcentaje igual al $\frac{811.4}{189} \cdot 100 = 429.31\,\%$.

7.5 *Respuesta correcta: b*

La media de las nueve producciones de la tabla 6.6 es igual a

$$\frac{1000.4 + 713.4 + 674 + 670.8 + 605.4 + 523.8 + 428.3 + 296 + 189}{9} = 566.79$$

Así, cinco de los valores de la tabla son mayores que la media y cuatro son menores.

La respuesta c no es correcta porque ninguno de los valores es mayor que el doble de la media.

7.6 *Respuesta correcta: b*

La varianza es igual al promedio de los cuadrados menos el cuadrado de la media.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

En este caso, la suma de los cuadrados es igual a $1000.4^2 + 713.4^2 + 674^2 + 670.8^2 + 605.4^2 + 523.8^2 + 428.3^2 + 296^2 + 189^2 = 3361641.85$, luego el promedio de los cuadrados es

$$\frac{\sum_{i=1}^{9} x_i^2}{9} = \frac{3361641.85}{9} = 373515.76$$

y la varianza es

$$s^2 = 373515.76 - 566.79^2 = 52264.86$$

7.7 *Respuesta correcta: a*

El consumo total de oro durante el primer trimestre de 2014 fue de

$$570.7 + 00 + 282.3 + 282.5 = 1234.5$$

toneladas, el porcentaje de este consumo total debido al consumo en joyería es $\frac{570.7}{1234.5} \cdot 100 = 46.23\,\%$. Análogamente, el porcentaje del consumo total debido al consumo en tecnología es $\frac{99.0}{1234.5} \cdot 100 = 8.02\,\%$, el debido al consumo en inversión es $\frac{282.3}{1234.5} \cdot 100 = 22.87\,\%$ y el debido a los bancos centrales es $\frac{282.5}{1234.5} \cdot 100 = 22.88\,\%$.

7.8 *Respuesta correcta: c*

La respuesta a no es correcta; en el primer trimestre de 2013, el consumo total fue de 1077.1 toneladas y el consumo de oro debido a la inversión o a los bancos centrales fue de $288.1 + 130.8 = 418.9$ toneladas, luego el porcentaje del consumo total debido a estos dos

sectores fue el $\frac{418.9}{1077.1} \cdot 100 = 28.89\,\%$; por otra parte, el consumo total del primer trimestre de 2014 fue de 1234.5 toneladas y el consumo debido a la inversión y a los bancos centrales fue de $282.3 + 282.5 = 564.8$ toneladas; luego el porcentaje del consumo total debido a estos dos sectores fue el $\frac{564.8}{1234.5} \cdot 100 = 45.75\,\%$. Así, el porcentaje de consumo debido a estos dos sectores no ha disminuido sino que ha aumentado.

La respuesta b no es correcta; durante el primer trimestre de 2013, el porcentaje del consumo total debido a los bancos centrales fue el $\frac{130.8}{1077.1} \cdot 100 = 12.14\,\%$, mientras que durante el primer trimestre de 2014, el porcentaje del consumo total debido a los bancos centrales fue el $\frac{282.5}{1234.5} \cdot 100 = 22.88\,\%$, luego el porcentaje no se ha duplicado. Observemos que el consumo absoluto si se ha más que duplicado, pues ha pasado de 130.8 a 282.5 toneladas, sin embargo el porcentaje no, ya que al mismo tiempo ha crecido el consumo total.

La respuesta c es correcta; durante el primer trimestre de 2013, el porcentaje del consumo total debido a l a joyería fue el $\frac{554.7}{1077.1} \cdot 100 = 51.50\,\%$, mientras que durante el primer trimestre de 2014, el porcentaje del consumo total debido a este sector fue el $\frac{570.7}{1234.5} \cdot 100 = 46.23\,\%$, luego el porcentaje ha disminuido. Observemos que, aunque el consumo absoluto de joyería ha aumentado de un trimestre a otro, su porcentaje ha disminuido debido, otra vez, al aumento del consumo total.

7.9 *Respuesta correcta: a*

El histograma a) es el apropiado ya que tiene una barra por cada año considerado y representa la producción del año en cuestión, de esta forma, al comparar visualmente el tamaño de dos barras estamos comparando las producciones en esos periodos.

El histograma b) no representa la producción absoluta de cada periodo sino la proporción del total producido que corresponde a cada año; sin cálculos adicionales y sin conocer el total producido no podemos comparar entre sí las producciones de dos años dados.

El histograma c) representa la producción *acumulada* en cada periodo ya que cada barra tiene una altura proporcional a la producción del año correspondiente más lo producido en los años anteriores. Tampoco permite comparar directamente las producciones de dos años sin hacer algunos cálculos para descontar lo producido en los periodos anteriores.

7.10 *Respuesta correcta: a*

El diagrama a es el más adecuado ya que tiene los sectores dibujados con un ángulo proporcional a la importancia relativa de cada sector dentro de la demanda total; además, nos informa mediante las leyendas del valor de esa proporción.

Los diagramas b y c no representan gráficamente los porcentajes ya que los sectores son del mismo tamaño cuando las proporciones de los sectores son bien distintas.

8 MEDIDAS DEL TIEMPO

8.1 *Respuesta correcta: b*

Marcará la hora exacta cuando se haya atrasado 12 horas o bien 720 minutos. Como se atrasa 8 minutos al día, tardará $720/8 = 90$ días atrasarse 720 minutos.

8.2 *Respuesta correcta: a*

Para adelantarse 12 horas completas o 720 minutos, el reloj tardará $720/7 = 102.8571428$ días. Pero 0.8571428 días equivalen a $0.8571428 \cdot 24 = 20.5714272$ horas; a su vez 0.5714272 horas son $0.5714272 \cdot 60 = 34.2856314$ minutos y 0.2856314 minutos son $0.2856314 \cdot 60 = 17.137884$ segundos.

8.3 *Respuesta correcta: c*

Hasta las 18:22 del Viernes, transcurren $3 \cdot 24 = 72$ horas. De ellas hay que descontar el tiempo entre las 10:50 y las 18:22 del Viernes, que son 7 horas 32 minutos o 452 minutos. Así pues, entre los instantes indicados transcurren $72 \cdot 60 - 452 = 3868$ minutos.

8.4 *Respuesta correcta: a*

Hasta las 16:15 del 14 de Marzo, transcurren 8 horas y 35 minutos y faltan 5 días completos, o 120 horas, para

el momento final. Total 128 horas y 35 minutos, o bien $128.58\widehat{3}$ horas.

8.5 *Respuesta correcta: b*

Sumando directamente la hora de salida y la duración del viaje, se obtiene 26:96. Pero 96 minutos es 1 hora y 36 minutos, así que la hora de llegada serán las 27:36, referidas al comienzo del día de salida. Pero, a las 24:00 se habrá producido el cambio de fecha, de manera que en el horario del día siguiente son las 3:36 de la madrugada.

8.6 *Respuesta correcta: a*

Con el horario de Zagreb, el viaje que empieza a la 8:30 termina a las 23:82 que son, en realidad, las 0:22 del día siguiente. Como en Atenas es una hora más que en Zagreb, los relojes en Atenas marcarán la 1:22 de la madrugada.

8.7 *Respuesta correcta: b*

El viaje dura de las 16:30 hasta las 32:31 o, mejor dicho, las 8:31 del día siguiente, siempre en hora de Atenas. Como en Zagreb es una hora menos, serán las 7:31 hora local.

8.8 *Respuesta correcta: c*

Debido a las 5 horas de diferencia horaria, en el horario de Madrid, la llegada a Río de Janeiro se produce a las 22:15. Siempre en horario de Madrid, a las 21:40 se lleva volando 10 horas, quedan 20 minutos para las 22:00 y 35 minutos para las 22:15. Luego el vuelo dura 10 horas y 35 minutos. También, el vuelo sale a las 6:40, hora de Brasil, y llega a las $17:15 = 16$ horas $+ 75$ minutos; así que, restando, la duración del vuelo es de 10 horas y 35 minutos.

8.9 *Respuesta correcta: a*

Como en Hong Kong son 6 horas más que en París, el vuelo llega a las 4:30 horas de París, pero del día siguiente a la salida. Sumando 24 horas, han transcurrido 28 horas y 30 minutos, o bien 27 horas y 90 minutos, desde que empezó en París el día de la salida. Restando la hora de salida: $27\text{ h} + 90\text{ m} - (12\text{ h} + 35\text{ m}) = 15\text{ h} + 55\text{ m}$ es la duración del vuelo.

8.10 *Respuesta correcta: a*

Desde que empezó el día de salida en Nueva York, hasta que se llega a París, han transcurrido 28 horas y 70 minutos o, mejor dicho, 29 horas y 10 minutos. En el horario de Nueva York, la hora de llegada a París son las 5:10 del día siguiente y en París son 6 horas más; es decir, las 11:10.

8.11 *Respuesta correcta: c*

El vuelo sale a las 13:10 hora de Nueva York; sumando la duración del vuelo, llega a Nueva York cuando allí son las 21:15.

8.12 *Respuesta correcta: b*

Conviene medir el tiempo t en horas, a partir de la salida del primer tren; mientras que la posición x de cada tren sobre la vía se medirá en kilómetros, a partir de Málaga. En el instante t, el primer tren se encuentra en el punto: $x = 90 \cdot t$, puesto que recorre 90 kilómetros cada hora. El tren que sale de Barcelona parte 2 horas y 20 minutos después, lo que equivale a 7/3 de hora; además inicialmente está a 900 kilómetros de Málaga. Como viaja a 120 Km/h, la posición del segundo tren es $x = 900 - 120(t - 7/3)$. Ambos trenes se cruzarán cuando sus posiciones coincidan; es decir, cuando

$$90t = 900 - 120(t - 7/3) \quad \text{o bien} \quad 90t = 1180 - 120t.$$

La solución de esta ecuación es $t = 118/21 = 5.619$ horas. Ello equivale a 5 horas, $0.619 \cdot 60 = 37.1428$ minutos, o bien 5 horas, 37 minutos y $0.1428 \cdot 60 = 8.57$ segundos. Como el tiempo se ha contado a partir de las 8:00, los trenes se cruzan a las 13:37:08.

8.13 *Respuesta correcta: a*

Conviene medir el tiempo t en horas, a partir de las 12:30 y la posición x de los coches en kilómetros, a partir de Valencia. Así, en el instante t, la posición del primer coche será $x = 110t$. Mientras que el segundo coche, que parte 1.5 horas más tarde a distancia 612 kilómetros de Valencia, será $x = 612 - 90(t - 1.5)$. Cuando ambos coches se crucen, sus posiciones coincidirán y se cumplirá

$$110t = 612 - 90(t - 1.5) \quad \text{o bien} \quad 110t = 747 - 90t.$$

De ahí que $t = 747/200 = 3.735$ horas. En ese tiempo, el primer coche ha recorrido $110 \cdot 3.735 = 410.85$

kilómetros y ambos se encuentran a esa distancia de Valencia.

8.14 *Respuesta correcta: b*

A partir del meridiano de Greenwich la longitud geográfica se extiende desde los 180° de longitud Este hasta los 180° de longitud Oeste; completando lógicamente los 360° en los que se divide cualquier circunferencia. Puesto que hay 24 husos horarios, cada uno abarca $360^\circ/24 = 15^\circ$.

8.15 *Respuesta correcta: c*

La circunferencia de la Tierra en el Ecuador es $L = 2\pi \cdot 6375 = 40055$ kilómetros. Puesto que hay 24 husos horarios, cada uno mide $40055/24 = 1669$ kilómetros de ancho en el ecuador.

8.16 *Respuesta correcta: b*

Como recorre 5° cada día, tarda $360/5 = 72$ días exactos en completar su viaje. Si, tras navegar un tiempo t, medido en días, ve por primera vez al Sol pasar sobre él, habrá recorrido $t \cdot 5^\circ$, mientras que el Sol ha recorrido $360^\circ - t \cdot 5^\circ$. Como el Sol recorre 360° por día, t es solución de la ecuación

$$360^\circ - t \cdot 5^\circ = t \cdot 360^\circ$$

es decir $t = 360/365 = 0.9863$ días. Cada día se repite lo mismo y los pasos del Sol sobre el navegante están espaciados por lapsos de 0.9863 días. Al completar su viaje, el número n de lapsos transcurridos entre pasos consecutivos del Sol por su vertical es tal que $n \cdot 0.9863 = 72$, o sea $n = 72/0.9863 = 73$. Puede caer en el error de pensar que ha tardado 73 días, cuando en realidad ha tardado 72 días.

El fenómeno no depende de la velocidad del navegante (siempre que no sea muy elevada): Si recorre v° cada día, el instante t en que ve el primer paso del Sol por su vertical se obtiene de la ecuación $360^\circ - t \cdot v^\circ = t \cdot 360^\circ$; así que $t = 360/(360+v)$ es el lapso entre los pasos consecutivos del Sol sobre él. Su viaje dura $360/v$ días y, durante ese tiempo, observa

$$n = \frac{360/v}{360/(360+v)} = \frac{360+v}{v} = \frac{360}{v} + 1$$

pasos del Sol por su vertical; uno más de lo que dura su viaje.

8.17 *Respuesta correcta: a*

Como recorre 8° cada día, tarda $360/8 = 45$ días exactos en completar su viaje. Si, tras navegar un tiempo t, medido en días, ve por primera vez al Sol pasar sobre él, habrá recorrido $t \cdot 8^\circ$, mientras que el Sol ha recorrido $360^\circ + t \cdot 8^\circ$. Como el Sol recorre 360° por día, t es solución de la ecuación

$$360^\circ + t \cdot 8^\circ = t \cdot 360^\circ$$

es decir $t = 360/352 = 1.0227$ días. Cada día se repite lo mismo y los pasos del Sol sobre el navegante están espaciados por lapsos de 1.0227 días. Al completar su viaje, el número n de lapsos transcurridos entre pasos consecutivos del Sol por su vertical es tal que $n \cdot 1.0227 = 45$, o sea $n = 45/1.0227 = 44$. Puede caer en el error de pensar que ha tardado 44 días, cuando en realidad ha tardado 45 días.

Como en el ejercicio anterior, la respuesta no depende de la velocidad moderada del navegante.

8.18 *Respuesta correcta: b*

Los equinoccios ocurren cuando el día y la noche tienen la misma duración: 12 horas de luz diurna y 12 horas de obscuridad. A y C son los puntos que están sobre la recta de ordenada 12 horas.

8.19 *Respuesta correcta: c*

En el solsticio de verano la luz diurna tiene la máxima duración, tal como ocurre en el punto B del gráfico. El solsticio de invierno, cuando la luz diurna alcanza tiene la mínima duración, corresponde al punto D del gráfico

8.20 *Respuesta correcta: c*

En cualquier lugar, la hora de salida y de puesta del Sol varía poco de un día al siguiente. En ambos gráficos se aprecian saltos de una hora aproximadamente, debido a que se ha consignado en ellos la hora legal que añade una hora a los relojes a finales de Marzo y se la resta a finales de Octubre. De esta forma, si amaneció a las 7:00 el día anterior al horario de verano, amanecerá a las 8:00 el día siguiente al cambio. De modo análogo,



si anocheció a las 19:00 el último día del horario de verano, anochecerá a las 18:00 el primer día del horario de invierno.

8.21 *Respuesta correcta: b*

Un siglo dura 100 años y, en particular, el siglo I comprende los años $1,2,3,\dots,100$. En consecuencia, el siglo I terminó el 31 de Diciembre del año 100 y el siglo II empezó el 1 de Enero del año 101.

Nunca hubo año 0, ni siglo 0. Inicialmente, los años se contaban de forma ordinal: el *primer* año después de Cristo, el *segundo*, el *tercero*, etc. Pronto debió abandonarse esta práctica, pues es más cómodo referirse al año 23 que al *vigésimo tercer* año; y mucho más para el año 117. Todavía se oye hablar del primer, segundo o tercer milenio, en lugar del milenio 1, 2 o 3; pero tal práctica desaparecerá si la humanidad sobrevive para el *trigésimo cuarto milenio*.. Igual que ya nadie habla del *vigésimo primer* siglo para referirse al siglo XXI.

8.22 *Respuesta correcta: a*

El primer milenio abarca los mil años $\{1,2,3,\dots,1000\}$, el segundo es el conjunto de los años $\{1001,1002,\dots,2000\}$ y el tercero empezó el 1 de Enero de 2001.

Todo el mundo recuerda las celebraciones del Año Nuevo de 2000, cuando faltaba un año para que empezase el siglo XXI. Bien es cierto que las celebraciones son una convención cultural, sin que haya ninguna diferencia real entre ambas fechas.

8.23 *Respuesta correcta: b*

En cada ciclo de 400 años, hay 100 que son múltiplos de 4 y, de entre ellos, 4 que son múltiplos de 100, de los cuales uno es múltiplo de 400. Si A representa el conjunto de los años del ciclo que son múltiplos de 4, B el conjunto de los que son múltiplos de 100 y C el conjunto de los que son múltiplos de 400, se verifica $C \subset B \subset A$, así como $\#(A) = 100$, $\#(B) = 4$, $\#(C) = 1$. El conjunto de los años bisiestos en el calendario Gregoriano es $A-(B-C)$ y se tiene

$$\#(B-C) = 4-1 = 3$$

con lo cual

$$\#(A-(B-C)) = 100-3 = 97.$$

Alternativamente

$$\begin{aligned} A-(B-C) &= A\cap(B-C)^c = A\cap(B\cap C^c)^c \\ &= A\cap(B^c\cup C) = (A\cap B^c)\cup(A\cap C) \\ &= (A-B)\cup C \end{aligned}$$

y, puesto que $\#(A-B) = 96$ y $\#(C) = 1$, se obtiene $\#((A-B)\cup C) = 96+1 = 97$.

8.24 *Respuesta correcta: b*

El calendario Gregoriano utiliza ciclos de 400 años, de los cuales 97 son bisiestos y tienen un día suplementario, mientras que los 303 restantes tienen 365 días. Por tanto, el ciclo dura

$$400\cdot 365+97 = 146097 \text{ días;}$$

lo cual coincide con

$$303\cdot 365+97\cdot 366 = 146097 \text{ días.}$$

La duración media de los años es entonces

$$\frac{146097}{400} = 365.2425\text{días.}$$

8.25 *Respuesta correcta: c*

Naturalmente, hay que suponer que la fecha corresponde al año Juliano que rigió desde el 46 a.C. hasta el 1582 d.C. Desde el 1 de Enero del año 1, hasta el 31 de Diciembre del año 406, transcurrieron 406 años; entre ellos hubo 101 años bisiestos (los múltiplos de 4: $4,8,12,\dots,404$), así que la invasión se produjo el día $406\cdot 365+101 = 148921$ de nuestra era. Alternativamente, teniendo en cuenta que cada año del calendario Juliano duraba 365.25 días, habían transcurrido $406\cdot 365.25 = 148291.5$ días, de los cuales hay que descontar los 0.5 días que no se contabilizarían hasta el siguiente año bisiesto (el 408).

8.26 *Respuesta correcta: a*

En 1789 regía ya en Francia el calendario Gregoriano, que había sido ajustado para recuperar el adelanto del calendario Juliano; así que se puede suponer que el calendario Gregoriano había regido desde el año 1 de

nuestra era. Hasta el final de 1600, se habían completado cuatro ciclos de 400 años con 97 años bisiestos cada uno; total

$$4 \cdot (400 \cdot 365 + 97) = 584\,388 \text{ días.}$$

En los 188 años siguientes, hasta el final de 1788, hubo 47 años múltiplos de 4 $(1604, 1608, \ldots, 1788)$, que fueron todos bisiestos, salvo 1700. Ello añade

$$188 \cdot 365 + 46 = 68\,666 \text{días más.}$$

Por último, desde el 1 de Enero de 1789 hasta el 14 de Julio del mismo año, transcurrieron

$$31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 14 = 195 \text{ días.}$$

En resumen, la toma de la Bastilla ocurrió el día

$$584\,388 + 68\,666 + 195 = 653\,249 \text{ d.C.}$$

Una buena aproximación es multiplicar los 1788 años completos por su duración media 365.2425 y añadir los 195 días de 1789. Así

$$1788 \cdot 365.2425 + 195 = 653\,248.59 \text{ días.}$$

8.27 *Respuesta correcta: c*

Las horas trabajadas son $5 \cdot 8 = 40$, mientras que la semana consta de $7 \cdot 24 = 168$ horas. Por consiguiente, la proporción de tiempo trabajado es

$$\frac{40}{168} = 0.2381 = 23.81\,\%.$$

8.28 *Respuesta correcta: a*

Si el mes empieza en Jueves, incluye 5 Sábados, 4 Domingos y 22 días laborables. El tiempo total trabajado es de $22 \cdot 8 = 176$ horas, de un total de las $31 \cdot 24 = 744$ horas del mes. La proporción de tiempo trabajado es

$$\frac{176}{744} = 0.2366 = 23.66\,\%.$$

8.29 *Respuesta correcta: b*

Desde luego son distintos los calendarios impresos para los años bisiestos (en los que figura el 29 de Febrero) y para los años normales. Además el 1 de Enero puede caer el cualquiera de los 7 días de la semana, de Lunes a Domingo; luego sólo hay 14 calendarios diferentes.

8.30 *Respuesta correcta: a*

Entre los años 2014 y 2018 sólo es bisiesto el 2016. El 6 de Mayo será Miércoles en 2015, Viernes en 2016, Sábado en 2017 y Domingo en 2018.

8.31 *Respuesta correcta: b*

A pesar de que 2016 es bisiesto, el 4 de Febrero de 2016 será Jueves, puesto que el día extra se introduce al final de Febrero. Pero el 4 de Febrero de 2017 será Sábado, ya que hasta entonces han transcurrido 52 semanas y dos días. En 2018, el 4 de Febrero será Domingo; en 2019, Lunes y en 2020, Martes.

8.32 *Respuesta correcta: b*

Desde un 29 de Febrero hasta el siguiente pasan $4 \cdot 365 + 1 = 1461$ días; ello supone 208 semanas y cinco días adicionales y, por consiguiente, el 29 de Febrero siguiente será Jueves. La regla no vale, por ejemplo, para el 1896 porque 1900 no fue bisiesto y el 29 de Febrero siguiente ocurrió en 1904. En este caso, pasan $8 \cdot 365 + 1 = 2921$ que son 417 semanas y dos días; de forma que el 29 de Febrero de 1904 fue Lunes.

9 EL MUNDO DEL FÚTBOL

9.1 *Respuesta correcta: a*

La proposición r expresa un deseo; no es posible decidir nada acerca de su verdad o falsedad. Por tanto, no es una proposición lógica. En cambio, p y q son afirmaciones que se pueden valorar como ciertas o falsas, por lo que se pueden considerar proposiciones lógicas.

9.2 *Respuesta correcta: b*

Sean las proposiciones $p =$ *"Bieito se recupera de su lesión"* y $q =$ *"Joao juega"*. Entonces la afirmación del entrenador se puede simbolizar por $p \to \neg q$. Si admitimos que el entrenador dice la verdad, entonces la proposición anterior es cierta. Al repasar la alineación, vemos que *Joao* juega el partido, es decir, la proposición q es también cierta. Puesto que $q = \neg(\neg q)$, al aplicar el *modus tollendo tollens* deducimos que $\neg p$ es también cierta, es decir, *Bieito no se recuperó de su lesión*.

9.3 *Respuesta correcta: c*

Sean las proposiciones $p =$ *"el rival es un equipo muy combativo"* y $q =$ *"el rival tiene mucha suerte"*. Entonces la afirmación del entrenador se puede simbolizar por $p \vee q$. Si admitimos que el entrenador dice la verdad, entonces la proposición anterior es cierta. Según los comentaristas deportivos p no es cierta, por lo cual $\neg p$ es cierta. Al aplicar el *modus tollendo ponens* deducimos que q es cierta.

9.4 *Respuesta correcta: a*

Sean las proposiciones $p =$ *"el día del partido no llueve"*, $q =$ *"el día del partido funciona la manguera"* y $r =$ *el día del partido se riega el campo*. La afirmación del entrenador se puede simbolizar por $p \to (q \wedge r)$. Esta proposición es cierta según las palabras del entrenador. Puesto que el día del partido no llovió p es cierta, por lo cual al aplicar el *modus ponendo ponens* deducimos que $q \wedge r$ es también cierta.

9.5 *Respuesta correcta: b*

Sean las proposiciones $p =$*"ganamos este partido"*, $q =$*"nos clasificamos para la* champions league*"* y $r =$ *"salvamos la temporada"*. Entonces los comentarios camino del campo se pueden representar por $p \to q$ y $q \to r$. Al aplicar la ley del silogismos hipotético se deduce $p \to r$, que es la representación simbólica de la reflexión realizada en el campo.

9.6 *Respuesta correcta: a*

Sean las proposiciones $p =$ *"el equipo juega bien"*, $q =$ *"el equipo gana el partido"*, $r =$ *"el equipo suma tres puntos"*, $r =$ *"el equipo será campeón"*. Entonces las declaraciones del jugador pueden simbolizarse del siguiente modo. Las tres primeras frases forman las premisas: $\neg p \wedge q =$*"el equipo no juega bien y el equipo gana el partido"* y $q \to r =$ *"si el equipo gana el partido entonces el equipo suma tres puntos"*. y $r \to s =$ *"si el equipo suma tres puntos entonces el equipo será campeón"*. La última frase es la conclusión: $\neg p \wedge s =$ *"el equipo no juega bien y el equipo será campeón"*. En forma esquemática, el razonamiento tiene la forma siguiente

	$\neg p \wedge q$	*"el equipo no juega bien y el equipo gana el partido".*
	$q \to r$	*"si el equipo gana el partido entonces el equipo suma tres puntos".*
	$r \to s$	*"si el equipo suma tres puntos entonces el equipo será campeón".*
$\therefore$	$\neg p \wedge s$	*"el equipo no juega bien y el equipo será campeón".*

Vamos *demostrar* que el razonamiento es lógicamente válido. Los pasos de la demostración pueden ser los siguientes:

(1)	$\neg p \wedge q$	Premisa 1
(2)	$q \to r$	Premisa 2
(3)	$r \to s$	Premisa 3
(4)	$\neg p$	Se deduce de (1) por ser cierta su conjunción con otra proposición.
(5)	q	Se deduce de (1) por ser cierta su conjunción con otra proposición.
(6)	r	Se deduce de (2) y (5) por el modus ponendo ponens.
(7)	s	Se deduce de (3) y (6) por el modus ponendo ponens.
(8)	$\neg p \wedge s$	Se deduce de (4) y (7) por ser la conjunción de dos proposiones verdaderas.

Luego el razonamiento es cierto. También se puede comprobar calculando da tabla de verdad del razonamiento, como se ve a continuación

					Premisas			Conclusión
p	q	r	s	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$q \to r$	$r \to s$	$\neg p \wedge s$
V	V	V	V	F	F	V	V	F
V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	V	F	F	F	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	F

Puesto que no hay ningún caso en el que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa podemos afirmar que el razonamiento es lógicamente válido.

9.7 *Respuesta correcta: b*

La longitud reglamentaria debe cumplir que $90 \leq x \leq 120$. Entonces necesariamente $x \in A$ y $x \in B$, por lo cual $x \in A \cap B$. La alternativa a) es el conjunto $I\!R$, por lo que incluye valores de x que no son necesariamente longitudes reglamentarias, mientras que la alternativa c) es el conjunto vacío.

9.8 *Respuesta correcta: c*

La anchura reglamentaria debe cumplir que $45 \leq y \leq 90$. Entonces necesariamente $y \notin C$ e $y \notin D$, es decir, $y \in C^c$ e $y \in D^c$ por lo cual $x \in C^c \cap D^c$. Ninguno de los valores del conjunto de la alternativa a) es una anchura reglamentaria, mientras que la alternativa b) es el conjunto vacío.

9.9 *Respuesta correcta: a*

La longitud x de un campo de fútbol tiene que cumplir $90 \leq x \leq 120$, es decir, cualquier x perteneciente al intervalo cerrado $[90, 120]$ es una longitud reglamentaria. Las respuestas b) y c) no son correctas porque excluyen a un extremo, el valor 90 en la opción b), o a ambos extremos en la opción c) .

9.10 *Respuesta correcta: c*

La anchura y de un campo de fútbol tiene que cumplir $45 \leq y \leq 90$, es decir, cualquier y perteneciente al intervalo cerrado $[45, 90]$ es una anchura reglamentaria. Las respuestas a) y b) no son correctas porque excluyen a un extremo, el valor 45 en la opción b), o a ambos extremos en la opción a) .

9.11 *Respuesta correcta: c*

Como se indica en el enunciado, la longitud ℓ de la circunferencia de un balón de fútbol reglamentario ha de ser $68 \leq \ell \leq 70$, es decir, $\ell \in [68, 70]$. Sabemos que dado un número real a el intervalo $(-\infty, a)$ representa al conjunto de números reales que son menores que a, mientras que el intervalo $(a, +\infty)$ representa al conjunto de números reales mayores que a. Así pues, el conjunto indicado en la alternativa a) es la intersección del conjunto de números reales *menores* que 68 con el conjunto de números reales *mayores* que 70, el cual es obviamente vacío. La alternativa b) representa el conjunto de números reales que son *menores* que 68 o bien son mayores que 70. Evidentemente ℓ no pertenece a este conjunto. Finalmente, la alternativa c) representa al conjunto de números reales que *no son menores que 68* y que *no son mayores que 70*, es decir, tienen que estar entre 68 y 70 ambos incluidos. Éste es pues el conjunto al que pertenece ℓ.

9.12 *Respuesta correcta: b*

Cada jugador tiene que llevar un número propio, diferente del que llevan los demás compañeros. Por tanto, dos elementos de A distintos no pueden tener la misma imagen. De ahí que la aplicación sea inyectiva. La aplicación no es sobreyectiva porque existen números de B que no son el dorsal de ningún jugador. De esto también se sigue que la aplicación no es biyectiva.

9.13 *Respuesta correcta: a*

La longitud de la meta es $\ell = 7.32$ metros $= 8$ yardas y que la anchura es $a = 2.44$ metros $= 8$ pies. Llamemos c al cociente entre la yarda y el pie, es decir, 1 yarda $= c$ pies. Tenemos entonces las igualdades siguientes:

$$7.32 \text{ metros} = 8 \text{ yardas} = 8 \cdot c \cdot \text{ pies} = 8 \cdot c \cdot \frac{2.44}{8} \text{ metros}$$

por lo cual $c = \frac{7.32}{2.44} = 3$, es decir, una yarda es igual a 3 pies.

9.14 *Respuesta correcta: b*

La longitud de la meta es 7.32 metros u 8 yardas, podemos deducir que una yarda es igual a $\frac{7.32}{8} = 0.915$ metros.

9.15 *Respuesta correcta: a*

La altura de los postes de la meta es 2.44 metros u 8 pies, podemos deducir que un pie es igual a $\frac{2.44}{8} = 0.305$ metros.

9.16 *Respuesta correcta: c*

Cada palo mide 2.44 metros, mientras que el larguero mide 7.32. Por tanto la suma de los tres es $2 \cdot 2.44 + 7.32 = 12.2$ metros.

9.17 *Respuesta correcta: c*

El espacio entre los palos de una portería mide 7.32 metros, mientras que la línea de meta mide 68 metros. Por tanto, la fracción es $\frac{7.32}{68} = 0.1076$ y resulta ser mayor que $\frac{1}{10}$.

9.18 *Respuesta correcta: b*

El resultado se deduce de la figura 6.25. A la longitud de la meta hay que sumarle los dos tramos de 5.5 metros que se extienden a cada lado de la misma y resulta

$$7.32 + (2 \cdot 5.5) = 18.32 \text{ metros.}$$

9.19 *Respuesta correcta: b*

El resultado se deduce de la figura 6.25. A la longitud de la meta hay que sumarle los dos tramos de 16.5 metros que se extienden a cada lado de la misma y resulta

$$7.32 + (2 \cdot 16.5) = 40.32 \text{ metros.}$$

9.20 *Respuesta correcta: b*

La longitud del campo es 105 y la anchura es 68. Por tanto el perímetro es $2 \cdot (105 + 68) = 346$ metros.

9.21 *Respuesta correcta: a*

La dimensión mayor del área de meta es

$$7.32 + (2 \cdot 5.5) = 18.32 \text{ metros.}$$

mientras que la dimensión menor es 5.5. Por tanto el perímetro es $2 \cdot (5.5 + 18.32) = 47.64$ metros.

9.22 *Respuesta correcta: b*

La dimensión mayor del área de meta es

$$7.32 + (2 \cdot 16.5) = 40.32 \text{ metros}$$

mientras que la dimensión menor es 16.5. Por tanto el perímetro es $2 \cdot (16.5 + 40.32) = 113.64$ metros.

9.23 *Respuesta correcta: a*

La longitud del campo es 105 y la anchura es 68. Por tanto el área es $105 \cdot 68 = 7{,}140$ metros cuadrados.

9.24 *Respuesta correcta: c*

La dimensión mayor del área de penal es

$$7.32 + (2 \cdot 16.5) = 40.32 \text{ metros.}$$

mientras que la dimensión menor es 16.5. Por tanto la superficie del área de penal es $16.5 \cdot 40.32 = 665.28$ metros cuadrados.

9.25 *Respuesta correcta: c*

La dimensión mayor del área de meta es

$$7.32 + (2 \cdot 5.5) = 18.32 \text{ metros.}$$

mientras que la dimensión menor es 5.5. Por tanto la superficie del área de meta es $5.5 \cdot 18.32 = 100.76$ metros cuadrados.

9.26 *Respuesta correcta: b*

Según las dimensiones de la portería indicadas en la figura 6.26 la superficie es $7.32 \cdot 2.44 = 17.86$ metros cuadrados.

9.27 *Respuesta correcta: a*

Puesto que la superficie del terreno de juego es $105 \cdot 68 = 7{,}140$ metros cuadrados y la superficie de la portería es $7.32 \cdot 2.44 = 17.86$ metros cuadrados, resulta que ésta supone un porcentaje de aquélla igual a $\frac{17.86}{7{,}140} \cdot 100 = 0.25\,\%$.

9.28 *Respuesta correcta: b*

La superficie del área de penal es igual $16.5 \cdot 40.32 = 665.28$, mientras que la superficie del área de meta es igual a $5.5 \cdot 18.32 = 100.76$. Por tanto, con respecto al área penal el área de meta supone aproximadamente un $\frac{100.76}{665.28} \cdot 100 = 15.15\,\%$.

9.29 *Respuesta correcta: b*

La circunferencia que delimita el círculo central tiene como centro el punto $(0,0)$ y el valor del radio es 9.15. Por tanto su ecuación es $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 9.15^2$ que es la ecuación expresada en b).

9.30 *Respuesta correcta: b*

La longitud de la circunferencia que delimita el círculo central es $2\,\pi\,r = 2\pi\,9.15 = 2 \cdot 3.14 \cdot 9.15^2 \approx 57.49$.

9.31 *Respuesta correcta: a*

La superficie del círculo central es igual a $\pi\,r^2 = \pi\,9.15^2 = 3.14 \cdot 9.15^2 \approx 263.02$.

9.32 *Respuesta correcta: a*

La recta se corresponde con el eje de abscisas y tiene ecuación $y = 0$.

9.33 *Respuesta correcta: b*

El punto de penal con abscisa positiva tiene coordenadas $(41.5, 0)$. La recta perpendicular por este punto al eje de abscisas, es decir, a la recta $y = 0$ tiene ecuación $x = 41.5$.

9.34 *Respuesta correcta: c*

El punto del banderín de esquina superior derecha tiene coordenadas $(52.5, 34)$, mientras que el punto central es el (0,0). La ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos es

$$y = \frac{34-0}{52.5-0}(x-0)+0 \;=\; \frac{34}{52.5}\,x \;=\; \frac{68}{105}\,x$$

De aquí se sigue que la recta buscada es $105y - 68x = 0$.

9.35 *Respuesta correcta: c*

Las coordenadas del punto A son (36,20.16) y las coordenadas del punto B son (47,9.16). Entonces la distancia entre los dos puntos es igual a

$$d = \sqrt{(36-47)^2 + (20.16-9.16)^2} = 15.56$$

9.36 *Respuesta correcta: b*

La distancia recorrida por *Bieito* es igual a

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} &= \sqrt{(25-(-10))^2 + (25-25)^2} \\ &\quad + \sqrt{(35-25)^2 + (10-25)^2} \\ &= 53.03 \text{ metros} \end{aligned}$$

9.37 *Respuesta correcta: a*

La ecuación de la recta que sigue el jugador pasa por el punto (5,-20) y tiene pendiente $\frac{2}{5}$, es decir, es la recta $y - (-20) = \frac{2}{5}(x-5)$. Al simplificar la igualdad anterior se obtiene la recta $-2x + 5y = -110$. El lado mayor del área de penal de la derecha, que es la dirección que sigue el jugador, es la recta perpendicular al eje de abscisas por el punto $x = 36$, es decir, es la recta de ecuación $x = 36$. La intersección de las dos rectas se obtiene al resolver el sistema que forman las ecuaciones de ambas rectas. Desde luego, la abscisa del punto de intersección ha de ser $\bar{x} = 36$. Al sustituir este valor en la ecuación de la recta que sigue el jugador tenemos: $-2 \cdot 36 + 5y = -110$. Si despejamos la variable y obtenemos el valor de la ordenada: $\bar{y} = -7.6$. Por tanto el punto buscado tiene coordenadas $(36, -7.6)$.

9.38 *Respuesta correcta: c*

La ecuación de la recta que pasa por el punto (5,-20) y tiene pendiente $\frac{2}{5}$ es $y - (-20) = \frac{2}{5}(x-5)$. Al simplificar la igualdad anterior se obtiene la recta $-2x + 5y = -110$.

9.39 *Respuesta correcta: a*

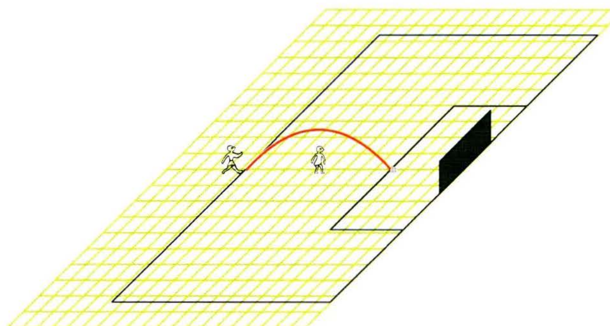
Si despejamos y en la ecuación de la recta por la que corre *Bieito* obtenemos $y = \frac{1}{4}(x - 105)$, por lo cual su pendiente es $\frac{1}{4}$. La paralela a esta recta por el punto (15,-30) tiene ecuación $y = \frac{1}{4}(x-15) - 30$. Al simplificar se obtiene la ecuación $-x + 4y = -135$.

9.40 *Respuesta correcta: a*

La recta $x + 2y = 10$ tiene pendiente $a = -\frac{1}{2}$. Entonces cualquier perpendicular a dicha recta tendrá pendiente

$a' = -\frac{1}{a} = -\dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$. Por otra parte, la perpendicular buscada tiene que pasar por el punto de penal del área penal del defensor, es decir, por el punto (-41.5,0). Entonces la ecuación es $y = 2(x - (-41.5)) + 0 = 2x + 83$.

9.41 *Respuesta correcta: b*

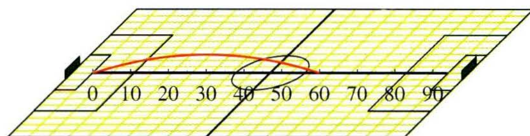


Si igualamos a cero la primera derivada de f se obtiene $f'(x) = -2 \cdot 0.1(x - 41.5) = 0$. Al resolver esta ecuación obtenemos que el punto en que f alcanza su máximo es $x = 41.5$.

9.42 *Respuesta correcta: a*

Para calcular la altura máxima, buscamos el punto en que f alcanza su máximo. Si resolvemos la ecuación que resulta de igualar a cero la primera derivada de f se obtiene $x = 41.5$. Para este valor de x, la función toma el valor $f(41.5) = 3 - 0.1(41.5 - 41.5)^2 = 3$.

9.43 *Respuesta correcta: b*



Como se observa en la figura, el balón describe la parábola $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$. Para encontrar el punto en que esta función alcanza su máximo, igualamos su primera derivada a cero y resolvemos la ecuación resultante. Tenemos $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2x}{180} = 0$. Al despejar, se obtiene $x = 30$.

9.44 *Respuesta correcta: a*

Como se observa en la figura, el balón describe la parábola $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$. Para encontrar el punto en que esta función alcanza su máximo, igualamos su primera derivada a cero y resolvemos la ecuación resultante. Tenemos $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2x}{180} = 0$. Al despejar, se obtiene $x = 30$. En este punto, la función toma el valor $f(30) = \frac{1}{3}\,30 - \frac{1}{180}\,30^2 = 5$.

9.45 *Respuesta correcta: a*

Como se observa en la figura, el balón describe la parábola $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$. Al caer el balón al suelo, la altura vale cero. Entonces hay que buscar el punto x para el cual $f(x) = 0$. Escribimos entonces la ecuación $\frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2 = 0$. La ecuación anterior puede ponerse como $x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{180}\,x\right) = 0$. Si $x = 0$ tenemos el punto de saque. Si $x \neq 0$ entonces tiene que ocurrir que $\frac{1}{3} - \frac{1}{180}\,x = 0$. Al despejar resulta $x = 60$.

9.46 *Respuesta correcta: b*

Como se observa en la figura, el balón describe la parábola $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$. Al caer el balón al suelo, la altura vale cero, es decir, $\frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2 = 0$. Al despejar, se obtiene $x = 60$. Como la distancia desde la línea de meta a la línea de medio campo es 52.5 metros, podemos asegurar que el balón ha cruzado dicha línea antes de caer al suelo.

9.47 *Respuesta correcta: b*

Consideremos como espacio de posibilidades el formado por los cuatro resultados posibles de lanzar dos monedas:

$$\Omega = \{☺☺, ☺⊛, ⊛☺, ⊛⊛\}$$

Si admitimos que las monedas estás equilibradas, todos los casos posibles tienen la misma probabilidad y el modelo es uniforme. Entre los cuatro casos hay tres favorables al suceso A = "obtener alguna cara",

$$A = \text{"obtener alguna cara"} = \{☺☺, ☺⊛, ⊛☺\}$$

De acuerdo con la regla de Laplace, la probabilidad del suceso es $3/4$.

Otro método para calcular esta probabilidad es hallar la probabilidad del suceso contrario. El suceso que nos interesa está formado por los casos que tienen una

o dos caras, mientras que su contrario está formado por el caso que sólo tiene cruces. Calcular la probabilidad del suceso contrario supone aprovechar la sencillez de éste, frente a la mayor de complejidad del suceso A.

Un razonamiento equivocado es el siguiente: *"Al lanzar dos veces la moneda pueden aparecer* 0, 1 *ó* 2 *caras, luego hay tres casos posibles; puesto que los dos casos* 1 *y* 2*, son favorables al suceso, la probabilidad es* $2/3$." El error de este razonamiento está en suponer que los tres casos 0, 1 y 2 tienen la misma probabilidad, este modelo no es uniforme ya que hay dos maneras de tener una cara, que salga [cara][cruz] o [cruz][cara], mientras que sólo hay una manera de tener dos caras y sólo una de tener dos cruces.

9.48 *Respuesta correcta: c*

Consideremos como espacio de posibilidades el formado por los ocho resultados posibles de lanzar tres monedas.

$\Omega = \{$ [cara][cara][cara], [cara][cara][cruz], [cara][cruz][cara], [cruz][cara][cara], [cara][cruz][cruz], [cruz][cara][cruz], [cruz][cruz][cara], [cruz][cruz][cruz] $\}$

Puesto que el modelo es uniforme, todos los casos posibles tienen la misma probabilidad. Hay siete casos favorables al suceso "aparece alguna cara", luego su probabilidad es $7/8$. Otro método de cálculo es hallar la probabilidad del suceso contrario. El contrario de "aparece alguna cara" es "todos los resultados son cruz" que sólo tiene un caso favorable. La probabilidad del contrario es $1/8$ y la del suceso problema $1 - 1/8 = 7/8$.

9.49 *Respuesta correcta: c*

Si consideramos los sucesos B = *"Bahía gana la eliminatoria contra el Internacional"* e I = *"Internacional gana la eliminatoria contra el Bahía"* se tiene $P(B) = P(I) = 0.5$. Sea S el suceso *"el Sport gana la semifinal"*, $S|B$ el suceso *"el Sport gana la semifinal condicionado a que el rival es el Bahía"* y $S|I$ el suceso *"el Sport gana la semifinal condicionado a que el rival es el Internacional"*. Entonces la probabilidad de que el Sport F. C. gane la semifinal es

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|B)P(B) + P(S|I)P(I) \\ &= 0.8 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.5 = 0.60 \end{aligned}$$

9.50 *Respuesta correcta: a*

Llamamos A_i al suceso *el jugador* A_i *acierta al lanzar el penalti*, $i = 1,2,3,4,5$. Al suponer que los lanzamientos son independientes se tiene

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) \\ &= 0.90 \cdot 0.85 \cdot 0.88 \cdot 0.92 \cdot 0.95 \\ &= 0.59 \end{aligned}$$

9.51 *Respuesta correcta: b*

Llamamos A_i al suceso *el jugador* A_i *acierta al lanzar el penalti*, $i = 1,2,3,4,5$. Tenemos que calcular la probabilidad del suceso $(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c \cup A_4^c \cup A_5^c)$. Es más sencillo calcular la probabilidad de su complementario y restar de 1 el resultado. El complementario del suceso anterior es el suceso $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$. Al suponer que los lanzamientos son independientes se tiene

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) \\ &= 0.90 \cdot 0.85 \cdot 0.88 \cdot 0.92 \cdot 0.95 \\ &= 0.59 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c \cup A_4^c \cup A_5^c) &= 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\ &= 0.41 \end{aligned}$$

9.52 *Respuesta correcta: a*

Sea n el número de equipos que iniciaron la competición. Al finalizar la primera fase, permanecieron en competición la mitad, es decir, $\frac{n}{2}$. En la siguiente eliminatoria este número queda reducido a la mitad, es decir, se reduce a $\frac{n/2}{2} = \frac{n}{4}$. De modo similar, en la siguiente eliminatoria el número de supervivientes se reduce a $\frac{n/4}{2} = \frac{n}{8}$. Por fin, en la última eliminatoria el número de finalistas es igual a $\frac{n/8}{2} = \frac{n}{16}$. Así pues, $\frac{n}{16} = 2$, por lo cual sabemos que participaron 32 equipos.

9.53 *Respuesta correcta: c*

Llamemos g al número de grupos y m al número de equipos de cada grupo, de forma que el número de equipos que juegan la fase es $g \cdot m$. Claramente, todos estos números son números enteros. El enunciado asegura que en cada grupo se jugó una liga a una sola vuelta, es decir, cada uno de los m equipos del grupo jugó con los

$(m-1)$ equipos restantes. Como en cada partido intervienen dos equipos se deduce que el número de partidos que se jugaron en cada grupo es $\frac{m(m-1)}{2}$. Como hay g grupos, el número total de partidos de la primera fase fue $g\,\frac{m(m-1)}{2}$. El enunciado asegura que este número es 48, así pues, $g\,\frac{m(m-1)}{2} = 48$. De aquí deducimos que $gm(m-1) = 96$, es decir, g, m y $(m-1)$ tienen que ser divisores de 96. Si descomponemos 96 en factores primos resulta $96 = 2^5 \cdot 3$. Entonces, las posibles descomposiciones de 96 en que intervengan tres factores y verifiquen la condición de que dos de ellos sean número consecutivos son las dos siguientes:

$$96 = 16\cdot 3\cdot 2$$
$$96 = 8\cdot 4\cdot 3$$

De la primera obtendríamos $g = 16$, $m = 3$, es decir, tendríamos 16 grupos de 3 equipos cada uno, lo cual hace un total de 48 equipos. Cada equipo juega dos partidos, es decir, se juegan un total de 48 partidos. De la segunda descomposición obtendríamos $g = 8$, $m = 4$, es decir, tendríamos 8 grupos de 4 equipos cada uno, lo cual hace un total de 32 equipos. Cada equipo juega 3 partidos, es decir, se juegan también un total de 48 partidos. Por tanto, sin más datos, no es posible afirmar si jugaron 32 ó 48 equipos.

9.54 *Respuesta correcta: a*

Los valores que puede tomar la variable se corresponden con los distintos países del mundo: español, mexicano, etc. Entonces se trata de una variable estadística cualitativa.

9.55 *Respuesta correcta: b*

Los valores que puede tomar la variable son 0,1,2,..., es decir, valores enteros. Entonces se trata de una variable estadística cuantitativa discreta.

9.56 *Respuesta correcta: b*

Los valores que puede tomar la variable son 0,1,2,..., es decir, valores enteros. Entonces se trata de una variable estadística cuantitativa discreta.

9.57 *Respuesta correcta: c*

En principio, la distancia recorrida por un jugador en un partido puede tomar cualquier valor real mayor o igual que cero. Por tanto puede considerarse una variable estadística cuantitativa continua.

9.58 *Respuesta correcta: b*

La tabla de frecuencias relativas es

Número de goles marcados x_i	Frecuencia absoluta de goleadores F_i	Porcentaje de goleadores %
1	71	74.6%
2	14	14.6%
3	4	4.2%
4	3	3.1%
5	4	4.2%

A la vista de los datos anteriores, el porcentaje de goleadores que anotó más de un gol fue 100-74.6 = 25.4%.

9.59 *Respuesta correcta: b*

Como se observa en los datos, la variable *"número de partidos jugados"* toma los valores x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. La frecuencia absoluta F_i de cada uno de ellos es

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
F_i	3	4	1	2	1	1	1	10

El número total de jugadores es $\sum_{F_i} = 23$. Por tanto la frecuencia relativa del valor *Numpartidos* = 7 es $f_i = \frac{10}{23} = 0.4348$.

9.60 *Respuesta correcta: b*

En la tabla siguiente se muestra las distribuciones de frecuencias, absolutas, relativas, acumuladas absolutas y acumuladas relativas de la variable.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
F_i	3	4	1	2	1	1	1	10
f_i	0.1304	0.1739	0.0435	0.0869	0.0435	0.0435	0.0435	0.4348
n_i	0.1304	0.3043	0.3478	0.4348	0.4783	0.5217	0.5652	1.0000

Por tanto la frecuencia relativa acumulada correspondiente al valor $x_i = 3$ es 0.4348.

9.61 *Respuesta correcta: a*

La altura media es igual a la suma de todos lo valores dividido por el número de ellos, de forma que

$$\overline{Altura} = \frac{184 + 187 + \cdots + 172 + 187}{23} = 180.9130\text{cm}.$$

9.62 *Respuesta correcta: a*

El rango de la variable es

$$R = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}} = 194 - 169 = 25\text{cm}.$$

9.63 *Respuesta correcta: a*

Dado que pasaron 16 equipos y en cada partido se elimina uno, la segunda fase constó de 15 partidos eliminatorios más el partido adicional, en total, 16 partidos. También se puede razonar del modo siguiente: en la primera ronda hay 16 equipos y se juegan 8 partidos. En la segunda, 8 equipos y 4 partidos. En la tercera, 4 equipos y 2 partidos que deciden los dos finalistas y los dos que juegan por el tercer y cuarto puesto. En total se han jugado 8+4+2 = 14 partidos, a los que hay que añadir la final y el partido adicional, totalizando 16 partidos. Sea x el número de encuentros de la primera fase, t el número de goles y a el número de tarjetas amarillas. Entonces, se jugaron un total de $x+16$ partidos. Según el enunciado $t = 2x$ y $t = \frac{3}{2}(x+16)$. Al resolver estas dos ecuaciones, se llega a que $x = 48$ y $t = 96$, con lo cual se han jugado en total $48 + 16 = 64$ partidos. Finalmente, si cada jugador de un equipo es amonestado, el número de tarjetas se incrementa en 11. En ese caso el número de tarjetas sería $a + 11$ y según el enunciado tendremos $a + 11 = 4 \cdot 64 = 256$. Al despejar obtenemos $\cdot a = 245$.

9.64 *Respuesta correcta: c*

La tabla siguiente muestras la disposición de los cálculos para obtener la media de la distribución del número de tarjetas amarillas por partido.

x_i	F_i	x_iF_i
0	2	0
1	5	5
2	11	22
3	11	33
4	12	48
5	14	70
6	4	24
7	2	14
8	1	8
9	1	9
12	1	12
Total	64	245

Por tanto el número medio de tarjetas amarillas por partido es igual a $\overline{x} = \frac{245}{64} = 3.83$.

9.65 *Respuesta correcta: b*

La tabla siguiente muestras la disposición de los cálculos para obtener la varianza de la distribución del número de tarjetas amarillas por partido.

x_i	F_i	x_iF_i	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2\, F_i$
0	2	0.00	−3.83	14.65	29.31
1	5	5.00	−2.83	8.00	39.99
2	11	22.00	−1.83	3.34	36.76
3	11	33.00	−0.83	0.69	7.54
4	12	48.00	0.17	0.03	0.35
5	14	70.00	1.17	1.37	19.23
6	4	24.00	2.17	4.72	18.87
7	2	14.00	3.17	10.06	20.12
8	1	8.00	4.17	17.40	17.40
9	1	9.00	5.17	26.75	26.75
12	1	12.00	8.17	66.78	66.78
Total	64.00	245.00			283.11

La media es

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_iF_i}{N} = \frac{245.00}{64.00}$$

La varianza es

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\, F_i}{N} = \frac{283.11}{64.00} = 4.42$$

La desviación típica es

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4.42} = 2.10$$

9.66 *Respuesta correcta: c*

La distribución de frecuencias del número de países que pertenecen a cada continente es

Continente	Frecuencia
Europa	13
América	8
África	6
Asia	3
Oceanía	2

La representación más exacta de esta distribución es el diagrama de sectores mostrado en c). La opción a) es incorrecta porque el sector correspondiente a Oceanía tiene un sector mayor que el de Asia. La opción b) es incorrecta porque los sectores de Europa y América son del mismo tamaño.

9.67 *Respuesta correcta: b*

Dado que todas las barras tienen la misma longitud de base, la altura de la barra tiene que ser proporcional a la frecuencia. Esto sólo ocurre en la alternativa b). La alternativa a) se olvida de la frecuencia del valor 0 de la variable, mientras que la alternativa c) intercambia las barras correspondientes a los valores 6 y 7.

10 LA CAÍDA DE LOS CUERPOS

10.1 *Respuesta correcta: c*

Como la distancia es de 0.1 m, la fuerza de atracción entre ambos cuerpos es

$$F = G\,\frac{1000 \cdot 50}{0.1^2} = 0.00033\,N$$

puesto que la constante de gravitación universal vale $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,Nm^2/kg^2$.

10.2 *Respuesta correcta: a*

Sometido a una fuerza de 0.00033 N, un cuerpo de 50 kg de masa, sufre una aceleración de

$$a = \frac{0.00033}{50} = 6.6 \cdot 10^{-6}\,m/s^2$$

en la dirección de la fuerza.

10.3 *Respuesta correcta: a*

Sometido a una fuerza de 0.00033 N, un cuerpo de 1000 kg de masa, sufre una aceleración de

$$a = \frac{0.00033}{1000} = 3.3 \cdot 10^{-7}\,m/s^2$$

en la dirección de la fuerza.

10.4 *Respuesta correcta: b*

La velocidad de 900 km/h equivale a $900000/3600 = 250\,m/s$. Alcanzar dicha velocidad al cabo de 180 s, supone una aceleración de $250/180 = 1.39\,m/s^2$. Para que el avión, de 50000 kg de masa, adquiera esta aceleración, los motores han de ejercer una fuerza $F = 50000 \cdot 1.39 = 69500\,N$.

10.5 *Respuesta correcta: c*

Según la Ley de gravitación universal, la fuerza con la que la Luna atrae a un cuerpo de 1 kg de masa, situado en su superficie es

$$F = G\,\frac{7.368 \cdot 10^{22}}{1740000^2} = 1.62\,N$$

ya que la constante de gravitación universal vale $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,Nm^2/kg^2$.

10.6 *Respuesta correcta: a*

La báscula mide la fuerza que se ejerce sobre ella al subirse. En la Tierra, el astronauta ejerce una fuerza de $75 \cdot 9.81 = 735.75\,N$, que la báscula interpreta como 75 kg. En cambio, en la Luna ejercerá una fuerza de $75 \cdot 1.62 = 121.5\,N$ y la báscula, graduada para la Tierra, lo interpretará como 12.385 kg que es la masa

que en la Tierra ejercería una fuerza de $12.385 \cdot 9.81 = 121.5\, N$. Dicho de otra forma, la fuerza ejercida en la Luna por cada kilogramo de masa es una proporción de $1.62/9.81 = 0.16513$ de la fuerza ejercida en la Tierra y, en consecuencia, $75\, kg$ son interpretados por la báscula como $75 \cdot 0.16513 = 12.385\, kg$.

10.7 *Respuesta correcta: b*

Con una altura inicial $y_0 = 20\, m$ y una velocidad inicial $v_0 = 0$, al cabo de t segundos la piedra está a una altura $y = 20 - 9.81 \cdot t^2/2$; así que, para $t = 1$, la altura resulta $y = 20 - 9.81/2 = 15.095$ metros.

10.8 *Respuesta correcta: a*

La altura inicial es $y_0 = 20\, m$ y la velocidad inicial $v_0 = 0\, m/s$. Por tanto, su posición al cabo de un tiempo t es $y = 20 - 9.81 \cdot t^2/2$. Llegará al suelo cuando la altura se anule; es decir cuando se verifique $20 - 9.81 \cdot t^2/2 = 0$, lo cual se produce al cabo de $t = \sqrt{40/9.81} = 2.02$ segundos. Obsérvese que el tiempo de caída no depende de la masa de la piedra.

10.9 *Respuesta correcta: c*

La piedra tarda $2.02\, s$ en llegar al suelo. Durante ese tiempo ha ido acelerando a $9.81\, m/s^2$, a partir de su velocidad inicial $v_0 = 0$; por consiguiente, llega al suelo con una velocidad $v = 9.81 \cdot 2.02 = 19.8\, m/s$. Ello equivale a $v = 19.8 \cdot 3600/1000 = 71.28\, km/h$.

10.10 *Respuesta correcta: b*

Se supone que la piedra estaba inicialmente en reposo ($v_0 = 0$) a una altura y_0 desconocida. Llega al suelo cuando sea $y_0 - 9.81 \cdot t^2/2 = 0$; es decir, cuando hayan transcurrido $t = \sqrt{2y_0/9.81}$ y, en ese instante, la velocidad con la que se mueve es $v = 9.81\sqrt{2y_0/9.81} = \sqrt{2y_0 \cdot 9.81}$. Como dicha velocidad es de $36\, m/s$, es porque la altura desde la que ha caído la piedra cumple $2y_0 \cdot 9.81 = 36^2$ o bien $y_0 = 36^2/(2 \cdot 9.81) = 66$ metros.

10.11 *Respuesta correcta: a*

La altura inicial es $y_0 = 1\, m$ y la velocidad inicial $v_0 = 150\, km/h = 150 \cdot 1000/3600 = 41.67\, m/s$; luego la altura al cabo de t segundos es

$$y = 1 + 41.67 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2$$

Para $t = 5\, s$, resulta $y = 1 + 41.67 \cdot 5 - 9.81 \cdot 5^2/2 = 86.725\, m$.

10.12 *Respuesta correcta: b*

Con una velocidad inicial $v_0 = 41.67\, m/s$, al cabo de t segundos su velocidad será $v = 41.67 - 9.81 \cdot t$. Con $t = 5\, s$ queda $v = -7.38 m/s$; es decir que la pelota está bajando con una velocidad instantánea de $7.38\, m/s$.

10.13 *Respuesta correcta: b*

Como la velocidad inicial es $v_0 = 150\, km/h = 41.67\, m/s$, al cabo de t segundos, su velocidad será $v = 41.67 - 9.81 \cdot t$. La bola sube hasta que su velocidad se anula (y pasa después a ser negativa para caer hacia el suelo). Por tanto, sube durante $t = 41.67/9.81 = 4.25$ segundos.

10.14 *Respuesta correcta: c*

Con una altura inicial $y_0 = 1$ y una velocidad inicial $v_0 = 41.67\, m/s$, la altura de la bola al cabo de t segundos será $y = 1 + 41.67 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2$. La altura máxima se alcanza cuando su derivada –la velocidad – se anula; dado que la velocidad en el instante t es $v = 41.67 - 9.81 \cdot t$, la pelota sube durante $t = 41.67/9.81 = 4.25\, s$ y, en ese instante, la altura alcanzada es

$$y = 1 + 41.67 \cdot 4.25 - 9.81 \cdot 4.25^2/2 = 89.5\, m.$$

10.15 *Respuesta correcta: b*

La pelota sube, hasta que su velocidad $v = 4.67 - 9.81 \cdot t$ se anula, durante $t = 4.67/9.81 = 4.25\, s$. En ese instante su altura es $y = 1 + 41.67 \cdot 4.25 - 9.81 \cdot 4.25^2/2 = 89.5\, m$. A continuación, cae desde esa altura; o sea que su posición al cabo de t segundos adicionales es

$$z = 89.5 - 9.81 \cdot t^2/2$$

y llega al suelo cuando sea $89.5 - 9.81 \cdot t^2/2 = 0$, lo que ocurre al cabo de $t = \sqrt{2 \cdot 89.5/9.81} = 4.27$ segundos. En total, la bola ha estado $4.25\, s$ subiendo y $4.27\, s$ bajando; de forma que llega al suelo $8.52\, s$ después del golpe.

Directamente, la ecuación de segundo grado

$$1 + 41.67 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2 = 0$$

indica cuando se anula la altura de la bola y, efectivamente, su solución positiva es 8.52 s.

10.16 *Respuesta correcta: a*

Según la cuestión anterior, la bola tarda 8.52 s en caer al suelo. Su velocidad al cabo de ese tiempo es

$$v = v_0 - 9.81 \cdot t = 4.67 - 9.81 \cdot 8.52 = -41.91\, m/s$$
$$= -41.91 \cdot 3600/1000 = -150.88\, km/h.$$

El signo menos indica que se trata de una velocidad hacia abajo. Puede observarse que la bola vuelve a estar a 1 m del suelo al cabo de 4.25 s de descenso y llega a esa altura con velocidad opuesta a la que salió: $-150\, km/h$.

10.17 *Respuesta correcta: c*

Contando el tiempo a partir del momento en el que se rompe el cable, la altura inicial es $y_0 = 15\, m$ y la velocidad inicial $v_0 = 0.6\, m/s$. Entonces, al cabo de t segundos, la altura será

$$y = 15 + 0.6 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2$$

y, para $t = 1$, resulta $y = 15 + 0.6 - 9.81/2 = 10.695$ metros.

10.18 *Respuesta correcta: c*

Cuando el cable se rompe, la velocidad inicial es $v_0 = 0.6\, m/s$. Al cabo de t segundos la velocidad será $v = 0.6 - 9.81 \cdot t$. En particular, con $t = 1\, s$, es $v = 0.6 - 9.81 = -9.21\, m/s$; lo cual significa que baja a 9.21 m/s.

10.19 *Respuesta correcta: a*

Cuando el cable se rompe, la altura es 15 m y la velocidad 0.6 m/s. Por consiguiente, después de t segundos su altura será

$$y = 15 + 0.6 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2$$

que se anula únicamente cuando $t = 1.81$ segundos, mientras que para $t = 2.3\, s$ vale $-9.567\, m$ y para $t = 2.82\, s$ vale $-22.31\, m$ (valores negativos que indican que el ascensor estaría por debajo del suelo si pudiese continuar cayendo). De hecho, $t = 1.81\, s$ es la única solución positiva de la ecuación de segundo grado $y = 0$.

10.20 *Respuesta correcta: c*

Según la cuestión anterior, el ascensor cae al suelo al cabo de 1.81 segundos y en ese instante la velocidad será $v = 0.6 - 9.81 \cdot 1.81 = -17.16\, m/s = -17.16 \cdot 3600/1000 = -61.78; km/h$. El signo menos indica que la velocidad es hacia abajo.

10.21 *Respuesta correcta: a*

La velocidad total tiene una componente horizontal de 270 km/h y una componente vertical de 45 km/h; es decir, puede representarse como el segmento S que une el origen con el punto de coordenadas $(270, 45)$. Según el teorema de Pitágoras, dicho segmento tiene longitud $L = \sqrt{270^2 + 45^2} = 273.72\, km/h$, que es la velocidad que el arco ha imprimido a la flecha en la dirección en la que ha sido disparada. Puede observarse que el ángulo α que forma el segmento S con la dirección horizontal es tal que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{45}{270} = 0.167$; dicho ángulo mide 0.165 radianes o 9.45° e indica la dirección en la que se ha efectuado el disparo.

10.22 *Respuesta correcta: b*

La velocidad inicial es $v_0 = 45 \cdot 1000/3600 = 12.5\, m/s$ en la dirección vertical. Después de t segundos de vuelo, la altura de la flecha sobre el suelo es

$$y = 12.5 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2.$$

En particular, después de $t = 2\, s$, la altura de la flecha es $y = 12.5 \cdot 2 - 9.81 \cdot 4/2 = 5.38$ metros.

10.23 *Respuesta correcta: a*

La velocidad inicial es $w_0 = 270 \cdot 1000/3600 = 75\, m/s$ en la dirección horizontal. Después de t segundos de vuelo, la distancia horizontal recorrida por la flecha es $x = w_0 \cdot t = 75 \cdot t$ y, para $t = 2\, s$, vale $x = 75 \cdot 2 = 150$ metros.

10.24 *Respuesta correcta: c*

Según las dos cuestiones previas, al cabo de 2 segundos la flecha se encuentra en el punto de coordenadas $(150, 5.38)$. La distancia desde ese punto al origen del disparo viene dada por $d = \sqrt{150^2 + 5.38^2} = 150.1$ metros.

10.25 *Respuesta correcta: b*

La velocidad inicial es $v_0 = 45 \cdot 1000/3600 = 12.5\, m/s$ en la dirección vertical. Al cabo de t segundos, la velocidad vertical de la flecha es $v = v_0 - 9.81 \cdot t = 12.5 - 9.81 \cdot t$. Para $t = 2$, se obtiene $v = 12.5 - 9.81 \cdot 2 = -7.12\, m/s$. El signo menos indica que la flecha está bajando.

10.26 *Respuesta correcta: a*

Las velocidades iniciales son $w_0 = 270 \cdot 1000/3600 = 75\ m/s$ en la dirección horizontal y $v_0 = 45 \cdot 1000/3600 = 12.5\ m/s$ en la dirección vertical. Después de t segundos de vuelo, la altura de la flecha sobre el suelo es

$$y = 12.5 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2$$

que se anula en el momento en que la flecha cae. La ecuación $12.5 \cdot t = 9.81 \cdot t^2/2$ equivale a $12.5 = 9.81 \cdot t/2$ y tiene como solución $t = 2 \cdot 12.5/9.81 = 2.548$ segundos.

10.27 *Respuesta correcta: c*

Según la cuestión anterior, la flecha cae al suelo al cabo de 2.548 segundos. En ese tiempo, la distancia horizontal recorrida es $x = w_0 \cdot t = 75 \cdot 2.548 = 191.1$ metros.

10.28 *Respuesta correcta: b*

En la dirección vertical, al cabo de t segundos de vuelo, la flecha lleva una velocidad $v = v_0 - 9.81 \cdot t = 12.5 - 9.81 \cdot t\, m/s$. La altura máxima se alcanza cuando la velocidad vertical se anula, instante en el que deja de subir, para empezar a bajar. Por tanto, la altura máxima se alcanza tras $t = 12.5/9.81 = 1.274$ segundos y, en ese momento, la altura alcanzada es

$$y = 12.5 \cdot 1.274 - 9.81 \cdot 1.274^2/2 = 7.96 \text{ metros.}$$

Nótese que la altura máxima se alcanza a mitad del recorrido de la flecha, puesto que $2 \cdot 1.274 = 2.548$.

10.29 *Respuesta correcta: a*

La altura inicial del avión es 700 m y su velocidad vertical es inicialmente $v_0 = 0$. Por tanto, t segundos después de perder las alas, su altura será $y = 700 - 9.81 \cdot t^2/2$. Para $t = 6\ s$, queda $y = 700.9.816^2/2 = 523.42$ metros.

10.30 *Respuesta correcta: c*

Como la velocidad vertical es nula, al cabo de t segundos, será $v = -9.81 \cdot t$, que vale $v = -9.81 \cdot 6 = -58.86\, m/s = -58.86 \cdot 3600/1000 = 211.9\, km/h$.

10.31 *Respuesta correcta: a*

Como su velocidad inicial vertical es $v_0 = 0$, al cabo de t segundos su altura será $y = 700 - 9.81 \cdot t^2/2$. Llegará al suelo cuando sea $700 - 9.81t^2/2 = 0$; es decir, al cabo de $t = \sqrt{2 \cdot 700/9.81} = 11.946$ segundos.

10.32 *Respuesta correcta: a*

Según la cuestión anterior, el avión llega al suelo al cabo de 11.946 segundos; durante ese tiempo su velocidad horizontal ha sido $700\ km/h = 700 \cdot 1000/3600 = 194.44\, m/s$, con lo cual su posición horizontal habrá aumentado en $194.44 \cdot 11.946 = 2322.78$ metros o aproximadamente 2.323 km.

10.33 *Respuesta correcta: b*

El avión tarda 11.946 segundos en llegar al suelo y su velocidad vertical en ese instante será $v = 9.81 \cdot 11.946 = 117.19\ m/s = 117.19 \cdot 3600/1000 = 421.88\, km/h$.

10.34 *Respuesta correcta: b*

Según la cuestión anterior, el avión cae al suelo con una velocidad vertical de 421.88 km/h y sigue llevando una velocidad horizontal de 700 km/h. Según el teorema de Pitágoras, su velocidad total será $\sqrt{700^2 + 421.88^2} = 817.3\, km/h$.

11 PRUEBAS DIAGNÓSTICAS

11.1 *Respuesta correcta: b*

De acuerdo con la tabla 6.11, entre los 100000 análisis hubo 248 positivos, luego la probabilidad de que un análisis sea positivo es $\frac{248}{100000} = 0.00248$.

11.2 *Respuesta correcta: a*

Hay 248 análisis positivos entre lo que elegimos uno al azar. Puesto que 220 de estos análisis corresponden a personas que no están infectadas, la probabilidad de que un análisis positivo corresponda a un no infectado es

$$\frac{220}{248} = 0.887$$

11.3 *Respuesta correcta: c*

El número de personas no infectadas que hay entre las 100 000 analizadas es 99970, de éstas, 99750 presentan un test negativo; luego la probabilidad de que un no infectado tenga un test negativo es

$$\frac{99750}{99970} = 0.997799$$

11.4 *Respuesta correcta: b*

El número de individuos infectados es 30; entre estos, 28 han resultado positivos y 2 negativos. El porcentaje de positivos entre los infectados es $\frac{28}{30} \cdot 100\,\% = 93.33\,\%$.

11.5 *Respuesta correcta: c*

El número de positivos es 248; entre ellos hay 28 infectados, luego el porcentaje de infectados entre los positivos es $\frac{28}{248} \cdot 100\,\% = 11.29\,\%$

11.6 *Respuesta correcta: a*

El número de casos positivos es 248; entre los positivos hay 220 casos de individuos no infectados. Así, la probabilidad de un falso positivo es $\frac{220}{248} = 0.8871$.

11.7 *Respuesta correcta: a*

El número de resultados negativos es 99752 entre los que hay 2 casos que estaban infectados. La probabilidad de un falso negativo es $\frac{2}{99752} = 0.00002005$.

11.8 *Respuesta correcta: b*

Entre las 100 000 personas analizadas hay 28 que están infectados y resultan positivos, luego la probabilidad de una persona elegida al azar esté infectada y dé positivo en el test es $\frac{28}{100000} = 0.00028$.

11.9 *Respuesta correcta: b*

Lo justificaremos primero con palabras sencillas: si el test tiene una sensibilidad del 100 %, entonces todos los individuos infectados resultan positivos, pero esto no impide que algunos individuos no infectados también resulten positivos, por lo que no puede asegurarse que todos los positivos estén infectados y la proposición es falsa.

De manera un poco más formal, en cualquier test que se pueda presentar hay cuatro casos posibles:

- **Caso 1** Todos los infectados resultan positivos y todos los no infectados resultan negativos.
- **Caso 2** Todos los infectados resultan positivos y algunos no infectados resultan positivos.
- **Caso 3** Algunos infectados resultan negativos y todos los no infectados resultan negativos.
- **Caso 4** Algunos infectados resultan negativos y algunos no infectados resultan positivos.

Ahora consideremos las proposiciones p, "el test tiene una sensibilidad del 100 %" y q "todo individuo que resulta positivo, está infectado", la proposición que debemos analizar es $p \to q$.

En el caso 1, la proposición p es verdadera y la proposición q es verdadera; en el caso 2, la proposición p es verdadera y la q falsa; en los casos 3 y 4 la proposición p es falsa y no hay nada que analizar. Así, hay un caso en que la proposición p es verdadera y la q es falsa, por lo que $p \to q$ es falsa.

11.10 *Respuesta correcta: b*

Con palabras sencillas: si un test no tiene falsos negativos entonces todos los individuos que resultan positivos están infectados, pero esto no significa que todos los infectados resulten positivos, por lo que la proposición es falsa.

De manera un poco más formal, en cualquier test que se pueda presentar hay cuatro casos posibles:

- **Caso 1** Todos los positivos están infectados y todos los negativos están no infectados.
- **Caso 2** Todos los positivos están infectados y algunos negativos están infectados.
- **Caso 3** Algunos positivos están no infectados y todos los negativos están no infectados.
- **Caso 4** Algunos positivos están no infectados y algunos negativos están infectados.

Ahora consideremos las proposiciones p, "no hay falsos positivos" que equivale a decir "todos los positivos están infectados" y la proposición q "todo infectado resulta positivo", la proposición que debemos analizar es $p \to q$.

En el caso 1, la proposición p es verdadera ya que todos los positivos están infectados y la proposición q también es verdadera; en el caso 2, la proposición p es verdadera y la q falsa ya que hay algún infectado entre los negativos, lo que significa que no ha dado positivo; en los casos 3 y 4 la proposición p es falsa y no hay nada que analizar. Así, hay un caso en que la proposición p es verdadera y la q es falsa, por lo que $p \to q$ es falsa.

12 CÓDIGOS

12.1 *Respuesta correcta: b*

Es una aplicación inyectiva porque no hay dos restos que lleven asociada la misma letra. No es una aplicación sobreyectiva porque, de acuerdo con la tabla, las letras I, Ñ, O y U no tienen preimagen. Puesto que no es sobreyectiva, no puede ser biyectiva.

12.2 *Respuesta correcta: c*

La correspondencia f no es una aplicación, ya que algunos elementos del conjunto original, las letras I, Ñ, O y U, no tienen imagen.

12.3 *Respuesta correcta: c*

Si dividimos 2693750 entre 23, resulta

```
2 6 9 3 7 5 0 |2 3
  3 9          1 1 7 1 1 9
  1 6 3
      2 7
        4 5
        2 2 0
          1 3
```

luego $2693750 = 117119 \times 23 + 13$; el resto de la división es 13 y la letra asignada, de acuerdo con la tabla 6.12 es J.

12.4 *Respuesta correcta: a*

Si el número 95362431 tiene asignada la letra S, entonces su resto en la división por 23 es 15, lo que significa que se pone poner como

$$95362431 = 23 \times C + 15$$

donde C es el cociente de la división. Se sigue que el número $95362432 = 95362431 + 1$ será igual a

$$95362432 = 23 \times C + 15 + 1 = 23 \times C + 16$$

luego el resto de la división de 95362432 entre 23 es 16 y, de acuerdo con la tabla 6.12 de asignación de letras, le corresponde la letra Q.

12.5 *Respuesta correcta: a*

Si realizamos la división por 23 del número 95362441, resulta

```
9 5 3 6 2 4 4 1 |2 3
  3 3             4 1 4 6 1 9 3
  1 0 6
    1 4 2
        4 4
        2 1 4
            7 1
              2
```

El resto es 2, luego la letra que debe tener asignada es la W; el código es válido.

12.6 *Respuesta correcta: b*

Los ocho primeros dígitos de la cuenta son 5432 0001; calculamos el número M igual a

$$\begin{aligned} M &= 2^2 \cdot 5 + 2^3 \cdot 4 + 2^4 \cdot 3 + 2^5 \cdot 2 \\ &\quad + 2^6 \cdot 0 + 2^7 \cdot 0 + 2^8 \cdot 0 + 2^9 \cdot 1 \\ &= 676 \end{aligned}$$

Ahora, el resto de la división por 11 es igual a 5.

```
6 7 6 |1 1
  1 6  6 1
    5
```

luego el primer dígito de control es igual a $11 - r = 11 - 5 = 6$.

12.7 *Respuesta correcta: a*

Comprobemos que los dos dígitos de control cumplen el algoritmo que hemos descrito. Primero, M es igual a

$$\begin{aligned} M &= 2^2 \cdot 5 + 2^3 \cdot 4 + 2^4 \cdot 3 + 2^5 \cdot 2 \\ &\quad + 2^6 \cdot 1 + 2^7 \cdot 0 + 2^8 \cdot 0 + 2^9 \cdot 1 \\ &= 749 \end{aligned}$$

El resto de la división de M por 11 es $r = 3$.

$$\begin{array}{rrr|rr} 7 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ \cline{4-5} & 8 & 0 & 6 & 7 \\ & & 3 & & \end{array}$$

luego el primer dígito de control es $11 - 3 = 8$.

Segundo, calculamos N igual a

$$\begin{aligned} N &= 4 + 2^1 \cdot 2 + 2^3 \cdot 2 + 2^4 \cdot 5 + 2^5 \cdot 9 + 2^6 \cdot 7 + 2^9 \cdot 1 \\ &= 1352 \end{aligned}$$

El resto de la división de N por 11 es $s = 10$.

$$\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 & 1 & \\ \cline{5-7} & 2 & 5 & & 1 & 2 & 2 \\ & & 3 & 2 & & & \\ & & 1 & 0 & & & \end{array}$$

luego el segundo dígito de control es $11 - s = 11 - 10 = 1$.

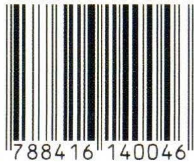


ÍNDICE ALFABÉTICO

INTRODUCCIÓN A LAS
MATEMÁTICAS

Introducción a las Matemáticas presenta los temas de esta disciplina cuyo conocimiento es indispensable para cualquier estudiante universitario. Esta obra, escrita con un lenguaje muy sencillo y razonado, no requiere, prácticamente, ningún conocimiento previo. Los autores, especialistas en enseñanza a distancia, introducen los conceptos de manera gradual de forma que, con el apoyo de los numerosos ejemplos y ejercicios resueltos, el estudiante puede alcanzar el conocimiento por sí mismo.

ISBN: 978-84-16140-04-6





EDICIONES ACADÉMICAS